

A. Tóm tắt kiến thức

1. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

- ✓ Cho điểm x_0 thuộc khoảng K và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc $K \setminus \{x_0\}$.
- ✓ Ta nói hàm số $y = f(x)$ **có giới hạn hữu hạn** là số L khi x dần tới x_0 nếu dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$.

Nhận xét: $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ (c là hằng số).

2. Các phép toán về giới hạn hữu hạn của hàm số

- ✓ Cho $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$. Khi đó:
 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$ $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$
- ✓ $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ ($M \neq 0$).
- ✓ Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.
- ✓ (Dấu của $f(x)$ được xét trên khoảng tìm giới hạn, $x \neq x_0$).

Nhận xét:

- ✓ $\lim_{x \rightarrow x_0} x^k = x_0^k$, k là số nguyên dương;
 $\lim_{x \rightarrow x_0} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) (c \in \mathbb{R})$ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$
- ✓ b) , nếu tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

3. Giới hạn một phía

- ✓ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.
- ✓ Ta nói hàm số $y = f(x)$ **có giới hạn bên phải** là số L khi x dần tới x_0 nếu dãy số (x_n) bất

 Chú ý:

- ✓ Ta thừa nhận các kết quả sau:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \text{ và } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L;$$

- ✓ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

- ✓ Nếu thì không tồn tại .

- ✓ Các phép toán về giới hạn hữu hạn của hàm số ở Mục 2 vẫn đúng khi ta thay $x \rightarrow x_0$ bằng $x \rightarrow x_0^+$ hoặc $x \rightarrow x_0^-$.

4. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

- ✓ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

- ✓ Ta nói hàm số $y = f(x)$ **có giới hạn hữu hạn** là số L khi $x \rightarrow +\infty$ nếu dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow +\infty$.
kí hiệu

- ✓ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$.

- ✓ Ta nói hàm số $y = f(x)$ **có giới hạn hữu hạn** là số L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \rightarrow -\infty$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow -\infty$.
kí hiệu

 Chú ý:

- ✓ a) Với c là hằng số và k là số nguyên dương, ta luôn có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c$ và $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0$.

- ✓ b) Các phép toán trên giới hạn hàm số ở Mục 2 vẫn đúng khi thay $x \rightarrow x_0$ bằng $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$.

- ✓ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$.

- ✓ Ta nói hàm số $y = f(x)$ **có giới hạn hữu hạn** là số L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \rightarrow -\infty$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow -\infty$.
kí hiệu

5. Giới hạn vô cực của hàm số tại một điểm

- ✓ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.

 Chú ý:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty,$$

a) Các giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

được định nghĩa tương tự như trên.

b) Ta thường có các giới hạn thường dùng sau:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty \quad (a \in \mathbb{R}); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$$

với k nguyên dương;

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty \quad \text{với } k \text{ là số chẵn}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty \quad \text{với } k \text{ là số lẻ}.$$

c) Các phép toán trên giới hạn hàm số ở Mục 2 chỉ áp dụng được khi tất cả các hàm số được xét có giới hạn hữu hạn. Với giới hạn vô cực, ta có một số quy tắc sau đây.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \neq 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = -\infty \text{ thì } \lim_{x \rightarrow x_0^+} [f(x).g(x)]$$

Nếu được tính theo quy tắc cho bởi sau:

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} [f(x).g(x)]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

B. Phân dạng toán cơ bản

•Dạng ①: Xác định giới hạn của hàm số bằng định nghĩa

Các ví dụ minh họa

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} \quad \text{với } x \neq 3 \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$$

Câu 1: Xét hàm số với $x \neq 3$. Chứng minh rằng $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$.

Câu 2: Sử dụng định nghĩa, chứng minh rằng:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} x^3 = -8$ b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$

•Dạng ②: Tính giới hạn của hàm số bằng một số kết quả giới hạn cơ bản

Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$. Chứng minh rằng: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{2} = 1$.

Câu 2: Khi thực hiện tính $\lim_{x \rightarrow 1} [3f(x)]$ biết $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$, một bạn làm như sau:

$$\lim_{x \rightarrow 1} [3f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} f(3x) = \lim_{3x \rightarrow 3} f(3x) = 3.$$

a) Theo em, lời giải trên có đúng không? Giải thích.

b) Nếu lời giải trên là sai, em hãy trình bày lời giải đúng.

