



Chương

Bài 5.

PHÉP CHIẾU SONG SONG

A

Lý thuyết

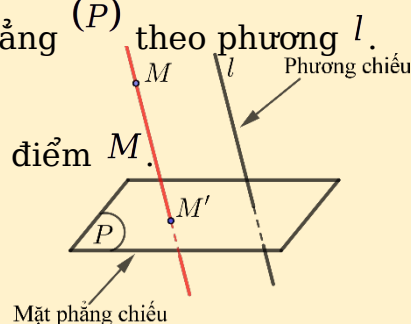
1. Phép chiếu song song.



Định nghĩa:

Cho mặt phẳng (α) và một đường thẳng l cắt (P) .

- » Với mỗi điểm M trong không gian, vẽ đường thẳng qua M và song song hoặc trùng với l .
- » Phép cho tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M' trong (P) được gọi là phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương l .
- ✱ **Trong đó:** Trên mặt phẳng (P) theo phương l :
 - ✓ Điểm M' được gọi là hình chiếu song song của điểm M .
 - ✓ Mặt phẳng (P) được gọi là mặt phẳng chiếu.
 - ✓ l gọi là phương chiếu



2. Tính chất của phép chiếu song song.



Tính chất:

- » Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.
- » Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- » Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành đường thẳng song song hoặc trùng nhau.
- » Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

3. Hình biểu diễn của một số hình không gian trên mặt phẳng.



Định nghĩa:

- » Hình biểu diễn của một hình H trong không gian là hình chiếu song song của H trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.



Chú ý

Dựa theo tính chất của phép chiếu song song, ta tuân theo các quy tắc khi vẽ hình:

- Nếu trên H có hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau) thì chúng được biểu diễn bằng hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau).
– $\rightarrow$ Tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng này phải **bằng** tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng tương ứng trên H .
- Nếu hình phẳng nằm trong mặt phẳng không song song với phương chiếu thì:
Hình biểu diễn của một *đường tròn* thường là một *elip*.
Hình biểu diễn của một *tam giác* (vuông, cân, đều) là một *tam giác*.
Hình biểu diễn của *hình vuông*, *hình chữ nhật*, *hình thoi*, *hình bình hành* là hình *bình hành*.



Các dạng bài tập

Dạng 1. Xác định ảnh qua phép chiếu song song



Phương

Dựa theo tính chất của phép chiếu song song, ta tuân theo các quy tắc khi vẽ hình:

- Nếu trên H có hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau) thì chúng được biểu diễn bằng hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau).

— $\rightarrow$ Tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng này phải **bằng** tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng tương ứng trên H .

- Nếu hình phẳng nằm trong mặt phẳng không song song với phương chiếu thì:

Hình biểu diễn của một đường tròn thường là một elip.

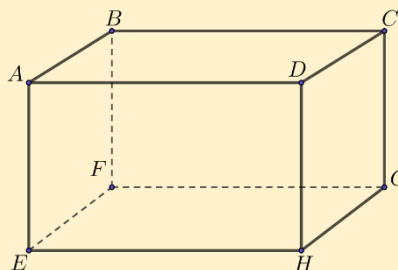
Hình biểu diễn của một tam giác (vuông, cân, đều) là một tam giác.

Hình biểu diễn của hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành là hình bình hành.



Ví dụ 1.1.

Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Xác định hình chiếu của điểm A trên mặt phẳng $(CDHG)$ theo phương BC và theo phương BG .



Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 1.2.

Cho lăng trụ $ABCA'B'C'$. Gọi M là trung điểm của AC . Tìm hình chiếu song song của điểm $C'M$ lên $(AA'B')$ theo phương chiếu CB ?

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



▮ Dạng 2. Xác định hình biểu diễn qua phép chiếu song song



Phương

Cho hình H trong không gian.

- Ta gọi tập hợp P' các ảnh M' của tất cả những điểm M thuộc H qua phép chiếu song song theo phương l là hình chiếu song song của H lên mặt phẳng (P) .
- Để tìm hình chiếu của một đường thẳng ta tìm hình chiếu của 2 điểm phân biệt trên đường thẳng, hình chiếu là đường thẳng đi qua hai điểm vừa tìm được.



