

BÀI 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

CHƯƠNG 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1. Đơn vị đo góc

Câu 1. (SGK – KNTT 11) Hoàn thành bảng sau:

Số đo độ	15°	?	0°	900°	?	?
Số đo radian	?	$\frac{3\pi}{8}$	?	?	$-\frac{7\pi}{12}$	$-\frac{11\pi}{8}$

Lời giải

Số đo độ	15°	67.5°	0°	900°	-105°	-247.5°
Số đo radian	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{8}$	0	5π	$-\frac{7\pi}{12}$	$-\frac{11\pi}{8}$

Câu 2. (SGK – KNTT 11) a) Đổi từ độ sang radian các số đo sau: 360° ; -450° ;

b) Đổi từ radian sang độ các số đo sau: 3π ; $-\frac{11\pi}{5}$.

Lời giải

a) Ta có: $360^\circ = 360 \cdot \frac{\pi}{180} = 2\pi$; $-450^\circ = -450 \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{4}$

b) Ta có: $3\pi = 3\pi \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 540^\circ$; $-\frac{11\pi}{5} = -\frac{11\pi}{5} \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = -396^\circ$

Câu 3. Đổi số đo cung tròn sang số đo độ:

- a) $\frac{3\pi}{4}$ b) $\frac{5\pi}{6}$ c) $\frac{32\pi}{3}$
 d) $\frac{3\pi}{7}$ e) $2,3$ f) $5,6$

Lời giải

a) $\frac{3\pi}{4} = 135^\circ$

b) $\frac{5\pi}{6} = 150^\circ$

c) $\frac{32\pi}{3} = 1920^\circ$

d) $\frac{3\pi}{7} = \left(\frac{540}{7}\right)^\circ$

e) $2,3 = \frac{2,3 \cdot 180^\circ}{\pi} \approx 131,78^\circ$

f) $5,6 = \frac{5,6 \cdot 180^\circ}{\pi} \approx 320,856^\circ$

Câu 4. Đổi số đo cung tròn sang số đo radian:

- a) 45° b) 150° c) 72° d) 75°

Lời giải

a) $45^\circ = \frac{\pi}{4}$

b) $150^\circ = \frac{5\pi}{6}$

c) $72^\circ = \frac{2\pi}{5}$

d) $75^\circ = \frac{5\pi}{12}$

Dạng 2. Độ dài cung tròn

Câu 5. (SGK – KNTT 11) Một đường tròn có bán kính 20 cm . Tìm độ dài của các cung trên đường tròn đó có số đo sau:

- a) $\frac{\pi}{12}$; b) $1,5$; c) 35° ; d) 315° .

Lời giải

$$l = 20 \times \frac{\pi}{12} = 5.236$$

a) Độ dài cung đường tròn: (cm)

$$l = 20 \times 1.5 = 30$$

b) Độ dài cung đường tròn: (cm)

$$35^\circ = \frac{7\pi}{36}$$

c) Đổi

$$l = 20 \times \frac{7\pi}{36} = 12.2173$$

Độ dài cung đường tròn: (cm)

$$315^\circ = \frac{7\pi}{4}$$

d) Đổi

$$l = 20 \times \frac{7\pi}{4} = 109.9557$$

Độ dài cung đường tròn: (cm)

Câu 6. Một đường tròn có bán kính 36 m . Tìm độ dài của cung trên đường tròn đó có số đo là

- a) $\frac{3\pi}{4}$ b) 51° c) $\frac{1}{3}$

Lời giải

Theo công thức tính độ dài cung tròn ta có $l = R\alpha = \frac{\pi a}{180} \cdot R$ nên

$$l = R\alpha = 36 \cdot \frac{3\pi}{4} = 27\pi \approx 84,8\text{ m}$$

a) Ta có

$$l = \frac{\pi a}{180} \cdot R = \frac{\pi 51}{180} \cdot 36 = \frac{51\pi}{5} \approx 32,04\text{ m}$$

b) Ta có

$$l = R\alpha = 36 \cdot \frac{1}{3} = 12\text{ m}$$

c) Ta có

Câu 7. Bánh xe máy có đường kính kể cả lốp xe 55 cm . Nếu xe chạy với vận tốc 40 km/h thì trong một giây bánh xe quay được bao nhiêu vòng?

Lời giải

$$\text{Ta có } 40\text{ km/h} = \frac{10000}{9}\text{ cm/s.}$$

1 vòng bánh xe có chiều dài là $110\pi\text{ cm}$.

$$\text{Số vòng bánh xe quay được trong 1 giây là } \frac{10000}{9} : (110\pi) \approx 3,2.$$

- Câu 8.** (SGK – KNTT 11) Một máy kéo nông nghiệp với bánh xe sau có đường kính là 184 cm , bánh xe trước có đường kính là 92 cm , xe chuyển động với vận tốc không đổi trên một đoạn đường thẳng. Biết rằng vận tốc của bánh xe sau trong chuyển động này là 80 vòng/phút.



- Tính quãng đường đi được của máy kéo trong 10 phút.
- Tính vận tốc của máy kéo (theo đơn vị km/giờ).
- Tính vận tốc của bánh xe trước (theo đơn vị vòng/phút).

Lời giải

a) Chu vi của bánh xe sau là: $C_s = \pi \cdot 184$ (cm).

Khi đó, bánh xe sau đi mỗi vòng được quãng đường có độ dài là 184π (cm).

Trong 10 phút, bánh xe sau chuyển động được $80 \cdot 10 = 800$ (vòng).

Quãng đường đi được của máy kéo trong 10 phút hay chính là quãng đường đi được khi bánh xe sau lăn 800 vòng là $800 \cdot 184\pi = 147200\pi$ (cm) $= 1,472\pi$ (km).

b) Ta có: 10 phút $= \frac{1}{6}$ giờ.

$$v = \frac{1,472\pi}{\frac{1}{6}} \approx 27,75$$

Vận tốc của máy kéo là $\frac{1}{6}$ (km/giờ).

c) Chu vi của bánh xe trước là: $C_t = \pi \cdot 92$ (cm).

Khi bánh xe sau lăn được 800 vòng trong 10 phút thì bánh xe trước lăn được số vòng là

$$\frac{147200\pi}{92\pi} = 1600 \text{ (vòng)}.$$

Vận tốc của bánh xe trước trong chuyển động này là $\frac{1600}{10} = 160$ (vòng/phút).

- Câu 9.** Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây.

- Tính góc (theo độ và radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.
- Tính độ dài quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính của bánh xe đạp là 680 mm .

Lời giải

a) 1 giây bánh xe quay được số vòng là: $11:5 = \frac{11}{5}$ (vòng)

Góc mà bánh xe quay được trong 1 giây: $\frac{11}{5} \times 360^\circ = 792^\circ = 4,4\pi$ (rad)

b) Ta có: 1 phút $= 60$ giây.

Trong 1 phút bánh xe quay được $60 \times \frac{11}{5} = 132$ vòng.

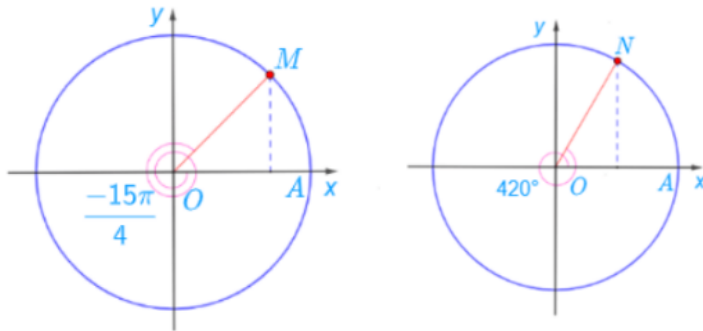
Chu vi của bánh xe đạp là: $C = 680\pi$ (mm).

Quãng đường mà người đi xe đạp đã đi được trong một phút là $680\pi \times 132 = 89760\pi$ (mm) $= 89,76\pi$ (m)

Dạng 3. Mối liên hệ giữa góc hình học và góc lượng giác

Câu 10. (SGK – KNTT 11) Xác định các điểm M và N trên đường tròn lượng giác lần lượt biểu diễn các góc lượng giác có số đo bằng $-\frac{15\pi}{4}$ và 420° .

Lời giải

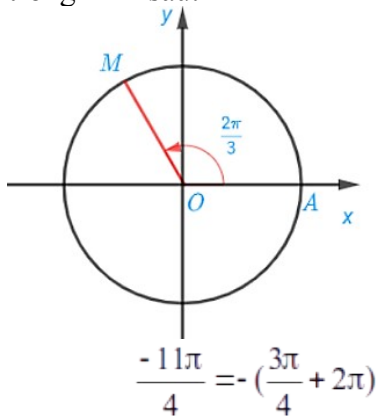


Câu 11. (SGK – KNTT 11) Trên đường tròn lượng giác, xác định điểm M biểu diễn các góc lượng giác có số đo sau:

- a) $\frac{2\pi}{3}$; b) $-\frac{11\pi}{4}$; c) 150° ; d) -225° .

Lời giải

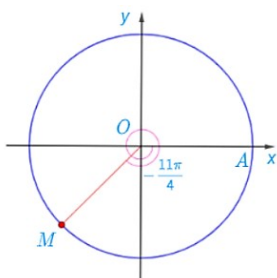
a) Điểm M trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng $\frac{2\pi}{3}$ được xác định trong hình sau:



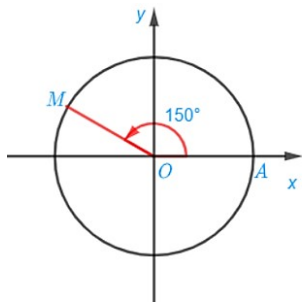
b) Ta có:

$$\frac{-11\pi}{4}$$

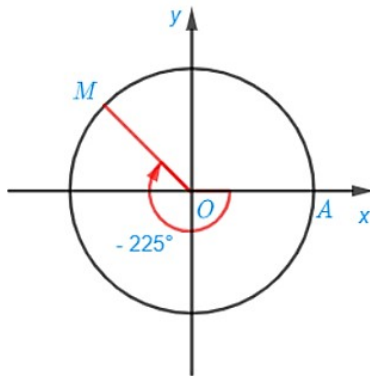
Điểm M trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng $\frac{-11\pi}{4}$ được xác định trong hình sau:



c) Điểm M trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng 150° được xác định trong hình sau:



d) Điểm M trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo bằng -225° được xác định trong hình sau:



Câu 12. Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo $\frac{\pi}{5}$. Hỏi trong các góc $\frac{6\pi}{5}$, $\frac{9\pi}{5}$, $-\frac{11\pi}{5}$, $\frac{31\pi}{5}$, $-\frac{14\pi}{5}$, những góc nào là số đo của một góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho.

Lời giải

$$\frac{6\pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{5}$$

$$\frac{9\pi}{5} = 2\pi - \frac{\pi}{5}$$

$$-\frac{11\pi}{5} = -2\pi - \frac{\pi}{5}$$

$$\frac{31\pi}{5} = 6\pi + \frac{\pi}{5}$$

$$-\frac{14\pi}{5} = -3\pi + \frac{\pi}{5}$$

Nhận thấy số đo của một góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho khi ta quay góc

đó chẵn 1 vòng mà 1 vòng có số đo là $2\pi \Rightarrow$ những số đo thỏa ycbt là $\frac{9\pi}{5}$, $-\frac{11\pi}{5}$, $\frac{31\pi}{5}$.

Câu 13. Hãy tìm số đo α của góc lượng giác (Ou, Ov) với $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, biết một góc lượng giác có cùng tia đầu và tia cuối với góc đó có số đo là:

a) $\frac{29\pi}{4}$

b) $-\frac{128\pi}{3}$

c) $-\frac{2003\pi}{6}$

d) 18,5

Lời giải

a) $\frac{29\pi}{4} = 6\pi + \frac{5\pi}{4}$

b) $-\frac{128\pi}{3} = -44\pi + \frac{4\pi}{3}$

c) $-\frac{2003\pi}{6} = -334\pi + \frac{\pi}{6}$

$$d) \quad 18,5 \approx \frac{18,5}{3,14} \pi = \frac{925}{157} \pi = 4\pi + \frac{297\pi}{157}$$

Dựa vào phân tích trên, góc lượng giác có cùng tia đầu và tia cuối với góc đó có số đo thỏa mãn ycbt là

a) $\frac{5\pi}{4}$ b) $\frac{4\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) $\frac{297\pi}{157}$

Câu 14. Hãy tìm số đo α° của góc lượng giác (Ou, Ov) ($0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$) biết một góc lượng giác có cùng tia đầu và tia cuối với nó có số đo:

a) 395° b) -1052° c) -972° d) $(20\pi)^\circ$

Lời giải

a) $395^\circ = 360^\circ + 35^\circ$
 b) $-1052^\circ = -3 \cdot 360^\circ + 28^\circ$
 c) $-972^\circ = -3 \cdot 360^\circ + 288^\circ$
 d) $(20\pi)^\circ \approx 62,8^\circ = -360^\circ + 297,2^\circ$

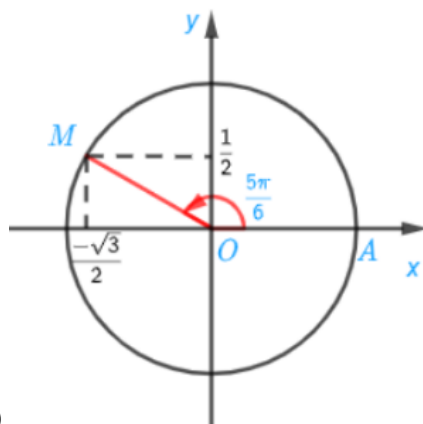
Dựa vào phân tích trên, góc lượng giác có cùng tia đầu và tia cuối với góc đó có số đo thỏa mãn ycbt là

a) 35° b) 28° c) 288° d) $297,2^\circ$

Câu 15. (SGK – KNTT 11) Cho góc lượng giác có số đo bằng $\frac{5\pi}{6}$.

- a) Xác định điểm M trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác đã cho.
 b) Tính các giá trị lượng giác của góc lượng giác đã cho.

Lời giải



- a)
 b) Ta có:

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}; \quad \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \cot\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$$

Câu 16. (SGK – KNTT 11) Sử dụng máy tính cầm tay để:

- a) Tính: $\cos \frac{3\pi}{7}; \tan(-37^\circ 25')$;
 b) Đổi $179^\circ 23' 30''$ sang radian;
 c) Đổi $\frac{7}{9}$ (rad) sang độ.

Lời giải

Để tính $\cos \frac{3\pi}{7}$ ta thực hiện bấm phím lần lượt như sau:

$$\boxed{SHIFT} \boxed{MODE} \boxed{4} \boxed{\cos} \boxed{3} \boxed{SHIFT} (\pi) \boxed{\frac{\pi}{2}} \boxed{7} \boxed{=}$$

Màn hình hiện $0,222520934$

Vậy $\cos \frac{3\pi}{7} = 0.2225$

Để tính $\tan(-37^\circ 25')$ ta thực hiện bấm phím lần lượt như sau:

$$\boxed{SHIFT} \boxed{MODE} \boxed{3} \boxed{\tan} \boxed{-} \boxed{3} \boxed{7} \boxed{^\circ} \boxed{2} \boxed{5} \boxed{' } \boxed{=}$$

Màn hình hiện $-0,76501876$

Vậy $\tan(-37^\circ 25') = -0.765$

b) Đổi $179^\circ 23' 30''$ sang radian ta thực hiện bấm phím lần lượt như sau:

$$\boxed{SHIFT} \boxed{MODE} \boxed{4} \boxed{1} \boxed{7} \boxed{9} \boxed{^\circ} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{^\circ} \boxed{3} \boxed{0} \boxed{''} \boxed{SHIFT} (DRG \triangleright) \boxed{1} \boxed{=}$$

Màn hình hiện $3,130975234$

Vậy $179^\circ 23' 30'' \approx 3,130975234 \text{ (rad)}$.

c) Đổi 79 (rad) sang độ ta thực hiện bấm phím lần lượt như sau:

$$\boxed{SHIFT} \boxed{MODE} \boxed{3} \boxed{7} \boxed{\frac{\pi}{2}} \boxed{9} \boxed{\triangleright} \boxed{SHIFT} (DRG \triangleright) \boxed{2} \boxed{=}$$

$$79 \text{ rad} = 44^\circ 33' 48.18''$$

Dạng 4. Dấu các giá trị lượng giác của góc

Câu 17. Xác định dấu của các biểu thức sau:

a) $C = \cot \frac{3\pi}{5} \cdot \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right)$

b) $D = \cos \frac{4\pi}{5} \cdot \sin \frac{\pi}{3} \cdot \tan \frac{4\pi}{3} \cdot \cot \frac{9\pi}{5}$

Lời giải

a) Ta có $\cot \frac{3\pi}{5} < 0$ và $\sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) < 0 \Rightarrow C > 0$.

b) Ta có $\cos \frac{4\pi}{5} < 0$, $\sin \frac{\pi}{3} > 0$, $\tan \frac{4\pi}{3} > 0$, $\cot \frac{9\pi}{5} < 0 \Rightarrow D > 0$.

Câu 18. Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Xét dấu của các biểu thức sau:

a) $A = \sin(\alpha + 90^\circ)$ b) $B = \cos(\alpha - 45^\circ)$

c) $C = \cos(270^\circ - \alpha)$ d) $D = \cos(2\alpha + 90^\circ)$

Lời giải

a) $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow 90^\circ < \alpha + 90^\circ < 180^\circ \Rightarrow \sin(\alpha + 90^\circ) > 0$

b) $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow -45^\circ < \alpha - 45^\circ < 45^\circ \Rightarrow \cos(\alpha - 45^\circ) > 0$

c) $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow 180^\circ < 270^\circ - \alpha < 270^\circ \Rightarrow \cos(270^\circ - \alpha) < 0$

a) $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow 90^\circ < 2\alpha + 90^\circ < 270^\circ \Rightarrow \cos(2\alpha + 270^\circ) < 0$

Câu 19. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xét dấu của các biểu thức sau:

- a) $A = \cos(\alpha + \pi)$ b) $B = \tan(\alpha - \pi)$
 c) $C = \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right)$ d) $D = \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right)$

Lời giải

- a) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \pi < \alpha + \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos(\alpha + \pi) < 0$
 b) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\pi < \alpha - \pi < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan(\alpha - \pi) > 0$
 c) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{5} < \alpha + \frac{2\pi}{5} < \frac{9\pi}{10} \Rightarrow \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right) > 0$
 d) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{3\pi}{8} < \alpha - \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{8} \Rightarrow \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right) > 0$

Câu 20. Cho tam giác ABC . Xét dấu của các biểu thức sau:

- a) $A = \sin A + \sin B + \sin C$ b) $B = \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$
 c) $C = \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$ d) $D = \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}$

Lời giải

- a) $A, B, C \in (0^\circ; 180^\circ) \Rightarrow \sin A > 0, \sin B > 0, \sin C > 0 \Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C > 0$
 b) $A, B, C \in (0^\circ; 180^\circ) \Rightarrow \sin A > 0, \sin B > 0, \sin C > 0 \Rightarrow \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C > 0$
 c) $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2} \in (0^\circ; 90^\circ) \Rightarrow \cos \frac{A}{2} > 0, \cos \frac{B}{2} > 0, \cos \frac{C}{2} > 0 \Rightarrow \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} > 0$
 d) $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2} \in (0^\circ; 90^\circ) \Rightarrow \tan \frac{A}{2} > 0, \tan \frac{B}{2} > 0, \tan \frac{C}{2} > 0 \Rightarrow \tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} > 0$

Dạng 5. Rút gọn biểu thức lượng giác

Câu 21. Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $A = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x)$
 b) $B = 2\cos x - 3\cos(\pi - x) + 5\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$
 c) $C = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(5\pi - x) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
 d) $D = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$

Lời giải

a)

$$\begin{aligned} A &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x) \\ &= -\sin x + \cos(-x) - \cos x \\ &= -\sin x + \cos x - \cos x \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 B &= 2 \cos x - 3 \cos(\pi - x) + 5 \sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \\
 &= 2 \cos x + 3 \cos x + 5 \sin\left(3\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) + \cot\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) \\
 &= 5 \cos x - 5 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
 &= 5 \cos x - 5 \cos x + \tan x \\
 &= \tan x
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 C &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(5\pi - x) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\
 &= 2 \cos x + \sin(4\pi + \pi - x) + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) - \sin x \\
 &= 2 \cos x + \sin(\pi - x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin x \\
 &= 2 \cos x - \sin x - \cos x - \sin x \\
 &= \cos x - 2 \sin x
 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
 D &= \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x) \\
 &= \cos(4\pi + \pi - x) - \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi + \pi - x) \\
 &= \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cot(\pi - x) \\
 &= -\cos x + \cos x + \cot x - \cot x = 0
 \end{aligned}$$

Câu 22. Không dùng bảng số và máy tính, rút gọn các biểu thức:

a) $A = \tan 18^\circ \cdot \tan 288^\circ + \sin 32^\circ \cdot \sin 148^\circ - \sin 302^\circ \cdot \sin 122^\circ$

b) $B = \frac{1 + \sin^4 a - \cos^4 a}{1 - \sin^6 a - \cos^6 a}$

Lời giải

a) $A = \tan(90^\circ - 72^\circ) \cdot \tan(360^\circ - 72^\circ) + \sin 32^\circ \cdot \sin(180^\circ - 32^\circ) - \sin(360^\circ - 58^\circ) \cdot \sin(180^\circ - 58^\circ)$
 $= \cot 72^\circ \cdot (-\tan 72^\circ) + \sin^2 32^\circ + \sin^2 58^\circ = -1 + \sin^2 32^\circ + \cos^2 32^\circ = -1 + 1 = 0$

b) $B = \frac{1 + (\sin^2 a + \cos^2 a)(\sin^2 a - \cos^2 a)}{1 - (\sin^2 a + \cos^2 a)(\sin^4 a - \sin^2 a \cos^2 a + \cos^4 a)} = \frac{1 + \sin^2 a - \cos^2 a}{1 - [(\sin^2 a + \cos^2 a)^2 - 3 \sin^2 a \cos^2 a]}$
 $= \frac{2 \sin^2 a}{3 \sin^2 a \cos^2 a} = \frac{2}{3} (1 + \tan^2 a)$

Câu 23. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin \frac{7\pi}{6} + \cos 9\pi + \tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + \cot \frac{7\pi}{2}$

$$b) \quad B = \frac{1}{\tan 368^\circ} + \frac{2 \sin 2550^\circ \cos(-188^\circ)}{2 \cos 638^\circ + \cos 98^\circ}$$

$$c) \quad C = \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 65^\circ$$

$$d) \quad D = \tan^2 \frac{\pi}{8} \cdot \tan \frac{3\pi}{8} \cdot \tan \frac{5\pi}{8}$$

Lời giải

a) Ta có

$$\Rightarrow A = -\sin \frac{\pi}{6} + \cos \pi - \tan \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2} - 1 - 1 + 0 = -\frac{5}{2}$$

b) Ta có

$$B = \frac{1}{\tan(8^\circ + 360^\circ)} + \frac{2 \sin(30^\circ + 7.360^\circ) \cos(8^\circ + 180^\circ)}{2 \cos(-90^\circ + 8^\circ + 2.360^\circ) + \cos(90^\circ + 8^\circ)}$$

$$B = \frac{1}{\tan 8^\circ} + \frac{2 \sin 30^\circ (-\cos 8^\circ)}{2 \cos(8^\circ - 90^\circ) - \sin 8^\circ} = \frac{1}{\tan 8^\circ} + \frac{2 \cdot \frac{1}{2} (-\cos 8^\circ)}{2 \cos(90^\circ - 8^\circ) - \sin 8^\circ} =$$

$$= \frac{1}{\tan 8^\circ} - \frac{\cos 8^\circ}{2 \sin 8^\circ - \sin 8^\circ} = \frac{1}{\tan 8^\circ} - \frac{\cos 8^\circ}{\sin 8^\circ} = 0$$

c) Vì $25^\circ + 65^\circ = 90^\circ \Rightarrow \sin 65^\circ = \cos 25^\circ$ do đó

$$C = (\sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ) + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Suy ra $C = \frac{7}{4}$.

d)

$$D = -\left(\tan \frac{\pi}{8} \cdot \tan \frac{3\pi}{8}\right) \cdot \left[\tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) \tan \frac{5\pi}{8}\right]$$

Mà $\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \frac{3\pi}{8} = \cot \frac{\pi}{8}, \tan \frac{5\pi}{8} = \cot\left(-\frac{\pi}{8}\right)$

Nên

$$D = -\left(\tan \frac{\pi}{8} \cdot \cot \frac{\pi}{8}\right) \cdot \left[\tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) \cot\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right] = -1$$

Câu 24. Rút gọn các biểu thức sau:

a)

$$A = \frac{\sin(328^\circ) \sin 958^\circ}{\cot 572^\circ} - \frac{\cos(-508^\circ) \cos(-1022^\circ)}{\tan(-212^\circ)}$$

b)

$$B = \frac{\sin(-234^\circ) - \cos 216^\circ}{\sin 144^\circ - \cos 126^\circ} \tan 36^\circ$$

c) $C = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$

d) $D = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \dots + \cos^2 180^\circ$

e) $E = \sin 20^\circ + \sin 40^\circ + \sin 60^\circ + \dots + \sin 340^\circ + \sin 360^\circ$

Lời giải

a) Ta có:

$$\sin 328^{\circ} = \sin(360^{\circ} - 32^{\circ}) = -\sin 32^{\circ}$$

;

$$\sin 958^{\circ} = \sin(3.360^{\circ} - 122^{\circ}) = -\sin 122^{\circ} = -\sin(90^{\circ} + 32^{\circ}) = -\cos 32^{\circ}$$

;

$$\cot 572^{\circ} = \cot(2.360^{\circ} - 148^{\circ}) = -\cot 148^{\circ} = -\cot(180^{\circ} - 32^{\circ}) = \cot 32^{\circ}$$

;

$$\cos(-508^{\circ}) = \cos 508^{\circ} = \sin(360^{\circ} + 148^{\circ}) = \cos 148^{\circ} = \cos(180^{\circ} - 32^{\circ}) = -\cos 32^{\circ};$$

$$\cos 1022^{\circ} = \cos(3.360^{\circ} - 58^{\circ}) = \cos 58^{\circ} = \cos(90^{\circ} - 32^{\circ}) = \sin 32^{\circ}$$

;

$$\tan(212^{\circ}) = -\tan(180^{\circ} + 32^{\circ}) = -\tan 32^{\circ}$$

$$A = \frac{\sin 32^{\circ} \cos 32^{\circ}}{\cot 32^{\circ}} - \frac{\cos 32^{\circ} \sin 32^{\circ}}{\tan 32^{\circ}} = \sin^2 32^{\circ} - \cos^2 32^{\circ} = -\cos 64^{\circ}$$

Khi đó:

b)Ta có:

$$\sin(-234^{\circ}) = \sin(126^{\circ} - 360^{\circ}) = \sin 126^{\circ} = \sin(90^{\circ} + 36^{\circ}) = \cos 36^{\circ}$$

;

$$\cos 216^{\circ} = \sin(180^{\circ} + 36^{\circ}) = -\cos 36^{\circ}$$

$$\sin 144^{\circ} = \sin(180^{\circ} - 36^{\circ}) = \sin 36^{\circ}$$

;

$$\cos 126^{\circ} = \cos(90^{\circ} + 36^{\circ}) = -\sin 36^{\circ}$$

$$B = \frac{\cos 36^{\circ} + \cos 36^{\circ}}{\sin 36^{\circ} + \sin 36^{\circ}} \tan 36^{\circ} = 1$$

Khi đó:

c)Ta có:

$$C = (\cos 20^{\circ} + \cos 160^{\circ}) + (\cos 40^{\circ} + \cos 140^{\circ}) + (\cos 60^{\circ} + \cos 120^{\circ}) + (\cos 80^{\circ} + \cos 100^{\circ}) - 1$$

$$(\cos 20^{\circ} - \cos 20^{\circ}) + (\cos 40^{\circ} - \cos 40^{\circ}) + (\cos 60^{\circ} - \cos 60^{\circ}) + (\cos 80^{\circ} - \cos 80^{\circ}) - 1$$

=

$$- 1$$

=

d)Ta có:

$$D = (\cos^2 10^{\circ} + \cos^2 170^{\circ}) + (\cos^2 20^{\circ} + \cos^2 160^{\circ}) + \dots + (\cos^2 80^{\circ} + \cos^2 100^{\circ}) + \cos 90^{\circ} + 1$$

$$(\cos^2 10^{\circ} + \cos^2 10^{\circ}) + (\cos^2 20^{\circ} + \cos^2 20^{\circ}) + \dots + (\cos^2 80^{\circ} + \cos^2 80^{\circ}) + 1$$

=

$$2(\cos^2 10^{\circ} + \cos^2 20^{\circ} + \cos^2 30^{\circ} + \dots + \cos^2 80^{\circ}) + 1$$

=

$$\begin{aligned}
& 2 \left[(\cos^2 10^\circ + \cos^2 80^\circ) + (\cos^2 20^\circ + \cos^2 70^\circ) + \dots + (\cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ) \right] + 1 \\
&= \\
& 2 \left[(\cos^2 10^\circ + \sin^2 10^\circ) + (\cos^2 20^\circ + \sin^2 20^\circ) + \dots + (\cos^2 40^\circ + \sin^2 40^\circ) \right] + 1 \\
&= \\
&= 2.4 + 1 = 9.
\end{aligned}$$

e) Ta có:

$$\begin{aligned}
E &= \sin 20^\circ + \sin 40^\circ + \sin 60^\circ + \dots + \sin 340^\circ + \sin 360^\circ \\
&= (\sin 20^\circ + \sin 340^\circ) + (\sin 40^\circ + \sin 320^\circ) + \dots + (\sin 160^\circ + \sin 200^\circ) + \sin 180^\circ + \sin 360^\circ \\
&= \\
&= 2 \sin 180^\circ \cos 160^\circ + 2 \sin 180^\circ \cos 140^\circ + \dots + 2 \sin 180^\circ \cos 20^\circ \\
&= \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$A = \sin(\pi + \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cot(2\pi - \alpha) + \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Câu 25. Rút gọn biểu thức

Lời giải

$$A = \sin(\pi + \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cot(2\pi - \alpha) + \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha + \sin \alpha - \cot \alpha + \cot \alpha = 0$$

$$B = \frac{\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - \sin^3\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$$

