**Ví dụ 2.** Giải phương trình 

- Phân tích. Đặt  

Ta tìm mối liên hệ giữa các ẩn phụ:

  , hay: 

Từ đó ta cần giải quyết hệ phương trình:

  

 (do )

Ở phương trình này chúng ta cần chú ý đến lợi thế 

**Lời giải**

Điều kiện  Đặt 

Từ đó ta có hệ:



(do )

Với , cho ta . Thử lại ta thấy nghiệm của phương trình đã cho là .

**- Bình luận.**

- Phương pháp dùng nhiều ẩn phụ đặc biệt hiệu quả với những phương trình chứa nhiều căn thức mà biểu thức dưới dấu căn thức là bậc nhất, đơn giản vì một nhị thức bậc nhất bất kỳ luôn biểu diễn được qua hai nhị thức bậc nhất khác.

- Chúng ta cũng cần lưu ý với những phương tình như trên được cho dưới dạng bậc nhất trá hình, ví dụ:

1) Giải phương trình: 

Thực ra phương trình này cũng giống ví dụ 1, nhưng đã được thay x bởi 

2) Giải phương trình: 

Thực ra phương trình này cũng giống với với dụ 2, nhưng đã được thay x bởi 

- Tóm lại: Khi chúng ta quyết định sử dụng nhiều ẩn phụ cho việc giải phương trình vô tỷ, chúng ta cần đảm bảo rằng sẽ tìm được một biểu thức liên hệ giữa các ẩn phụ đó. Việc giải quyết phương trình nhiều ẩn phụ tùy thuộc vào mức độ khó dễ của bài toán được cho.

**Ví dụ 3.** Giải phương trình 

**Lời giải**

Điều kiện  Đặt   

Từ đó ta có hệ:

  

Suy ra: 





(do )

Với , ta có: 

 

Thử lại ta thấy, nghiệm của phương trình đã cho là 

**- BÀI TẬP RÈN LUYỆN.**

**Bài 1.** Giải phương trình  Đáp số: 

**Bài 2.** Giải phương trình  Đáp số:  

**Bài 3.** Giải phương trình  Đáp số: 

**Bài 4.** Giải phương trình  Đáp số:  , 

**Bài 5.** Giải phương trình  Đáp số: 

**Bài 6.** Giải phương trình  Đáp số: 

**Bài 7.** Giải phương trình  Đáp số: 

**Bài 8.** Giải phương trình  Đáp số: 

**Bài 9.** Giải phương trình  Đáp số: 

**4. Vận dụng các hằng đẳng thức trong giải phương trình vô tỷ.**

Nhắc đến đại số người ta thường nghĩ ngay tới những hằng đẳng thức đáng nhớ, hằng đẳng thức theo suốt chiều dài toán học từ bậc THCS. Với phương trình vô tỷ, dáng dấp của hằng đẳng thức đáng nhớ trải đều khắp nơi, tuy nhiên trong mục này ta nhắc đến sự vận dụng linh hoạt các hằng đẳng thức để mang đến một cách nhìn tuy không mới nhưng chưa hẳn đã quen!

**Ví dụ 1.** Giải phương trình 

**Lời giải**

Điều kiện  Phương tình đã cho tương đương với:

 

 

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất 

**- Nhận xét.**

- Với cách làm này, bài toán được giải quyết một cách ngắn gọn, đẹp mắt và tự nhiên.

- Nếu đặt  , ta nhận thấy rằng thực ra phương trình trên được khai triển từ hằng đẳng thức .

**Bài tập tương tự.**

1) Giải phương trình 

2) Giải phương trình 

3) Giải phương trình 

**Ví dụ 2.** Giải phương trình 

**Lời giải**

Điều kiện  Phương trình đã cho tương đương với:



Đặt  . Phương trình đã cho trở thành

  .

Thay trở lại ta có phương trình 





 

Do 

- Kết luận. Nghiệm của phương trình đã cho là 

**- Nhận xét.** Thực ra bài toán được khai triển từ hằng đẳng thức

 với  ; .

**Bài tập tương tự.**

1) Giải phương trình  KQ. .

2) Giải phương trình  KQ. 

**Ví dụ 3.** Giải phương trình 

(Chọn ĐT dự thi VMO 2013 – Lương Thế Vinh, Đồng Nai).

**Lời giải**

Điều kiện . Đặt  . Phương trình đã cho trở thành



  

Thay trở lại ta có  

 

 Do  

Kết luận. Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất 

**- Nhận xét.** Ta nhận thấy rằng, bản chất thực sự của bài toán là quá trình khai triển hằng đẳng thức  với  

**Bài tập tương tự.**

1) Giải phương tình  KQ.