Câu 3: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} (-x^2 + x + 2)$ b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 2x + 1}{3x - 2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{5x^2 + x + 4}$.

• **Dạng ③: Tính giới hạn của hàm số có dạng** $\frac{C}{\infty}, \frac{C}{0} (C \neq 0), \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$

📖 **Các ví dụ minh họa**

Câu 1: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x - 3}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{4x - 5}$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1}$

Câu 2: Cho $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 3$. Tìm $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

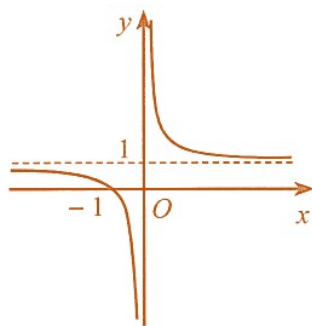
• **Dạng ④: Xác định giới hạn của hàm số dựa vào đồ thị**

📖 **Các ví dụ minh họa**

Câu 1: Quan sát đồ thị hàm số ở Hình 1 và cho biết các giới hạn sau:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x); \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

;

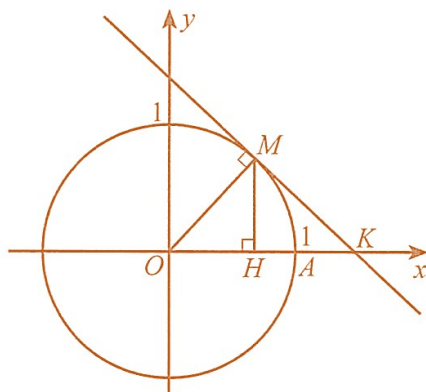


Hình 1

$$M(t; \sqrt{1-t^2}), 0 < t < 1$$

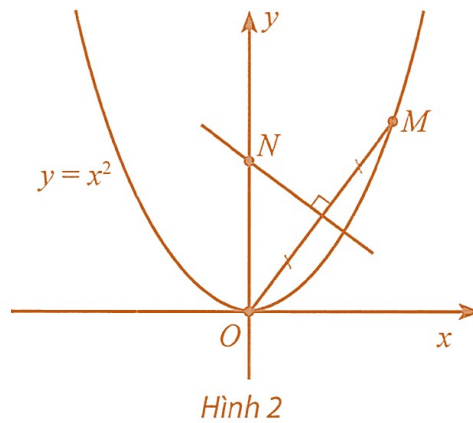
$$(C): x^2 + y^2 = 1$$

Câu 2: Cho điểm $M(t; \sqrt{1-t^2})$ nằm trên đường tròn đơn vị $(C): x^2 + y^2 = 1$, điểm $A(1;0)$ là một giao điểm của (C) với trục hoành. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên trục hoành, K là giao điểm của tiếp tuyến của (C) tại M với trục hoành. Khi điểm M dần đến điểm A thì tỉ số $\frac{HK}{HA}$ dần đến giá trị nào?



Hình 1

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(t; t^2), t > 0$, nằm trên đường parabol $y = x^2$. Đường trung trực của đoạn thẳng OM cắt trục tung tại N . Điểm N dần đến điểm nào khi điểm M dần đến điểm O ?



•Dạng ⑤: Ứng dụng

📖 Các ví dụ minh họa

$$f(v) = \frac{290,4v}{0,36v^2 + 13,2v + 264}$$

Câu 1: Số lượng xe ô tô vào một đường hầm được cho bởi công thức

trong đó $v(m/s)$ là vận tốc trung bình của các xe khi đi vào đường hầm. Tính $\lim_{v \rightarrow 20} f(v)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 2: Một đơn vị sản xuất hàng thủ công ước tính chi phí để sản xuất x đơn vị sản phẩm là $C(x) = 2x + 55$ (triệu đồng).

a) Tìm hàm số $f(x)$ biểu thị chi phí trung bình để sản xuất mỗi đơn vị sản phẩm.

b) Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Giới hạn này có ý nghĩa gì?

