

Người làm: Khổng Hồng Hoa

Zalo: Khổng Hồng Hoa

- số đt zalo: 0385921891.

Email: hoa85ty@gmail.com.

CD12: NGUYÊN LÝ DIRICHLET

Dạng 2. Sử dụng trong bài toán về tính chất các phần tử trong tập hợp.

Câu 1. (HSG 7, trường TRƯỜNG THCS LÝ TỰ TRỌNG 2018-2019)

Trong một bảng ô vuông gồm có 5×5 ô vuông, người ta viết vào mỗi ô vuông chỉ một trong 3 số $1; 0; -1$. Chứng minh rằng trong các tổng của 5 số theo mỗi cột, mỗi hàng, mỗi đường chéo phải có ít nhất hai tổng số bằng nhau.

Lời giải

Ta có 5 cột, 5 hàng và 2 đường chéo nên sẽ có 12 tổng

Mỗi ô vuông chỉ nhận một trong 3 số $1; 0$ hoặc -1 nên mỗi tổng chỉ nhận các giá trị từ -5 đến 5 .

Ta có 11 số nguyên từ -5 đến 5 là $-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5$.

Vậy theo nguyên lý Dirichle phải có ít nhất hai tổng bằng nhau (đpcm).

Câu 2. Cho 100 số hữu tỉ trong đó tích của bất kỳ ba số nào cũng là một số âm. Chứng minh rằng tất cả 100 số đó đều là số âm.

Lời giải

Trong 100 số đã cho, phải có ít nhất một số âm (vì nếu cả 100 số đều dương thì tích của 3 số bất kỳ không thể là một số âm).

Ta tách riêng số âm đó ra, 99 số còn lại chia thành 33 nhóm, mỗi nhóm 3 thừa số

Theo đề bài, mỗi nhóm đều có tích là một số âm nên tích của 33 nhóm là số âm, tức là tích của 99 số là một số âm

Nhân số âm này với số âm đã tách riêng từ đầu ta được tích của 100 số là một số dương

Sắp xếp 100 số đã cho theo thứ tự tăng dần, chẳng hạn:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_{100}$$

Các số này đều khác 0 (vì nếu có 1 thừa số bằng 0 thì tích của nó với hai thừa số khác cũng bằng 0, trái với đề bài)

Xét tích $a_{98} \cdot a_{99} \cdot a_{100} < 0 \Rightarrow a_{98} < 0$ (vì nếu $a_{98} > 0$ thì $a_{99} > 0, a_{100} > 0$, tích của ba số này không thể là một số âm).

Vậy $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{98}$ là các số âm.

Xét tích: $a_1 \cdot a_2 \cdot a_{99} < 0$ mà $a_1 a_2 > 0$ nên $a_{99} < 0$.

Xét tích: $a_1 \cdot a_2 \cdot a_{100} < 0$ mà $a_1 a_2 > 0$ nên $a_{100} < 0$.

Vậy tất cả 100 số đã cho đều là số âm.

BÀI TẬP LÀM THÊM

Dạng 1: Dạng toán chia hết

Bài 1. Cho dãy số gồm 5 số tự nhiên bất kì a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 . Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho 5 hoặc tổng của một số số liên tiếp trong dãy đã cho chia hết cho 5 .

Lời giải:

Ta sẽ thành lập dãy số mới gồm 5 số sau đây:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

Nếu một trong các số $S_i (i=1;2;3;4;5)$ chia hết cho 5 thì bài toán đã được chứng minh.

Nếu không có số nào chia hết cho 5 thì khi đem chia các số S_i cho 5 sẽ được số dư có giá trị từ 1 đến 4 . Có 5 số dư mà chỉ có 4 giá trị (5 thỏ, 4 lông). Theo nguyên tắc Dirichlê ít nhất phải có 2 số dư có cùng giá trị. Hiệu của chúng chia hết cho 5 . Hiệu này chính là tổng các a_i liên tiếp nhau hoặc là a_i nào đó.

Bài 2. Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên gồm toàn chữ số 1 chia hết cho 2016 .

Lời giải:

Xét 2017 số có dạng $1; 11; \dots; 11\dots111; 11\dots11$. Theo nguyên tắc Dirichlê thì tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 2016 .

Giả sử hai số đó là: $A = 11\dots1$ (n chữ số 1); $B = 11\dots1$ (k chữ số 1) (với $k < n$)

Khi đó $A - B = 11\dots1.10^k$ ($n - k$ chữ số 1)

$A - B$ chia hết cho 2016 . Do $(2016; 10^k) = 1$

Nên $C = 11\dots1$ ($n - k$ chữ số 1) chia hết cho 2016 .

Dạng 3: Sử dụng trong một số bài toán thực tế

Bài 1. Một lớp học có 40 học sinh. Chứng minh rằng có ít nhất 4 học sinh có tháng sinh giống nhau.

Lời giải :

Một năm có 12 tháng. Ta phân chia 40 học sinh vào 12 tháng đó. Nếu mỗi tháng có không quá 3 học sinh được sinh ra thì số học sinh không quá: $3.12 = 36$ mà $36 < 40$.

Vậy tồn tại một tháng có ít nhất 4 học sinh trùng tháng sinh

Bài 2. Có 10 đội bóng thi đấu với nhau trong một giải, mỗi đội phải đấu một trận với các đội khác. Chứng minh rằng vào bất cứ lúc nào cũng có hai đội đã đấu số trận như nhau.

Lời giải :

Rõ ràng nếu trong 10 đội bóng có 1 đội chưa đấu một trận nào thì trong các đội còn lại không có đội nào đã thi đấu 9 trận.

Như vậy 10 đội chỉ có số trận đấu hoặc từ 0 đến 8 hoặc từ 1 đến 9 . Vậy theo nguyên lý Dirichlê phải có ít nhất 2 đội đã đấu số trận đấu như nhau. (Đội chưa đấu trận nào, số trận bằng 0)

Bài 3. Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra không có ai bị điểm dưới 2 , chỉ có 2 học sinh được điểm 10 . Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên từ 0 đến 10).

Lời giải :

Vì trong lớp có 45 học sinh làm bài kiểm tra không có ai bị điểm dưới 2 và có 2 học sinh được 10 điểm nên có $^{45} - 2 = 43$ học sinh còn lại có số điểm từ 2 đến 9 điểm.

Như vậy có 43 học sinh phân chia vào 8 loại điểm (từ 2 đến 9). Giả sử mỗi loại trong 8 loại điểm đều là điểm của không quá 5 học sinh thì lớp học có không quá $^{5.8} = 40$ học sinh, ít hơn 43 học sinh. Vậy tồn tại ít nhất 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau.

Bài 4. Một đồi thông có 800000 cây thông. Trên mỗi cây thông có không quá 500000 chiếc lá. Chứng minh rằng ít nhất cũng có 2 cây thông có cùng số lá như nhau trên cây.

Lời giải :

Ta hãy tưởng tượng mỗi cây thông là một "thỏ", như vậy có 800000 "thỏ" được nhốt vào không quá 500000 "chiếc lồng". Lồng 1 ứng với cây thông có một chiếc lá trên cây, lồng 2 ứng với cây thông có 2 chiếc lá trên cây v.v...

Số thỏ lớn hơn số lồng, theo nguyên tắc Dirichlê ít nhất có 1 lồng nhốt không ít hơn 2 thỏ nghĩa là có ít nhất 2 cây thông có cùng số lá.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>