2) Giải phương trình  KQ. .

**Ví dụ 4.** Giải phương trình 

**Lời giải**

Điều kiện  Phương trình đã cho tương đương với:



 

+ Với , ta có:



 

 Do , 

+ Với , ta có:

 vô nghiệm, do

 , 

Kết luận. Phương trình có nghiệm duy nhất là 

**- Nhận xét.** Ta nhận thấy rằng, bản chất thực sự của bài toán là quá trình khai triển hằng đẳng thức  với  

**Bài tập tương tự.**

1) Giải phương trình  Đáp số: 

2) Giải phương trình . Đáp số: 

**Ví dụ 5.** Giải phương trình 

**Lời giải**

Điều kiện  . Phương trình đã cho trở thành:

 



Thay trở lại ta có: 



 

  Do 

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là 

**- Nhận xét.** Ta nhận thấy rằng, bản chất thực sự của bài toán là quá trình khai triển hằng đẳng thức  với  

**Bài tập tương tự**

1) Giải phương trình  KQ. 

2) Giải phương trình  KQ.

**- Bình luận.**

Qua các ví dụ trên, ta có thể nhận thấy rằng một bài toán với lời giải sử dụng hằng đẳng thức luôn cho những điều bất ngờ và thú vị.

- Một bài toán tưởng chừng rất khó, lại được giải quyết một cách đơn giản và tự nhiên từ việc đoán nhận rằng phương trình đó được triển khai từ hằng đẳng thức. Nhưng cũng có những bài toán nhìn rất khó với cách làm này lại được giải một cách đơn giản bằng một phương pháp khác.

- Tuy nhiên khi sử dụng khai triển hằng đẳng thức để “chế đề” ta có thể gửi gắm được nhiều ý đồ giải toán trong đó. Và chung quy lại, một bài toán nói riêng và một phương trình vô tỷ nói chung thường có nhiều cách giải quyết (Chúng ta sẽ tìm hiểu thêm ở chương 2) và để giải quyết nó chúng ta cần có những cái nhìn bao quát nhất về các phương pháp giải toán.

**D. PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ**

Khi đoán biết được một số nghiệm của một phương trình vô tỷ, cũng như so sánh được các đại lượng ở hai vế của phương trình đó. Ta thường lựa chọn phương pháp đánh giá để giải quyết phương trình.

Một bài toán phương trình vô tỷ được giải bằng phương pháp đánh giá thường cho ta một lời giải bất ngờ, đẹp mắt và thể hiện được tư duy linh hoạt của người giải toán. Sau đây là một số kỹ năng cần thiết giúp chúng ta cùng nhìn nhận phương pháp đánh giá một cách gần gũi hơn.

**1. Làm chặt miền nghiệm để đánh giá.**

**Ví dụ 1.** Giải phương trình 

**- Phân tích.**

- Do , là một nghiệm của phương trình. Nên khi đó: 

- Ta viết lại phương trình thành 

- Ta tìm nghiệm chung của các hệ bất phương trình:

+   

+   

**- Như vậy:**

+ Nếu thì  hay (\*) vô nghiệm.

+ Nếu  thì hay (\*) vô nghiệm.

Hay phương trình (\*) có nghiệm duy nhất 

**Lời giải**

Điều kiện .

Phương trình đã cho tương đương với: 

+ Nhận thấy  là nghiệm của phương trình (\*).

+ Xét các hệ bất phương trình:

- 

- 

Suy ra:

+ Nếu thì hay (\*) không có nghiệm 

+ Nếu thì hay (\*) không có nghiệm 

Vậy PT có nghiệm duy nhất là 

**Ví dụ 2.** Giải phương trình 

**Lời giải**

Điều kiện 

Phương trình đã cho tương đương với: 

+ Nhận thấy  là nghiệm của phương trình (\*).

+ Xét các hệ bất phương trình:

-   

-   

Suy ra:

+ Nếu  thì  hay (\*) không có nghiệm 

+ Nếu  thì  hay (\*) không có nghiệm 

Vậy PT có nghiệm duy nhất 

**Ví dụ 3.** Giải phương trình 

**Lời giải**

Điều kiện 

+ Nhận thấy  là nghiệm của phương trình (\*).

+ Xét các hệ bất phương trình:

-    

-  

Suy ra:

+ Nếu , ta có:

VT 

VP (\*) hay (\*) không có nghiệm 

+ Nếu , ta có:

VT 

VP (\*) hay (\*) không có nghiệm 

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất 