**CHỦ ĐỀ CÂU 42: SỐ PHỨC**

**ĐỀ GỐC**

1. Có bao nhiêu số phức $z$ thóa mãn $|z|=\sqrt{2}$ và $(z+2i)(\overbar{z}-2)$ là số thuần ảo?

**A.** 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 4

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $z=x+yi$, ta có $\left|z\right|=\sqrt{2}⇒x^{2}+y^{2}=2\left(1\right)$ .

Mặt khác: $w=\left(z+2i\right)\left(\overline{z}-2\right)=z.\overline{z}-2z+2i.\overline{z}-4i$

 $=2-2\left(x+yi\right)+2i\left(x-yi\right)-4i=\left(2-2x+2y\right)+\left(2x-2y-4\right)i$

$w$ là số thuần ảo $⇒\left\{\begin{matrix}2-2x+2y=0\\2x-2y-4\ne 0\end{matrix}\right.⇒\left\{\begin{matrix}x-y-1=0\left(2\right)\\x-y-2\ne 0\left(3\right)\end{matrix}\right.$ .

Từ (2) suy ra $y=x-1$, thế vào (1) có $x^{2}+\left(x-1\right)^{2}=2⇔2x^{2}-2x-1=0$

Giải hệ (1) và (2) ta được hai nghiệm phân biệt, hai nghiệm này thảo mãn (3).

Vậy có 2 số phức $z$ thỏa mãn.

**ĐỀ PHÁT TRIỂN**

**PT 42.1.** Hỏi có bao nhiêu số phức $z$ thỏa đồng thời các điểu kiện $\left|z-i\right|=5$ và $z^{2}$ là số thuần ảo?

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $z=x+yi $( với $x,y\in ¡$).

Ta có $\left|z-i\right|=5⇔x^{2}+\left(y-1\right)^{2}=25 \left(\*\right)$

$z^{2}$ là số thuần ảo, suy ra $x^{2}-y^{2}=0⇔\left[\begin{matrix}x=y\\x=-y\end{matrix}\right.$

Với $x=y$ thay vào $\left(\*\right)$ ta được $x^{2}+\left(x-1\right)^{2}=25⇔2x^{2}-2x-24=0⇔\left[\begin{matrix}x=4\\x=-3\end{matrix}\right.$

Với $x=-y$ thay vào $\left(\*\right)$ ta được $x^{2}+\left(x+1\right)^{2}=25⇔2x^{2}+2x-24=0⇔\left[\begin{matrix}x=-4\\x=3\end{matrix}\right.$.

Vậy có 4 số phức cần tìm là $4+4i, -3-3i, -4+4i, 3-3i.$

**PT 42.2.** Có bao nhiêu số phức $z$ thỏa mãn $\left|z\right|^{2}=2\left|z+\overline{z}\right|+4$ và $\left|z-1-i\right|=\left|z-3+3i\right|$?

**A.** $4$. **B.** $3$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi $z=a+bi, ​a,b\in R$. Khi đó theo giả thiết ta có hệ.

$$\begin{matrix}\left\{\begin{matrix}a^{2}+b^{2}=2\left|2 a\right|+4\\\sqrt{\left(a-1\right)^{2}+\left(b-1\right)^{2}}=\sqrt{\left(a-3\right)^{2}+\left(b+3\right)^{2}}\end{matrix}\right.⇔\left\{\begin{matrix}a^{2}+\left(\frac{a-4}{2}\right)^{2}=4\left|a\right|+4\\b=\frac{a-4}{2}\end{matrix}\right.\\⇔\left\{\begin{matrix}5a^{2}-8a=16\left|a\right|\\b=\frac{a-4}{2}\end{matrix}\right.⇔\left[\begin{matrix}a=0, b= -2\\a = \frac{24}{5}, b = \frac{2}{5}\\a =-\frac{8}{5}, b = -\frac{14}{5}\end{matrix}\right.\end{matrix}$$

Vậy có $3$ số phức $z$ thỏa mãn.

**PT 42.3.** Cho số phức $z$ có phần thực là số nguyên và $z$ thỏa mãn $\left|z\right|-2\overline{z}=-7+3i+z$. Tính mô đun của số phức $w=1-z+z^{2}$ bằng

**A.** $\left|w\right|=\sqrt{37}$. **B.** $\left|w\right|=\sqrt{457}$. **C.** $\left|w\right|=\sqrt{425}$. **D.** $\left|w\right|=\sqrt{445}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $z=a+bi,\left(a\in ¢, b\in ¡\right)$.

Ta có: $\left|z\right|-2\overline{z}=-7+3i+z⇔\sqrt{a^{2}+b^{2}}-2\left(a-bi\right)=-7+3i+a+bi⇔\sqrt{a^{2}+b^{2}}-3a+7+\left(b-3\right)i=0⇔\left\{\begin{matrix}\sqrt{a^{2}+b^{2}}-3a+7=0\\b-3=0\end{matrix}\right.$

$⇔\left\{\begin{matrix}\sqrt{a^{2}+9}=3a-7\\b=3\end{matrix}\right.⇔\left\{\begin{matrix}a\geq \frac{7}{3}\\a^{2}+9=9a^{2}-42a+49\\b=3\end{matrix}\right.⇔\left\{\begin{matrix}a\geq \frac{7}{3}\\\left[\begin{matrix}a=4\left(N\right)\\a=\frac{5}{4}\left(L\right)\end{matrix}\right.\\b=3\end{matrix}\right.⇔\left\{\begin{matrix}b=3\\a=4\end{matrix}\right.$.

Vậy $z=4+3i⇒w=1-z+z^{2}=4+21i⇒\left|w\right|=\sqrt{457}$.

**PT 42.4.** Cho số phức $z=\left(\frac{2+6i}{3-i}\right)^{m}, m$ nguyên dương. Có bao nhiêu giá trị $m\in \left[1;50\right]$ để $z$ là số thuần ảo?

**A.** 24. **B.** 26. **C.** 25. **D.** 50.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C**

Ta có: $z=\left(\frac{2+6i}{3-i}\right)^{m}=(2i)^{m}=2^{m}.i^{m} $

$z$ là số thuần ảo khi và chỉ khi $m=2k+1, k\in ¥$ (do $z\ne 0;∀m\in ¥^{\*}$).

Vậy có 25 giá trị $m$ thỏa yêu cầu đề bài.

**PT 42.5.** Gọi $z\_{1},z\_{2},z\_{3}$ là các nghiệm của phương trình $iz^{3}-2z^{2}+(1-i)z+i=0$. Biết $z\_{1}$ là số thuần ảo. Đặt $P=\left|z\_{2}-z\_{3}\right|$, hãy chọn khẳng định đúng?

**A.** $4<P<5$. **B.** $2<P<3$. **C.** $3<P<4$. **D.** $1<P<2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $iz^{3}-2z^{2}+(1-i)z+i=0⇔(z+i)\left(iz^{2}-z+1\right)=0⇔\left[\begin{matrix}z\_{1}=-i\\iz^{2}-z+1=0 \left(1\right)\end{matrix}\right.$

Vì $z\_{1}$ là số thuần ảo nên $z\_{2},z\_{3}$ là nghiệm của phương trình (1).

Ta có $\left(z\_{2}-z\_{3}\right)^{2}=\left(z\_{2}+z\_{3}\right)^{2}-4z\_{2}z\_{3}=-1+4i$.

$⇒\left|\left(z\_{2}-z\_{3}\right)^{2}\right|=|-1+4i|=\sqrt{17}⇒P=\left|z\_{2}-z\_{3}\right|=\sqrt[4]{17}$.

**PT 42.6.** Có bao nhiêu số phức $z$ thỏa mãn $\left|z\right|=\sqrt{5}$ và $\left(z-3i\right)\left(\overbar{z}+2\right)$ là số thực?

**A.** $1.$ **B.** $0.$ **C.** $3.$ **D.** $2.$

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi $z=a+bi$

Ta có $\left(z-3i\right)\left(\overbar{z}+2\right)=\left(a+bi-3i\right)\left(a+2-bi\right)=\left(a^{2}+2a+b^{2}-3b\right)+\left(2b-3a-6\right)i$

Theo đề ta có hệ phương trình

$$\left\{\begin{matrix}a^{2}+b^{2}=5\\2b-3a-6=0\end{matrix}\right.⇔\left\{\begin{matrix}a^{2}+\left(\frac{3a+6}{2}\right)^{2}=5\\b=\frac{3a+6}{2}\end{matrix}\right.⇔\left\{\begin{matrix}a^{2}+\left(\frac{3a+6}{2}\right)^{2}=5\\b=\frac{3a+6}{2}\end{matrix}\right.⇔\left\{\begin{matrix}13a^{2}+36a+16=0\left(1\right)\\b=\frac{3a+6}{2}\end{matrix}\right.$$

Phương trình (1) có hai nghiệm, do đó hệ có hai nghiệm, tức là có hai số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**PT 42.7.** Xét các số phức $z$ thỏa mãn $\frac{z+2}{z-2i}$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $z$ luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng

**A.** $1$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $2$.

**Lời** **giải**

**Chọn B**

Đặt $z=a+bi, a,b\in ¡$. Gọi $M\left(a;b\right)$ là điểm biểu diễn cho số phức $z$.