Câu 26. Rút gọn biểu thức

Lời giải

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - \sin^3\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{-\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin^3\left(3\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{2} + \alpha\right)} \\
&= \frac{-\cot \alpha \cdot \sin \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha \cdot (-\cot \alpha)} = \frac{-\cos \alpha + \cos^3 \alpha}{-\cos \alpha} = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha.
\end{aligned}$$

$$A = \left(\frac{\sin x + \tan x}{\cos x + 1} \right)^2 + 1$$

Câu 27. Rút gọn biểu thức

Lời giải

$$\left(\frac{\sin x + \tan x}{\cos x + 1} \right)^2 + 1 = \left(\frac{\sin x + \frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x + 1} \right)^2 + 1 = \left(\frac{\sin x (\cos x + 1)}{\cos x (\cos x + 1)} \right)^2 + 1$$

Ta có

$$= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 + 1 = \tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Vậy $A = \frac{1}{\cos^2 x}.$

Câu 28. Rút gọn biểu thức $A = \tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

Lời giải

Cách 1:

$$\begin{aligned} \tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} &= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{\sin x(1 + \sin x) + \cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} \\ \text{Ta có} \\ &= \frac{\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{\sin x + 1}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{1}{\cos x}.$$

Cách 2:

$$\begin{aligned} \tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} &= \tan x + \frac{\cos x(1 - \sin x)}{1 - \sin^2 x} = \tan x + \frac{\cos x(1 - \sin x)}{\cos^2 x} \\ \text{Ta có} \\ &= \tan x + \frac{(1 - \sin x)}{\cos x} = \tan x + \frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{1}{\cos x}.$$

Câu 29. Đơn giản biểu thức $A = \sin^4 x - \cos^4 x + 2 \cos^2 x$

Lời giải

$$A = \sin^4 x - \cos^4 x + 2 \cos^2 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) + 2 \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Câu 30. Đơn giản biểu thức $B = \frac{\sin^4 x + 3 \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x + 3 \cos^4 x - 1}$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sin^4 x + 3 \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x + 3 \cos^4 x - 1} = \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x + 2 \cos^4 x - 1}{(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) + 3 \cos^4 x - 1} \\ &= \frac{-2 \sin^2 x \cos^2 x + 2 \cos^4 x}{\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x + 3 \cos^4 x - 1} = \frac{2 \cos^2 x (\cos^2 x - \sin^2 x)}{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3 \sin^2 x \cos^2 x + 3 \cos^4 x - 1} \\ &= \frac{2 \cos^2 x (\cos^2 x - \sin^2 x)}{-3 \sin^2 x \cos^2 x + 3 \cos^4 x} = \frac{2 \cos^2 x (\cos^2 x - \sin^2 x)}{3 \cos^2 x (\cos^2 x - \sin^2 x)} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Câu 31. Đơn giản biểu thức $C = \frac{\tan^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cot^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}$

Lời giải

$$\begin{aligned} C &= \frac{\tan^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cot^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^4 x + \cos^2 x - \sin^4 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \\ &= \frac{1 - (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 + 2 \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = 2 \end{aligned}$$

Câu 32. Đơn giản biểu thức $D = \frac{1 - 2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x - 1}$

Lời giải

$$D = \frac{1 - 2\sin^2 x}{2\cos^2 x - 1} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin^2 x}{2\cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = 1$$

Câu 33. Đơn giản biểu thức $E = 2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x)$

Lời giải

$$\begin{aligned} E &= 2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) = 2(\sin^4 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x) - 3(1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x) \\ &= 2(1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x) - 3(1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x) = -1 \end{aligned}$$

Dạng 6. Tính giá trị lượng giác của góc lượng giác

Câu 34. (SGK – KNTT 11) Tính các giá trị lượng giác của góc α , biết: $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Lời giải

Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\sin \alpha < 0$. Mặt khác, từ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ suy ra

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{Do đó, } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ và } \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Câu 35. (SGK – KNTT 11) Tính:

a) $\sin(-675^\circ)$;

b) $\tan \frac{15\pi}{4}$

Lời giải

a) $\sin(-675^\circ) = \sin(45^\circ - 2 \times 360^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{2}{\sqrt{2}}$

b) $\tan \frac{15\pi}{4} = \tan\left(\frac{3\pi}{4} + 3\pi\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\tan\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$

Câu 36. (SGK – KNTT 11) Tính các giá trị lượng giác của góc α , biết:

a) $\cos \alpha = \frac{1}{5}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

b) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

c) $\tan \alpha = \sqrt{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

d) $\cot \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Lời giải

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \sin \alpha > 0$$

a) Vì nên

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

Mặt khác, từ suy ra

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2\sqrt{6} \quad \text{và} \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

Do đó,

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad \cos \alpha < 0$$

b) Vì nên

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Mặt khác, từ suy ra

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Do đó, và

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{2 - \sqrt{5}}$$

c)

$$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \quad \cos \alpha < 0, \sin \alpha < 0$$

Vi nên

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

Mặt khác, từ suy ra

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

Từ suy ra

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = -\sqrt{2}$$

d)

$$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \quad \cos \alpha > 0, \sin \alpha < 0$$

Vi nên

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Mặt khác, từ suy ra

$$\text{Từ } 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \text{ suy ra } \sin^2 \alpha = -\sqrt{\frac{1}{1 + \cot^2 \alpha}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Câu 37. Cho biết một GTLG, tính các GTLG còn lại

a) $\cos a = \frac{4}{5}, 270^\circ < a < 360^\circ$

b) $\sin a = \frac{5}{13}, \frac{\pi}{2} < a < \pi$

c) $\tan a = 3, \pi < a < \frac{3\pi}{2}$

d) $\cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$

Lời giải

a) $270^\circ < a < 360^\circ \Rightarrow \sin a < 0$ nên $\sin a = -\sqrt{1 - \cos^2 a} = -\frac{3}{5}; \tan a = -\frac{3}{4}; \cot a = -\frac{4}{3}$

b) $\frac{\pi}{2} < a < \pi \Rightarrow \cos a < 0$ nên $\cos a = -\sqrt{1 - \sin^2 a} = -\frac{12}{13}; \tan a = -\frac{5}{12}; \cot a = -\frac{12}{5}$

c) $\pi < a < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos a < 0$ nên từ $1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \Rightarrow \cos a = -\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 a}} = -\frac{1}{\sqrt{10}};$
 $\sin a = \tan a \cdot \cos a = -\frac{3}{\sqrt{10}}; \cot a = \frac{1}{\tan a} = -\sqrt{10}$

d) Ta có $\frac{1}{\sin^2 15^\circ} = 1 + \cot^2 15^\circ = 8 + 2\sqrt{3} \Rightarrow \sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{8 + 2\sqrt{3}}};$
 $\cos 15^\circ = \cot 15^\circ \cdot \sin 15^\circ = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{8 + 2\sqrt{3}}}$

