|  |  |
| --- | --- |
| **TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN**  **TP ĐÀ NẴNG**  **ĐỀ THI ĐỀ XUẤT** | **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI**  **KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG**  **BẮC BỘ LẦN THỨ XIV - NĂM HỌC 2022 - 2023**  **MÔN TOÁN – KHỐI 11**  Thời gian: 180 phút (*không kể thời gian giao đề)* |

**Bài 1** (5,0 *điểm*)

Cho  và hàm số 

a) Chứng minh dãy số  xác định bởi



có giới hạn hữu hạn.

b) Tồn tại hay không các số thực  thỏa  đồng thời dãy số  xác định bởi



có giới hạn là số khác 0?

**Bài 2** (4,0 *điểm*)

Tìm tất cả các hàm số  thỏa mãn



**Bài 3** (5,0 *điểm*)

Cho tam giác  nhọn không cân, nội tiếp đường tròn  và có đường cao  Gọi  là điểm di động trên cung nhỏ  ( khác ). Đường thẳng qua  và song song với  và cắt đường tròn  tại điểm thứ hai là  Đường tròn đường kính  cắt  lần lượt tại  Đường tròn đường kính  cắt  lần lượt tại  Chứng minh tiếp tuyến chung ngoài của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác  và  luôn đi qua một điểm cố định.

**Bài 4** (3,0 *điểm*)

Cho dãy số  xác định bởi



a) Chứng minh  là số nguyên với mọi số nguyên dương 

b) Chứng minh tồn tại vô hạn số nguyên tố  sao cho  chia hết cho 

**Bài 5** (3,0 *điểm*)

Cho số nguyên tố  có bao nhiêu bộ  với  thỏa mãn

 ?

**--Hết--**

**HƯỚNG DẪN ĐÁP ÁN**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Bài** | **Ý** | **Nội dung** | **Điểm** |
| **1** | a | Xét  với . Ta có  với mọi  Do , vàliên tục trên  nên phương trình  có nghiệm  duy nhất. | 1,0 |
|  |  | Nhận xét với mọi  và  với mọi  nên với mọi  áp dụng định lí Lagrange cho hàm số  . Ta có  Vì  nên , do đó | 1,0 |
|  | b | Bổ đề: Cho dãy số  xác định bởi  Khi đó  Chứng minh. Xét hàm số  với  Khi đó,  liên tục trên  nên với mọi số nguyên dương , áp dụng định lý Lagrange trên các đoạn thì tồn tại  để    Đánh giá trên đúng với mọi  nên    hay , từ đó bổ đề được chứng minh. | 1,0 |
|  |  | Trở lại bài toán, giả sử  có giới hạn bằng  Đặt  Tồn tại số nguyên dương  sao cho  hay . Vậy với mọi  thì .  Theo bổ đề, suy ra | 1,0 |
|  |  | Mặt khác, đặt  đồng thời chú ý rằng  và  Với mọi  thì    Điều này dẫn đến mâu thuẫn.  Trong trường hợp  thì ta cũng tìm được mâu thuẫn bằng cách thay bởi  Vậy không tồn tại các số thực  thỏa yêu cầu bài toán. | 1,0 |
| **2** |  | Ký hiệu  TH1.  là hàm hằng thì  TH2.  không phải hàm hằng  Thay  được , vì  không phải hàm hằng nên  Giả sử tồn tại  để  thì thay  vào ta được  Nếu  thì  với mọi  Khi đó  Cho  vào phương trình trên suy ra : mâu thuẫn  Vậy  hay | 1,0 |
|  |  | +Chứng minh  đơn ánh. Giả sử tồn tại các số thực  sao cho  Nếu  thì  Nếu  thì lần lượt thay  và  suy ra    Vậy hay  đơn ánh. | 1,0 |
|  |  | +Chứng minh  lẻ . Thay  suy ra  hay  Thay  thì  (2)  Do đó  là hàm chẵn. Thay  ta được  Thay  bởi  và  được  Hay  Suy ra  Vậy , suy ra  lẻ | 1,0 |
|  |  | Từ (2), suy ra , nên từ  ta có  Hoán đổi vai trò :    Vì vậy với  thì  nên    Vì  lẻ nên . KL | 1,0 |
| **3** |  |  |  |
|  |  | Gọi  theo thứ tự là trung điểm  Ta có các bộ điểm ,  cùng thuộc một đường tròn và các tam giác  đồng dạng ngược hướng. Do đó    Vậy các điểm thuộc một đường tròn.  Vì  và  nên theo định lí Thales đảo  Do đó  vuông góc  Vậy  là trung trực  Tương tự  là trung trực của  Vậy  là tâm đường tròn qua các điểm | 1,0 |
|  |  |  |  |
|  |  | Gọi  theo thứ tự là tâm và bán kính các đường tròn   là các giao điểm  và  là trực tâm tam giác ;  là giao điểm của  và  theo thứ tự là giao điểm của  và ;  là tâm đường tròn  Ta có    nên kết hợp với  suy ra  thuộc đường tròn  Vậy  là trung trực  (1) | 1,0 |
|  |  | Do đó  theo thứ tự là trung điểm . Kết hợp  là trung điểm HG (kết quả quen thuộc) suy ra .  Kết hợp  suy ra  Gọi  theo thứ tự là trung điểm của  (2).  Từ (1) và (2) suy ra tâm đường tròn Euler của tam giác  nằm trên  và  là trung trực  (3) | 1,0 |
|  |  | Ta có  là dây cung chung của các đường tròn  và ;  là dây cung chung của các đường tròn  và  nên  . Suy ra    Vậy  thuộc đường tròn  (đường tròn Euler của tam giác ) (4) | 1,0 |
|  |  | Từ (3), (4) suy ra  Kết hợp  suy ra  là phân giác của góc tạo bởi  Theo tính chất đường phân giác    Suy ra  theo thứ tự là tâm vị tự trong và tâm vị tự ngoài của các đường tròn  nên cố định. Nói riêng tiếp tuyến chung ngoài của các đường tròn  và  luôn đi qua điểm cố định. | 1,0 |
| **4** | a | Đặt  thì    Khi đó  và chứng minh quy nạp được  với mọi  Vậy  nên  là số nguyên với mọi số nguyên dương | 1,0 |
|  | b | Nhận xét. Với mọi số nguyên tố  thì  Chứng minh  Ta chứng minh  Ta có  Hệ  thu gọn theo modunlo  nên | 1,0 |
|  |  | Ta cũng có    Nên  Do đó,    Vậy nhận xét được chứng minh  Do đó với mọi số nguyên tố  thì | 1,0 |
| **5** |  | Biến đổi  Đặt  và  thì  (1),  TH1. Nếu  thì từ , ta có  Nếu  thì  Vậy , mâu thuẫn vì  Do vậy . Khi đó , tức có  bộ thỏa. | 1,0 |
|  |  | TH2. Nếu  thì  là thặng dư bình phương modunlo  nên phương trình  có hai nghiệm  và  theo modunlo  Khi đó , suy ra  hoặc  Nếu  thì , nên có  bộ thỏa.  Nếu  thì , nên có  bộ thỏa | 1,0 |
|  |  | Giả sử tồn tại bộ  thỏa đồng thời  và  thì  Do  nên , do đó , tức có  bộ như thế. Vậy trường hợp này có  bộ thỏa. | 1,0 |