Có $w=\frac{z+2}{z-2i}=\frac{a+2+bi}{a+\left(b-2\right)i}$ $=\frac{\left(a+2+bi\right)\left[a-\left(b-2\right)i\right]}{a^{2}+\left(b-2\right)^{2}}$

$$=\frac{a\left(a+2\right)+b\left(b-2\right)+\left[-\left(a+2\right)\left(b-2\right)+ab\right]i}{a^{2}+\left(b-2\right)^{2}}$$

$w$ là số thuần ảo $⇔\left\{\begin{matrix}a\left(a+2\right)+b\left(b-2\right)=0 \left(1\right)\\a^{2}+\left(b-2\right)^{2}\ne 0\end{matrix}\right.$

Có $\left(1\right)⇔a^{2}+b^{2}+2a-2b=0$.

Suy ra $M$ thuộc đường tròn tâm $I\left(-1;1\right)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.

**PT 42.8.** Có bao nhiêu số phức $z$ thỏa mãn $\left|z+i\right|+\left|z-i\right|=4$ và $\left(z+i\right)\overline{z}$ là số thực?

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $0$. **D.** $4$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi $z=x+yi$ với $x,y\in ¡$ .

Ta có $\left(z+i\right)\overline{z}=z.\overline{z}+i\overline{z}=x^{2}+y^{2}+y+xi\in ¡⇒x=0$.

Mà $\left|z+i\right|+\left|z-i\right|=4⇔\sqrt{x^{2}+\left(y+1\right)^{2}}+\sqrt{x^{2}+\left(y-1\right)^{2}}=4⇔\left|y+1\right|+\left|y-1\right|=4 (2)$(do $x=0$).

TH 1: Nếu $y\geq 1$ thì $\left(2\right)⇔2y=4⇔y=2⇒z=2i$ .

TH 2: Nếu $-1<y<1$ thì $\left(2\right)⇔y+1+1-y=4$ vô nghiệm.

TH 3: Nếu $y\leq -1$ thì $\left(2\right)⇔-y-1+1-y=4⇔y=-2⇒z=-2i$

Vậy có 2 số phức thoả yêu cầu bài toán.

**PT 42.9.** Có tất cả bao nhiêu số phức$z$mà phần thực và phần ảo của nó trái dấu đồng thời thỏa mãn $\left|z+\overline{z}\right|+\left|z-\overline{z}\right|=4$ và $\left|z-2-2i\right|=3\sqrt{2}.$

**A.** $1$. **B.** $3$. **C.** $2$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi điểm $M\left(x;y\right)$ là điểm trên mp tọa độ $Oxy$biểu diễn số phức $z=x+yi (x,y\in ¡)⇒\overline{z}=x-yi$

$\left|z+\overline{z}\right|+\left|z-\overline{z}\right|=4⇔\left|2x\right|+\left|2yi\right|=2⇔\left|x\right|+\left|y\right|=2$. Khi đó tập hợp điểm $M\left(x;y\right)$biểu diễn số phức $z$là hai cạnh đối $AD, BC$của hình vuông $ABCD$ độ dài cạnh bằng $2\sqrt{2}$ và tâm là gốc tọa độ $O$

$\left|z-2-2i\right|=3\sqrt{2}⇔\left(x-2\right)^{2}+\left(y-2\right)^{2}=18$. Tập hợp điểm $M\left(x;y\right)$biểu diễn số phức $z$ là đường tròn tâm $I\left(2 ; 2\right), R=3\sqrt{2}$.



Vậy có 2 điểm biểu diễn $M, P$ thỏa yêu cầu bài toán.

**PT 42.10.** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các số nguyên $m$ sao cho tồn tại hai số phức phân biệt $z\_{1}$, $z\_{2}$ thỏa $\left|z-1\right|=\left|z-i\right|$ và $\left|z+2m\right|=m+1$. Tổng các phần tử của $S$ bằng

**A.** $1$ **B.** $2$ **C.** $3$ **D.** $4$

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi $z=x+yi$ với $x,y\in ¡$.

Theo giả thiết ta có hệ phương trình

$\left\{\begin{matrix}\left|x+2m+yi\right|=m+1\\\left|x-1+yi\right|=\left|x+\left(y-1\right)i\right|\end{matrix}\right.⇔\left\{\begin{matrix}\sqrt{\left(x+2m\right)^{2}+y^{2}}=m+1\\\left(x-1\right)^{2}+y^{2}=\left(y-1\right)^{2}+x^{2}\end{matrix}\right.⇔\left\{\begin{matrix}2x^{2}+4mx+3m^{2}-2m-1=0\left(m\geq -1\right)\\y=x\end{matrix}\right.$ Do tồn tại hai số phức thỏa mãn hệ nên phương trình

$2x^{2}+4mx+3m^{2}-2m-1=0$ phải có hai nghiệm phân biệt, hay

$Δ'=-2m^{2}+4m+2>0⇔1-\sqrt{2}<m<1+\sqrt{2}$.

Mặt khác $m\in ¢⇒m=\left\{0;1;2\right\}$.

Vậy tổng giá trị các phần tử của $S$ bằng $3$.