Ví dụ 2.1.

Cho hình chóp $S.ABC$. I là trung điểm AB .

- (1) Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC . Tìm ảnh của $\triangle MNE$ trong phép chiếu song song trên (ABC) theo phương SC .
- (2) Tìm ảnh của tam giác MNE trong phép chiếu song song trên (ABC) theo phương trung tuyến SI của $\triangle SAB$.

🔑 Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 2.2.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi $O = AC \cap BD$ và $O' = A'C' \cap B'D'$. Điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Qua phép chiếu song song theo phương AO' lên mặt phẳng $(ABCD)$ xác định hình chiếu của tam giác

🔑 Lời giải



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Dạng 3. Bài toán tổng hợp



Ví dụ 3.1.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và CC' . Gọi D là đường thẳng đi qua M đồng thời cắt AN và $A'B$. Gọi I, J lần lượt là giao điểm của D với AN và $A'B$. Hãy tính tỉ số $\frac{IM}{IJ}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 3.2.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định các điểm M, N tương ứng trên các đoạn AC', BD' sao cho MN song song với BA' và tính tỉ số $\frac{MA}{MC'}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

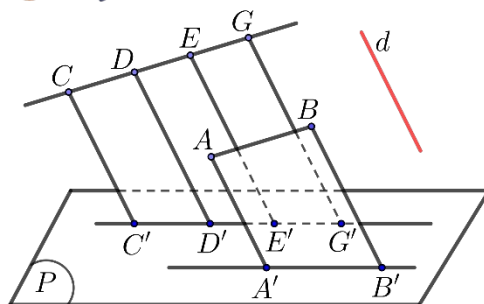
.....



Luyện tập

A. Câu hỏi - Trả lời trắc nghiệm

- » Câu 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hình chiếu của tam giác $A'B'C'$ theo phương $B'B$ lên mặt phẳng ABC là hình nào?
A. ADC . **B.** ADB . **C.** BCD . **D.** ABC .
- » Câu 2. Khẳng định nào sau đây đúng?
A. Hình chiếu song song của một hình chóp cắt có thể là một hình tam giác.
B. Hình chiếu song song của một hình chóp cắt có thể là một đoạn thẳng.
C. Hình chiếu song song của một hình chóp cắt có thể là một hình chóp cắt.
D. Hình chiếu song song của một hình chóp cắt có thể là một điểm.
- » Câu 3. Qua phép chiếu song song, tính chất nào không được bảo toàn?
A. Chéo nhau. **B.** Đồng quy. **C.** Thẳng hàng. **D.** Song song.
- » Câu 4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?
A. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.
B. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau thì song song.
C. Hình chiếu song song của hai một hình vuông là một hình vuông.
D. Hình chiếu song song của một lục giác đều là một lục giác đều.
- » Câu 5. Qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) , hai đường thẳng a và b có hình chiếu là hai đường thẳng song song a' và b' . Khi đó:
A. a và b phải song song với nhau.
B. a và b phải cắt nhau.
C. a và b có thể chéo nhau hoặc song song với nhau.
D. a và b không thể song song.
- » Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ACD . Hình chiếu G' của điểm G trên mặt phẳng (BCD) theo phương chiếu AB là:
A. Trọng tâm của tam giác BCD .
B. Trung điểm BC .
C. Trung điểm CD .
D. Trung điểm BI với I là trung điểm CD .
- » Câu 7. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. A' hình chiếu của A trên $(A'B'C')$ qua phép chiếu song song theo phương là đường thẳng nào?
A. CC' . **B.** CA' . **C.** CA' . **D.** BA' .
- » Câu 8. Trên hình bên dưới, ta có phép chiếu song song theo phương d và mặt phẳng chiếu (P) ; $AB \parallel CG$ và $AB = DG$; A', B', C', D', E', G' lần lượt là hình chiếu của A, B, C, D, E, G qua phép chiếu nói trên.



Khi đó, có bao nhiêu khẳng định đúng trong các mệnh đề sau

- (i) $\frac{DG}{AB} = \frac{D'G'}{A'B'} = 1$. (ii) $\frac{CD'}{D'E} = \frac{CD}{DE}$. (iii) $D'G' = A'B'$.
A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

» Câu 9. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Qua phép chiếu song song đường thẳng AA' mặt phẳng chiếu là $(A'B'C')$ biến G thành G' . Tìm mệnh đề **đúng**?