Câu 3: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên biến đổi theo một hàm số thời gian (tính theo ngày) là $g(t) = 45t^2 - t^3$ (người). Tốc độ trung bình gia tăng người bệnh giữa hai thời điểm t_1, t_2 là

$V_{tb} = \frac{g(t_2) - g(t_1)}{t_2 - t_1}$. Tính $\lim_{t \rightarrow 10} \frac{g(t) - g(10)}{t - 10}$ và cho biết ý nghĩa của kết quả tìm được.

•Dạng ①: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 7x + 11)$ là:
A. 37. **B.** 38. **C.** 39. **D.** 40.

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} |x^2 - 4|$ là:
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 3: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{2}$ là:
A. $\sin \frac{1}{2}$. **B.** +∞. **C.** -∞. **D.** 0.

Câu 4: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3}{x^3 + 2}$ là:
A. 1. **B.** - 2. **C.** 2. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Câu 5: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^3}{(2x - 1)(x^4 - 3)}$ là:
A. 1. **B.** - 2. **C.** 0. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Câu 6: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x - 1|}{x^4 + x - 3}$ là:
A. $-\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Câu 7: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{9x^2 - x}{(2x - 1)(x^4 - 3)}}$ là:
A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** 5.

Câu 8: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2x}}$ là:
A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Câu 9: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x^2 - 4} - \sqrt{3x - 2}}{x + 1}$ là:
A. $-\frac{3}{2}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** 0. **D.** +∞.

Câu 10: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x)$ là:

A. 0.

B. $+\infty$.

C. $\sqrt{2}-1$.

D. $-\infty$.

Câu 11: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{3x^3-1} + \sqrt{x^2+2})$ là:

A. $\sqrt[3]{3}+1$.

B. $+\infty$.

C. $\sqrt[3]{3}-1$.

D. $-\infty$.

Câu 12: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$ là:

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. $-\frac{15}{2}$.

D. Không xác định.

Câu 13: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x+2x}}$ là:

A. $-\frac{1}{5}$.

B. $+\infty$.

C. $-\infty$.

D. $\frac{1}{5}$.

Câu 14: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|3x+6|}{x+2}$ là:

A. $-\infty$.

B. 3.

C. $+\infty$.

D. Không xác định.

Câu 15: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$ là:

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. $-\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Câu 16: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2+13x+30}{\sqrt{(x+3)(x^2+5)}}$ là:

A. -2.

B. 2.

C. 0.

D. $\frac{2}{\sqrt{15}}$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{1-x}} & \text{với } x < 1 \\ \sqrt{3x^2+1} & \text{với } x \geq 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ là:

A. $+\infty$.

B. 2.

C. 4.

D. $-\infty$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{1-x} & \text{với } x < 1 \\ \sqrt{2x-2} & \text{với } x \geq 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ là:

A. $+\infty$.

B. -1.

C. 0.

D. 1.

Câu 19: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2-3 & \text{với } x \geq 2 \\ x-1 & \text{với } x < 2 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ là:

A. -1.

B. 0.

C. 1.

D. Không tồn tại.

Câu 20: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2}+3 & \text{với } x \geq 2 \\ ax-1 & \text{với } x < 2 \end{cases}$. Tìm a để tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

A. $a=1$.

B. $a=2$.

C. $a=3$.

D. $a=4$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \forall x > 3 \\ 1 & \forall x = 3 \\ 3 - 2x^2 & \forall x < 3 \end{cases}$$

Câu 21: Cho hàm số

Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6.$ B. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 15$
 C. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 6.$ D. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -15.$

Câu 22: Biết rằng $a+b=4$ và $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x} - \frac{b}{1-x^2} \right)$ hữu hạn. Tính giới hạn

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x^3} - \frac{a}{1-x} \right)$$

- A. 1. B. 2. C. 1. D. -2.

Câu 23: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+2x^2} - x)$ là:

- A. 0. B. $+\infty$. C. $\sqrt{2} - 1$. D. $-\infty$.

Câu 24: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$ là:

- A. 0. B. $+\infty$. C. $\frac{1}{2}$. D. $-\infty$.

Câu 25: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+4x})$ là:

- A. $\frac{7}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $+\infty$. D. $-\infty$.