Câu 38. Cho biết một GTLG, tính giá trị của biểu thức, với:

a) $A = \frac{\cot a + \tan a}{\cot a - \tan a}, \text{ khi } \sin a = \frac{3}{5}, 0 < a < \frac{\pi}{2}$

b) $C = \frac{\sin^2 a + 2 \sin a \cdot \cos a - 2 \cos^2 a}{2 \sin^2 a - 3 \sin a \cdot \cos a + 4 \cos^2 a}, \text{ khi } \cot a = -3$

c) $E = \frac{8 \cos^3 a - 2 \sin^3 a + \cos a}{2 \cos a - \sin^3 a} \text{ khi } \tan a = 2$

d) $G = \frac{\cot a + 3 \tan a}{2 \cot a + \tan a} \text{ khi } \cos a = -\frac{2}{3}$

e) $H = \frac{\sin a + \cos a}{\cos a - \sin a} \text{ khi } \tan a = 5$

Lời giải

a) $\sin a = \frac{3}{5}, 0 < a < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \frac{4}{5};$ do đó $\cot a = \frac{4}{3}$ và $\tan a = \frac{3}{4}$. Vậy

$$A = \frac{\frac{4}{3} + \frac{3}{4}}{\frac{4}{3} - \frac{3}{4}} = \frac{25}{7}$$

b) Chia tử và mẫu cho $\sin^2 a \Rightarrow C = \frac{1 + 3 \cot a - 2 \cot^2 a}{2 - 3 \cot a + 4 \cot^2 a} = \frac{1 + 2 \cdot (-3) - 2 \cdot (-3)^2}{2 - 3 \cdot (-3) + 4 \cdot (-3)^2} = -\frac{23}{47}$

c) Chia tử và mẫu cho $\cos^3 a \Rightarrow E = \frac{8 - 2 \tan^3 a + 1 + \tan^2 a}{2(1 + \tan^2 a) - \tan^3 a} = \frac{8 - 2 \cdot 2^3 + 1 + 2^2}{2 \cdot (1 + 2^2) - 2^3} = -\frac{3}{2}$

$$G = \frac{\frac{\cos a}{\sin a} + 3 \cdot \frac{\sin a}{\cos a}}{2 \cdot \frac{\cos a}{\sin a} + \frac{\sin a}{\cos a}} = \frac{\cos^2 a + 3 \sin^2 a}{2 \cos^2 a + \sin^2 a} = \frac{\cos^2 a + 3(1 - \cos^2 a)}{2 \cos^2 a + 1 - \cos^2 a} = \frac{\frac{4}{9} + 3 \left(1 - \frac{4}{9}\right)}{2 \cdot \frac{4}{9} + 1 - \frac{4}{9}}$$

d) Biểu thức

$$= \frac{19}{13}$$

e) Chia tử và mẫu cho $\cos a \Rightarrow H = \frac{\tan a + 1}{1 - \tan a} = \frac{5 + 1}{1 - 5} = -\frac{2}{3}$

Câu 39. Tính giá trị lượng giác của góc α nếu

a) $\sin \alpha = -\frac{2}{5}; \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

b) $\cos \alpha = 0,8; \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

c) $\tan \alpha = \frac{13}{8}; 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

d) $\cot \alpha = -\frac{19}{7}; \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Lời giải

a) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha < 0$ nên $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{\sqrt{21}}{5}; \tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{21}}; \cot \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$

b) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \sin \alpha < 0$ nên $\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -0,6; \tan \alpha = -\frac{3}{4}; \cot \alpha = -\frac{4}{3}$

c) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha > 0$ nên $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{8}{\sqrt{233}}; \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{13}{\sqrt{233}}; \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{8}{13}$

d) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \sin \alpha > 0$ nên $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}} = \frac{7}{\sqrt{410}}; \cos \alpha = \cot \alpha \cdot \sin \alpha = -\frac{19}{\sqrt{410}}; \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = -\frac{7}{19}$

Câu 40. a) Cho $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. Tính $A = \frac{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$

b) Cho $\tan \alpha = 3$. Tính $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$

c) Cho $\cot \alpha = \sqrt{5}$. Tính $C = \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha$

Lời giải

a) Ta có
$$A = \frac{\tan \alpha + 3 \frac{1}{\tan \alpha}}{\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{\tan^2 \alpha + 3}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 2}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = 1 + 2 \cos^2 \alpha$$

Suy ra
$$A = 1 + 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{17}{9}$$

b)
$$B = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{3 \cos^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{2 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha}} = \frac{\tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1) - (\tan^2 \alpha + 1)}{\tan^3 \alpha + 3 + 2 \tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1)}$$

Suy ra
$$B = \frac{3(9+1) - (9+1)}{27+3+2 \cdot 3(9+1)} = \frac{2}{9}$$

$$C = \sin^2 \alpha \cdot \frac{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \sin^2 \alpha \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right)$$

c) Ta có

$$= \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} (1 - \cot \alpha + \cot^2 \alpha) = \frac{1}{1 + (\sqrt{5})^2} (1 - \sqrt{5} + 5) = \frac{6 - \sqrt{5}}{6}$$

Câu 41. Cho $\tan \alpha - \cot \alpha = 3$. Tính giá trị các biểu thức sau:

a/ $A = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$

b/ $B = \tan \alpha + \cot \alpha$

c/ $C = \tan^4 \alpha - \cot^4 \alpha$

Lời giải

$$A = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha \Leftrightarrow A = (\tan \alpha - \cot \alpha)^2 + 2 \tan \alpha \cdot \cot \alpha \Leftrightarrow A = 3^2 + 2 \Leftrightarrow A = 11$$

a/

$$B = \tan \alpha + \cot \alpha \Rightarrow B^2 = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 \Leftrightarrow B^2 = (\tan \alpha - \cot \alpha)^2 + 4 \tan \alpha \cdot \cot \alpha$$

b/

$$\Leftrightarrow B^2 = 3^2 + 4 \Leftrightarrow B^2 = 13 \Leftrightarrow B = \pm \sqrt{13}$$

$$C = \tan^4 \alpha - \cot^4 \alpha \Leftrightarrow C = (\tan^2 \alpha - \cot^2 \alpha)(\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha)$$

c/

$$\Leftrightarrow C = (\tan \alpha - \cot \alpha)(\tan \alpha + \cot \alpha)(\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha)$$

$$\Leftrightarrow C = \pm 33\sqrt{13}$$

(theo giả thiết và kết quả của câu a, b ở trên).

Câu 42.

a) Cho $3 \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$. Tính $A = \sin^4 x + 3 \cos^4 x$.

b) Cho $3 \sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$. Tính $C = \sin^4 x + 3 \cos^4 x$.

c) Cho $4 \sin^4 x + 3 \cos^4 x = \frac{7}{4}$. Tính $C = 3 \sin^4 x + 4 \cos^4 x$.

Lời giải

$$3 \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$$

a) Ta có

$$\Leftrightarrow 3 \sin^4 x + (1 - \sin^2 x)^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4 \sin^4 x - 2 \sin^2 x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{4} \quad \cos^2 x = \frac{3}{4}$$

Với thì

$$A = \frac{1}{16} + 3 \cdot \frac{9}{16} = \frac{7}{4}$$

Vậy

$$3\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$$

b) Ta có

$$\Leftrightarrow 3\sin^4 x - (1 - \sin^2 x)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sin^4 x + 2\sin^2 x - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

Với thì

$$B = \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

Vậy

$$4\sin^4 x + 3\cos^4 x = \frac{7}{4}$$

c) Ta có

$$\Leftrightarrow 4\sin^4 x + 3(1 - \sin^2 x)^2 = \frac{7}{4} \Leftrightarrow 7\sin^4 x - 6\sin^2 x + \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = \frac{1}{2} \\ \sin^2 x = \frac{5}{14} \end{cases}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

Với thì

$$\sin^2 x = \frac{5}{14} \quad \cos^2 x = \frac{9}{14} \Rightarrow A = 3 \cdot \left(\frac{5}{14}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{9}{14}\right)^2 = \frac{57}{28}$$

Với thì

Câu 43.

a) Cho $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$. Tính $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$.

b) Cho $\tan x + \cot x = 4$. Tính $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$.

Lời giải

a) $\sin x + \cos x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{5} - \cos x$.