- A. G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$. B. G' là trung điểm của $A'B'$.
C. G' là trực tâm tam giác $A'B'C'$. D. G' là trung điểm của $B'C'$.

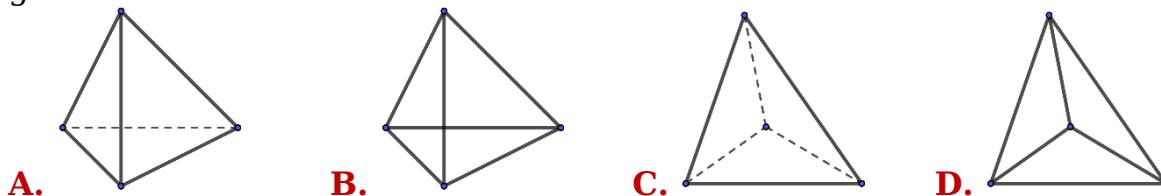
» Câu 10. Cho hình chóp $SABCD$ đáy là hình bình hành tâm O . Trên cạnh SB, SD lần lượt lấy điểm M, N sao cho $SM = 2MB$ và $SN = \frac{1}{3}SD$. Hình chiếu của M, N qua phép chiếu song song lên mặt phẳng chiếu $(ABCD)$ theo phương của đường thẳng SO lần lượt là P, Q . Tính tỉ số $\frac{OP}{OQ}$.

- A. 2. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{2}{3}$.

» Câu 11. Hình biểu diễn của hình chữ nhật trong không gian không thể là hình nào trong các hình sau?

- A. Hình thang B. Hình bình hành C. Hình chữ nhật
D. Hình thoi

» Câu 12. Trong không gian, hình nào không phải là hình biểu diễn của hình chóp tam giác?



» Câu 13. Hình biểu diễn của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ lên $(BC'D')$ theo phương AB là:
A. Một tam giác. B. Một hình bình hành
C. Một ngũ giác. D. Một lục giác.

» Câu 14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hình biểu diễn của $DA'C'D'$ qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương $A'B$ là

- A. Một tam giác ABC .
B. Một tam giác BCI , với I là điểm sao cho C là trung điểm của DI .
C. Một tam giác ACD .



D. Một tam giác DCM , với M là điểm sao cho C là trung điểm của BM .

» **Câu 15.** Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD$, $AB = 3CD$. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm SB, SC và K là giao điểm của đường

thẳng SD với mặt phẳng (AMN) . Tính tỷ số $\frac{SK}{SD}$.

A. $\frac{SK}{SD} = \frac{3}{5}$.

B. $\frac{SK}{SD} = \frac{1}{2}$.

C. $\frac{SK}{SD} = \frac{4}{7}$.

D. $\frac{SK}{SD} = \frac{2}{3}$.

B. Câu hỏi - Trả lời Đúng/sai

» **Câu 16.** Xét tính đúng/sai của các mệnh đề sau?

	Mệnh đề	Đúng g	Sai
(a)	Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng cắt nhau.		
(b)	Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự giữa các điểm.		
(c)	Cho mặt phẳng (P) , đường thẳng l cắt (P) và điểm M không nằm trên đường thẳng l . Gọi điểm M' là ảnh của điểm M lên mặt phẳng (P) theo phương chiếu l của phép chiếu song song. Khi đó MM' song song l .		
(d)	Phép chiếu song song làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.		

» **Câu 17.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xét phép chiếu song song theo phương chiếu AA' .

	Mệnh đề	Đúng g	Sai
(a)	Hình chiếu của C' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là C .		
(b)	Hình chiếu của B lên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ là A' .		
(c)	Gọi O và O' lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Hình chiếu của O lên mặt phẳng $(ABCD)$ là O' .		
(d)	Hình chiếu của AC lên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ là $A'C'$.		