Câu 26: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt[3]{x^3-x^2})$ là:

- A. $\frac{5}{6}$. B. $+\infty$. C. -1. D. $-\infty$.

•Dạng 0: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - x + 3) = 9$		
b)	$\lim_{x \rightarrow 6} \sqrt{\frac{1}{x+3}} = 3$		
c)	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 1$		
d)	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{3}$		

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{khi } x < -1 \\ \sqrt{x^2 + 1} & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$$

Câu 2. Cho hàm số . Khi đó: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \sqrt{5}$		
b)	Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -3$		
c)	Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \sqrt{2}$		
d)	Hàm số tồn tại giới hạn khi $x \rightarrow -1$		

Câu 3. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\lim_{x \rightarrow 0} (-5x^3 - 4x + 2) = 2$		
b)	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x - 3x^2}{4x + 1} = -\frac{3}{4}$		
c)	$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{x + 5} = +\infty$		
d)	$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x} = \frac{5}{4}$		

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{khi } x < 2 \\ \sqrt{x + 2} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$$

Câu 4. Cho hàm số . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -8$		
b)	Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -3$		
c)	Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$		
d)	Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$		

Câu 5. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
--	---------	------	-----

a)	$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x+1} = \frac{2}{3}$		
b)	$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-1}{x-1} = -\infty$		
c)	$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2-3x}{x^2-6x+9} = +\infty$		
d)	$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x^3-1) \left(\sqrt{\frac{x}{x^2-1}} \right) \right] = +\infty$		

Câu 6. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3) = +\infty$		
b)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = -\infty$		
c)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+2} = 0$		
d)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x}{x+3}} = 2$		

Câu 7. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	$\lim_{x \rightarrow 2^+} (\sqrt{x+2} - 1) = 1$		
b)	$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x-3}{x-1} = +\infty$		
c)	$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right) = -\infty$		
d)	$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{ x+1 }{x^2-1} = -\infty$		

Câu 8. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	$\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2x) = 4$		

b)	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 2x + 1}{x - 4} = \frac{13}{6}$		
c)	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 24}{x^2 - 9} = \frac{23}{6}$		
d)	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 - x - 14}{x^2 - 7x - 18} = \frac{9}{11}$		

Câu 9. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{4x} = \frac{1}{16}$		
b)	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{\sqrt{x+7} - 3} = -24$		
c)	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5} - 3}{\sqrt{x+2} - 2} = \frac{4}{3}$		
d)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{x - 1} = \frac{1}{3}$		

Câu 10. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 10x) = +\infty$		
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{2x^2 + x + 1} = \frac{3}{2}$		
c)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 3x}{2 - 3x} = \frac{5}{4}$		
d)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 + 3x^2 + 1} - x}{\sqrt{4x^2 - x + 2} + 3x} = 1$		

• **Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn**

Câu 1: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = -3$. Tìm các giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow 4} [g(x) - 3f(x)] \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2f(x) \cdot g(x)}{[f(x) + g(x)]^2}$$

a) b)

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & x \leq -1 \\ 3 - 2x^2, & x > -1 \end{cases}$$

Câu 2: Cho hàm số

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

Tìm các giới hạn và

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 1 \\ \sqrt{x^2 + a}, & x > 1 \end{cases}$$

Câu 3: Cho hàm số

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

Tìm giá trị của tham số a sao cho tồn tại giới hạn

Câu 4: Sử dụng định nghĩa, tìm các giới hạn sau:

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 3x) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x + 5} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - x}{2x + 1}$$

a) ; b) ; c)

Câu 5: Tìm các giới hạn sau:

$$\lim_{x \rightarrow -3} (8 + 3x - x^2) \quad \lim_{x \rightarrow 2} [(5x - 1)(2 - 4x)]$$

a) ; b) ;

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x}{(2x + 1)^2} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{10 - 2x^2}$$

c) ; d)

Câu 6: Mỗi giới hạn sau có tồn tại không? Nếu có, hãy tìm giới hạn đó.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{|x - 2|}$$

a) ; b)

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

Câu 7: Tính

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x - 1)^2}$$

Câu 8: Biết Tính

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) \sqrt{\frac{x+2}{1-x^2}}$$

Câu 9: Tính giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x - 1)$$

Câu 10: Tính

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 1)g(x)$$

Câu 11: Biết

. Tính

$$f(x) = \begin{cases} x + m & \text{nếu } x < 0, \\ x^2 - 1 & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$$

Câu 12: Cho hàm số

với m là tham số.