Ta có

Thay vào phương trình $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ta được:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{5} - \cos x\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - \frac{2}{5}\cos x - \frac{24}{25} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{4}{5} \\ \cos x = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\cos x = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{3}{5}.$$

Với

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-3}{4}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{-4}{3}$$

$$\cos x = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}.$$

Với

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-4}{3}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{-3}{4}$$

b)

$$\tan x + \cot x = 4$$

$$\Leftrightarrow \tan x + \frac{1}{\tan x} = 4$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x - 4 \tan x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 2 + \sqrt{3} \\ \tan x = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\tan x = 2 + \sqrt{3}$$

Với ta có :

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \cos x = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin x = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

$$\tan x = 2 - \sqrt{3}$$

Với ta có :

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \cos x = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \sin x = \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Câu 44. (SGK – KNTT 11) Huyết áp của mỗi người thay đổi trong ngày. Giả sử huyết áp tâm trương (tức là áp lực máu lên thành động mạch khi tim giãn ra) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi tại thời điểm t được cho bởi công thức:

$$B(t) = 80 + 7 \sin \frac{\pi t}{12},$$

trong đó t là số giờ tính từ lúc nửa đêm và $B(t)$ tính bằng mmHg (milimét thủy ngân). Tìm huyết áp tâm trương của người này vào các thời điểm sau:

- 6 giờ sáng;
- 10 giờ 30 phút sáng;
- 12 giờ trưa;
- 8 giờ tối.

Lời giải

$$\text{a) } t = 6, B(t) = 80 + 7 \sin \frac{6\pi}{12} = 80 + 7 \sin \frac{\pi}{2} = 87 (\text{mmHg})$$

$$\text{b) } t = 10.5, B(t) = 80 + 7 \sin \frac{10.5\pi}{12} = 82.6788 (\text{mmHg})$$

$$\text{c) } t = 12, B(t) = 80 + 7 \sin \frac{12\pi}{12} = 80 + 7 \sin \pi = 80 (\text{mmHg})$$

$$\text{d) } t = 20, B(t) = 80 + 7 \sin \frac{20\pi}{12} = 80 + 7 \sin \frac{5\pi}{3} = 73.9378 (\text{mmHg})$$

Dạng 7. Chứng minh đẳng thức

Câu 45. (SGK – KNTT 11) Chứng minh các đẳng thức:

$$\text{a) } \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1;$$

$$\text{b) } \frac{\cos^2 \alpha + \tan^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha} = \tan^2 \alpha$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha &= (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ &= 1 \times (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{\cos^2 \alpha + \tan^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha} &= \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\tan^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\sin^2 \alpha} \\ &= \cot^2 \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - (1 + \cot^2 \alpha) = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \tan^2 \alpha \end{aligned}$$

Câu 46. Chứng minh các đẳng thức:

$$\text{a) } \frac{\sin^3 a + \cos^3 a}{\sin a + \cos a} = 1 - \sin a \cos a$$

$$\text{b) } \frac{\sin^2 a - \cos^2 a}{1 + 2 \sin a \cos a} = \frac{\tan a - 1}{\tan a + 1}$$

$$\text{c) } \sin^4 a + \cos^4 a - \sin^6 a - \cos^6 a = \sin^2 a \cdot \cos^2 a$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\sin^3 a + \cos^3 a}{\sin a + \cos a} &= \frac{(\sin a + \cos a)(\sin^2 a - \sin a \cos a + \cos^2 a)}{\sin a + \cos a} \\ &= \sin^2 a - \sin a \cos a + \cos^2 a \\ &= 1 - \sin a \cos a \end{aligned}$$

$$\frac{\sin^2 a - \cos^2 a}{1 + 2 \sin a \cos a} = \frac{(\sin a - \cos a)(\sin a + \cos a)}{(\sin a + \cos a)^2} = \frac{\sin a - \cos a}{\sin a + \cos a} = \frac{\frac{\sin a - \cos a}{\cos a}}{\frac{\sin a + \cos a}{\cos a}} = \frac{\tan a - 1}{\tan a + 1}$$

b) $\frac{\sin^2 a - \cos^2 a}{1 + 2 \sin a \cos a} = \frac{(\sin a - \cos a)(\sin a + \cos a)}{(\sin a + \cos a)^2} = \frac{\sin a - \cos a}{\sin a + \cos a} = \frac{\frac{\sin a - \cos a}{\cos a}}{\frac{\sin a + \cos a}{\cos a}} = \frac{\tan a - 1}{\tan a + 1}$

c) $\sin^4 a + \cos^4 a - (\sin^6 a + \cos^6 a) = \sin^4 a + \cos^4 a - [(\sin^2 a)^3 + (\cos^2 a)^3]$
 $= \sin^4 a + \cos^4 a - (\sin^4 a - \sin^2 a \cos^2 a + \cos^4 a) = \sin^2 a \cos^2 a$

Câu 47. Chứng minh các đẳng thức:

a) $\frac{\tan a - \tan b}{\cot a - \cot b} = \tan a \cdot \tan b$ b) $\tan 100^\circ + \frac{\sin 530^\circ}{1 + \sin 640^\circ} = \frac{1}{\sin 10^\circ}$

c) $2(\sin^6 a + \cos^6 a) + 1 = 3(\sin^4 a + \cos^4 a)$

Lời giải

a) $\frac{\tan a - \tan b}{\cot a - \cot b} = \frac{\tan a - \tan b}{\frac{1}{\tan a} - \frac{1}{\tan b}} = \frac{\tan a - \tan b}{\frac{\tan a - \tan b}{\tan a \tan b}} = \tan a \tan b$

b) $\tan 100^\circ + \frac{\sin 530^\circ}{1 + \sin 640^\circ} = \tan(90^\circ + 10^\circ) + \frac{\sin(360^\circ + 170^\circ)}{1 + \sin(720^\circ - 80^\circ)} = -\cot 10^\circ + \frac{\sin 170^\circ}{1 - \sin 80^\circ}$
 $= -\frac{\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ} + \frac{\sin 10^\circ}{1 - \cos 10^\circ} = \frac{-\cos 10^\circ + \cos^2 10^\circ + \sin^2 10^\circ}{\sin 10^\circ \cdot (1 - \cos 10^\circ)} = \frac{1}{\sin 10^\circ}$

c) $2[(\sin^2 a)^3 + (\cos^2 a)^3] + 1 = 2(\sin^2 a + \cos^2 a)(\sin^4 a - \sin^2 a \cos^2 a + \cos^4 a) + 1$
 $= 2(\sin^4 a + \cos^4 a) - 2\sin^2 a \cos^2 a + 1 = 2(\sin^4 a + \cos^4 a) - 2\sin^2 a \cos^2 a + (\sin^2 a + \cos^2 a)^2$
 $= 2(\sin^4 a + \cos^4 a) + \sin^4 a + \cos^4 a = 3(\sin^4 a + \cos^4 a)$

Câu 48. Giả sử biểu thức sau đây có nghĩa. Chứng minh rằng:

$$\sin^4 x \cot^2 x + \cos^4 x \tan^2 x + \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x = \sin^2 x$$

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} VT &= \sin^4 x \cot^2 x + \cos^4 x \tan^2 x + \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x \\ &= \sin^4 x \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \cos^4 x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x \\ &= \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x \\ &= \sin^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x) \\ &= \sin^2 x = VP \end{aligned}$$

Vậy $\sin^4 x \cot^2 x + \cos^4 x \tan^2 x + \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x = \sin^2 x$

Câu 49. Cho $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2 - \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} - \sqrt{\cos^2 x + \tan^2 x + 3} = \cos x$$

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} VT &= \frac{2 - \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} - \sqrt{\cos^2 x + \tan^2 x + 3} \\ &= \frac{1 + 1 - \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} - \sqrt{\cos^2 x + 2 + \tan^2 x + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1+2\cos^2 x}{\cos x} - \sqrt{\cos^2 x + 2 + \frac{1}{\cos^2 x}} \\
&= \frac{1}{\cos x} + 2\cos x - \sqrt{\left(\cos x + \frac{1}{\cos x}\right)^2} \\
&= \frac{1}{\cos x} + 2\cos x - \left(\cos x + \frac{1}{\cos x}\right) \quad \text{vì } 0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x > 0 \\
&= \cos x = VP.
\end{aligned}$$