» **Câu 18.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Xét các mệnh đề sau:

	Mệnh đề	Đúng g	Sai
(a)	Hình chiếu của C lên $(A'B'C')$ theo phương chiếu DA' trong phép chiếu song song là điểm C' .		
(b)	Gọi O và O' lần lượt là tâm của $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Hình chiếu của điểm A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ theo phương chiếu OO' trong phép chiếu song song là điểm A' .		
(c)	Gọi I và I' lần lượt là trung điểm của AB và $A'B'$. Hình chiếu		



)	của I lên mặt phẳng $(A'B'C')$ theo phương chiếu AI' trong phép chiếu song song là điểm A' .		
(d))	Gọi G là trọng của $DABC$. Gọi G' là hình chiếu của G lên $(A'B'C'D')$ theo phương chiếu II' trong phép chiếu song song. Khi đó G' là trọng tâm $DA'B'C'$.		

» Câu 19. Cho hình lăng trụ $ABCA'B'C'; I$ và I' lần lượt là trung điểm của đoạn AB và $A'B'$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a))	$AI' // IB'$		
(b))	Hình chiếu song song của I trên mặt phẳng $(A'B'C')$ phương AI là điểm C' .		
(c))	Trong $(A'B'C')$, vẽ hình bình hành $A'CM'I'$. Suy ra $ACMI'$ là hình bình hành.		
(d))	$DMAA'$ là hình chiếu song song của $DCAA'$ theo phương AI' trên $(A'B'C')$		

» Câu 20. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a))	$ADCB'$ là hình bình hành		
(b))	Hình chiếu song song của A lên mặt phẳng $(BCC'B')$ qua phép chiếu song song theo phương của đường thẳng CD là B'		
(c))	Hình chiếu song song của $DABD'$ trên mặt phẳng $(BCC'B')$ qua phép chiếu song song theo phương của đường thẳng CD' là $\triangle BB'C'$		
(d))	Hình chiếu của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ lên mặt phẳng (BCD) theo phương AB là một hình tam giác		

C. Câu hỏi - Trả lời ngắn

» Câu 21. Số mệnh đề nào trong các mệnh đề sau

- (a) Phép chiếu song song biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- (b) Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng cắt nhau.
- (c) Phép chiếu song song biến tam giác đều thành tam giác cân.
- (d) Phép chiếu song song biến hình vuông thành hình bình hành.

👉 Điền đáp số:



» **Câu 22.** Cho tứ diện $ABCD$, M là trọng tâm của tam giác ABC . Gọi N là hình chiếu song song của điểm M theo phương CD lên mặt phẳng (ABD) . Khi đó $\frac{EN}{ED}$ bằng bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trăm)

👉 **Điền đáp số:**

» **Câu 23.** Cho hình chóp $SABCD$ đáy là hình bình hành tâm O . Trên cạnh SB, SD lần lượt lấy điểm M, N sao cho $SM = 2MB$ và $SN = \frac{1}{3}SD$. Hình chiếu của M, N qua phép chiếu song song đường thẳng SO lên mặt phẳng chiếu $(ABCD)$ lần lượt là P, Q . Tính tỉ số $\frac{OP}{OQ}$.

👉 **Điền đáp số:**

» **Câu 24.** Cho hình lăng trụ $ABCA'B'C'$, gọi I là trung điểm AB . Gọi S, S' lần lượt là diện tích của tam giác $DABC$ và hình chiếu của tam giác $AA'C'$ lên mặt phẳng $(A'B'C')$ theo phương IB' . Khi đó tỉ số $\frac{S'}{S}$ bằng

👉 **Điền đáp số:**

» **Câu 25.** Cho hình chóp $SABCD$ đáy là hình vuông tâm O cạnh 2. Trên cạnh SB, SD lần lượt lấy điểm M, N sao cho $SM = 2MB$ và $SN = \frac{1}{3}SD$. Diện tích hình chiếu song song của tam giác $DAMN$ lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương của đường thẳng SO bằng

👉 **Điền đáp số:**

» **Câu 26.** Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình bình hành, trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $MA = 2MS$. Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$. Một phép chiếu song song theo phương MO lên mặt phẳng $(ABCD)$ biến điểm S thành điểm N . Tỉ số $\frac{CN}{CA}$ bằng

👉 **Điền đáp số:**

----- Hết -----