Biết hàm số $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi $x \rightarrow 0$. Tìm m .

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x > 1 \\ 2 & \text{nếu } x = 1 \\ 1 & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$$

Câu 13: Cho hàm số

Hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x \rightarrow 1$ không ?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{nếu } x > 3 \\ 3x^2 + 1 & \text{nếu } x \leq 3 \end{cases}$$

Câu 14: Tìm a để hàm số

có giới hạn khi $x \rightarrow 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - ax + 1}{x^2 - 3x + 2} = b$$

Câu 15: Tìm các số thực a và b sao cho

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x + 2}}{x}$$

Câu 16: Cho hàm số

. Tính:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad ; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)(1-x^2)(1-x^3)$$

Câu 17: Tính giới hạn

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 1} - 2m$$

Câu 18: Cho hàm số

với m là tham số.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

Biết , tìm giá trị của m .

Câu 19: Cho m là một số thực. Biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(m-x)(mx+1)] = -\infty$. Xác định dấu của m .

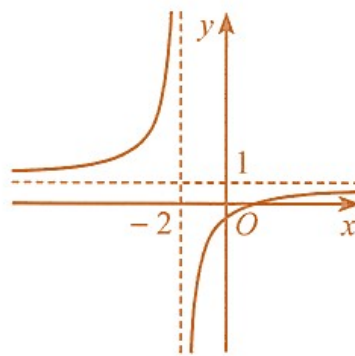
Câu 20: Cho hàm số $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$. Chứng minh rằng $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Câu 21: Cho $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$, chứng minh rằng:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} 3f(x) = 12$; b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{4} = 1$ c) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{f(x)} = 2$

Câu 22: Quan sát đồ thị hàm số ở Hình 2 và cho biết các giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$;

$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x)$.



Hình 2

Câu 23: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} (-4x^2 + 3x + 1)$ b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-4x + 1}{x^2 - x + 3}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{3x^2 + 5x + 4}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3 + \frac{4}{x}}{2x^2 + 3}$ e) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-3}{x - 2}$ g) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{5}{x + 2}$.

Câu 24: Cho $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 4}{x - 1} = 2$. Tính:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} 3f(x)$.

Câu 25: Cho số thực a và hàm số $f(x)$ thoả mãn $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 3}{2f(x) + 1} = \frac{1}{2}.$$

Chứng minh rằng:

Câu 26: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} [(3x+1)(2-x^2)]$; b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(4x+10)^2}{\sqrt{x^2-6x}}$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$ với $x \neq 1$. Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (nếu có).

Câu 28: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2g(x)] = 7$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x) + g(x)}{2f(x) - g(x)}$$

Tìm .

Câu 29: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x-2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x^3 - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{(x-2)^2}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x - 2}{x}$.

Câu 30: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x+2}{3x+1}$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+3}{3x^2+2x+5}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2+3}}{x+1}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2+3}}{x+1}$; e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 - 1}$ g) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{-x^2 + 2x + 15}{x^2 + 4x + 3}$.

Câu 31: Sử dụng định nghĩa, tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x}{x + 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 5x}{x^2 + 2}$.

Câu 32: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x + 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x - 1} - 1}{x - 2}$.

Câu 33: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 3}{2x^2 + 4}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x}}{x + 1}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 6x} - x)$

Câu 34: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 2x - 4)$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{2x - 1}$.

Câu 35: Tìm giá trị của các tham số a và b biết $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = 4$.

Câu 36: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{1 - x}$; c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$;
d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - \sqrt{x + 6}}{x + 2}$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x + 1} - 1}$; g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$.

Câu 37: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + 4}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 1}{(2x + 1)^2}$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 2x})$.

Câu 38: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2 - 1)$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2}{3x^2 + 1}$; c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 3}$

Câu 39: Tìm giá trị của các tham số a và b , biết rằng:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax+b}{x-2} = 5$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x}+b}{x-1} = 3$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>