Vậy $\frac{2 - \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x} - \sqrt{\cos^2 x + \tan^2 x + 3} = \cos x$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Câu 50. Chứng minh các đẳng thức sau : $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$

Lời giải

Ta có: $\tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x$

$$= \frac{\sin^2 x - \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x (1 - \cos^2 x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x \cdot \sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x \cdot \sin^2 x \quad (\text{đpcm})$$

Câu 51. Chứng minh đẳng thức sau: $\frac{\sin x + \cos x - 1}{1 - \cos x} = \frac{2 \cos x}{\sin x - \cos x + 1}$

Lời giải

Ta có: $\frac{\sin x + \cos x - 1}{1 - \cos x} = \frac{2 \cos x}{\sin x - \cos x + 1}$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x - 1)(\sin x - \cos x + 1) = 2 \cos x (1 - \cos x)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - (\cos x - 1)^2 = 2 \cos x - 2 \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 2 \cos x - 2 \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow -2 \cos^2 x + 2 \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0$$

Vậy: $\frac{\sin x + \cos x - 1}{1 - \cos x} = \frac{2 \cos x}{\sin x - \cos x + 1}$

Câu 52. Cho $\tan \alpha = 2$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sin \alpha + 2 \cos \alpha}{\sqrt{\sin \alpha \cdot \cos \alpha + 2 \sin^2 \alpha + 2}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Lời giải

Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos \alpha < 0$, suy ra $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$

Đặt $A = \frac{\sin \alpha + 2 \cos \alpha}{\sqrt{\sin \alpha \cdot \cos \alpha + 2 \sin^2 \alpha + 2}}$. Ta có biến đổi sau:

$$A = \frac{-\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 2 \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}}{\sqrt{\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} + 2 \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + 2 \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha}}} = \frac{-\tan \alpha - 2}{\sqrt{\tan \alpha + 2 \cdot \tan^2 \alpha + 2 \cdot (1 + \tan^2 \alpha)}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(Đpcm)

Câu 53. Cho tam giác ABC . Chứng minh :

- a. $\sin B = \sin(A+C)$. b. $\cos(A+B) = -\cos C$.
 c. $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$. d. $\cos(B-C) = -\cos(A+2C)$.
 e. $\cos(A+B-C) = -\cos 2C$. f. $\cos \frac{-3A+B+C}{2} = \sin 2A$.
 g. $\sin \frac{A+B+3C}{2} = \cos C$. h. $\tan \frac{A+B-2C}{2} = \cot \frac{3C}{2}$.

Lời giải

a. Vì A, B, C là 3 góc của $\triangle ABC$ nên ta có:

$$\begin{aligned} \angle A + \angle B + \angle C &= 180^\circ \\ \Rightarrow \angle B &= 180^\circ - (\angle A + \angle C) \\ \Rightarrow \sin B &= \sin [180^\circ - (A+C)] = \sin(A+C) \end{aligned}$$

$$\sin B = \sin(A+C)$$

Vậy

b. Vì A, B, C là 3 góc của $\triangle ABC$ nên ta có:

$$\begin{aligned} \angle A + \angle B + \angle C &= 180^\circ \\ \Rightarrow \angle A + \angle B &= 180^\circ - \angle C \\ \Rightarrow \cos(A+B) &= \cos [180^\circ - C] = -\cos C \end{aligned}$$

$$\cos(A+B) = -\cos C$$

Vậy

c. Vì A, B, C là 3 góc của $\triangle ABC$ nên ta có:

$$\begin{aligned}
\angle A + \angle B + \angle C &= 180^\circ \\
\Rightarrow \angle A + \angle B &= 180^\circ - \angle C \\
\Rightarrow \frac{\angle A + \angle B}{2} &= \frac{180^\circ - \angle C}{2} = 90^\circ - \frac{\angle C}{2} \\
\Rightarrow \sin\left(\frac{\angle A + \angle B}{2}\right) &= \sin\left(90^\circ - \frac{\angle C}{2}\right) = \cos \frac{\angle C}{2}
\end{aligned}$$

$$\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$$

Vậy

d. Vì $\angle A, \angle B, \angle C$ là 3 góc của $\triangle ABC$ nên ta có:

$$\begin{aligned}
\angle A + \angle B + \angle C &= 180^\circ \\
\Rightarrow \angle B + \angle C &= 180^\circ - \angle A \\
\Rightarrow \angle B + \angle C - 2\angle C &= 180^\circ - \angle A - 2\angle C \\
\Rightarrow \angle B - \angle C &= 180^\circ - (\angle A + 2\angle C) \\
\Rightarrow \cos(B - C) &= \cos[180^\circ - (A + 2C)] = -\cos(A + 2C)
\end{aligned}$$

$$\cos(B - C) = -\cos(A + 2C)$$

Vậy

e. Vì $\angle A, \angle B, \angle C$ là 3 góc của $\triangle ABC$ nên ta có:

$$\begin{aligned}
\angle A + \angle B + \angle C &= 180^\circ \\
\Rightarrow \angle A + \angle B &= 180^\circ - \angle C \\
\Rightarrow \angle A + \angle B - \angle C &= 180^\circ - \angle C - \angle C \\
\Rightarrow \angle A + \angle B - \angle C &= 180^\circ - 2\angle C \\
\Rightarrow \cos(A + B - C) &= \cos(180^\circ - 2C) = -\cos 2C
\end{aligned}$$

$$\cos(A + B - C) = -\cos 2C$$

Vậy

f. Vì $\angle A, \angle B, \angle C$ là 3 góc của $\triangle ABC$ nên ta có:

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$\Rightarrow B + C = 180^\circ - A$$

$$\Rightarrow -3A + B + C = -3A + 180^\circ - A$$

$$\Rightarrow -3A + B + C = 180^\circ - 4A$$

$$\Rightarrow \frac{-3A + B + C}{2} = \frac{180^\circ - 4A}{2} = 90^\circ - 2A$$

$$\Rightarrow \cos \frac{-3A + B + C}{2} = \cos(90^\circ - 2A) = \sin 2A$$

$$\cos \frac{-3A + B + C}{2} = \sin 2A$$

Vậy

g. Vì A, B, C là 3 góc của $\triangle ABC$ nên ta có:

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$\Rightarrow A + B = 180^\circ - C$$

$$\Rightarrow A + B + 3C = 180^\circ - C + 3C$$

$$\Rightarrow A + B + 3C = 180^\circ + 2C$$

$$\Rightarrow \frac{A + B + 3C}{2} = \frac{180^\circ + 2C}{2} = 90^\circ + C$$

$$\Rightarrow \sin \left(\frac{A + B + 3C}{2} \right) = \sin(90^\circ + C) = \cos C$$

$$\sin \frac{A + B + 3C}{2} = \cos C$$

Vậy

h. Vì A, B, C là 3 góc của $\triangle ABC$ nên ta có:

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$\Rightarrow A + B = 180^\circ - C$$

$$\Rightarrow A + B - 2C = 180^\circ - C - 2C$$

$$\Rightarrow A + B - 2C = 180^\circ - 3C$$

$$\Rightarrow \frac{A + B - 2C}{2} = \frac{180^\circ - 3C}{2} = 90^\circ - \frac{3C}{2}$$

$$\Rightarrow \tan \left(\frac{A + B - 2C}{2} \right) = \tan \left(90^\circ - \frac{3C}{2} \right) = \cot \frac{3C}{2}$$

$$\tan \frac{A + B - 2C}{2} = \cot \frac{3C}{2}$$

Vậy

