

Câu 1. (3 điểm)

1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x^4 + 4$

b) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24$

2. Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Câu 2. (2 điểm)

$$A = \left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{2 - x} + \frac{1}{x+2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x+2} \right)$$

1) Cho biểu thức:

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của A, biết $|x| = \frac{1}{2}$

c) Tìm giá trị của x để $A < 0$

d) Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

2) Tìm số dư trong phép chia của biểu thức:

$(x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2012$ cho đa thức $x^2 + 10x + 21$

Câu 3. (3,5 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$, M là một điểm tùy ý trên đường chéo BD. Kẻ $ME \perp AB$, $MF \perp AD$

a) Chứng minh $DE = CF$

b) Chứng minh ba đường thẳng DE, BF, CM đồng quy

c) Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác $AEMF$ lớn nhất.

Câu 4. (1,5 điểm)

a) Cho ba số dương a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$.

b) Cho a, b dương và $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$.

Tính: $a^{2013} + b^{2014}$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$\begin{aligned} 1a. \quad & x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 \\ & = (x^4 + 4x^2 + 4) - (2x)^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\ & = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1b. \quad & (x+2)(x+3)(x+4)(x+5) - 24 \\ & = (x^2 + 7x + 11 - 1)(x^2 + 7x + 11 + 1) - 24 \\ & = [(x^2 + 7x + 11)^2 - 1] - 24 \\ & = (x^2 + 7x + 11)^2 - 5^2 \\ & = (x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 16) \\ & = (x+1)(x+6)(x^2 + 7x + 16) \end{aligned}$$

2. Nhân cả 2 vế của $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ với $a+b+c$, rút gọn suy ra đpcm

Câu 2.

1)

a) Rút gọn kết quả : $A = \frac{-1}{x-2}$

$$|x| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{4}{3} \\ A = \frac{4}{5} \end{cases}$$

b)

c) $A < 0 \Leftrightarrow x > 2$

d) $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{-1}{x-2} \in \mathbb{Z} \dots \Rightarrow x \in \{1; 3\}$

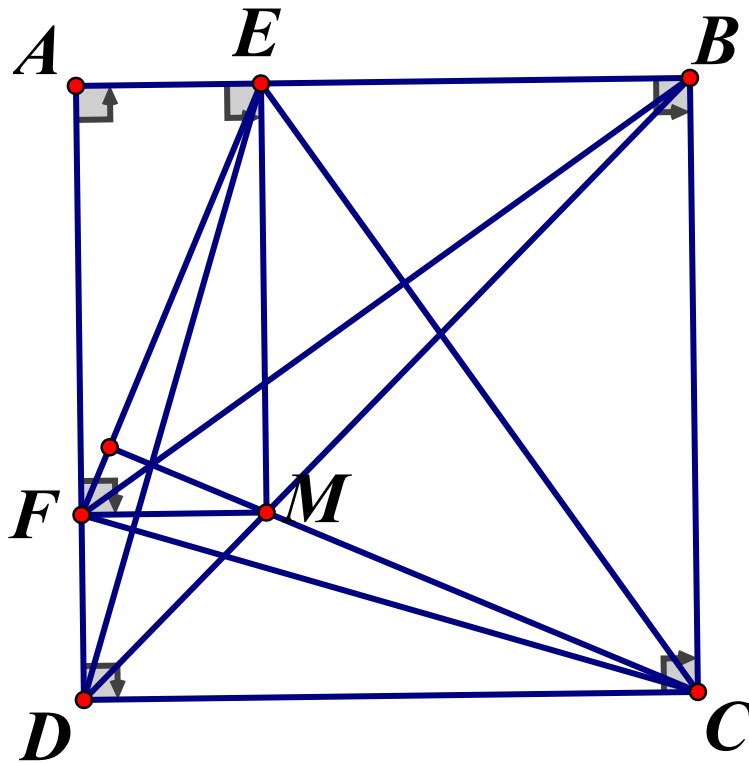
2) Đặt $P(x) = (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2012$
 $= (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 2012$

Đặt $x^2 + 10x + 21 = t$

Ta có: $P(x) = (t-5)(t+3) + 2012 = t^2 - 2t + 1997$

Vậy số dư của phép chia là 1997

Câu 3.



- Chứng minh $AE = FM = DF \Rightarrow \triangle AED = \triangle DFC \Rightarrow dfcm$
- DE, BF, CM là ba đường cao của $\triangle EFC \Rightarrow dfcm$
- Có chu vi hình chữ nhật $AEMF = 2a$ không đổi
 $\Rightarrow ME + MF = a$ không đổi
 $\Rightarrow S_{AEMF} = ME \cdot MF$ lớn nhất $\Leftrightarrow ME = MF$ (AEMF là hình vuông)
 $\Rightarrow M$ là trung điểm của BD.

Câu 4.

$$a + b + c = 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \\ \frac{1}{b} = 1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \\ \frac{1}{c} = 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \end{cases}$$

- Từ

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right)$$

$$\geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

$$\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$$

Dấu bằng xảy ra

b)

$$(a^{2001} + b^{2001})(a + b) - (a^{2000} + b^{2000})ab = a^{2002} + b^{2002}$$

$$\Rightarrow (a + 1) - ab = 1$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$a = 1 \Rightarrow b^{2000} = b^{2001} \Rightarrow \begin{cases} b = 1(tm) \\ b = 0(ktm) \end{cases}$$

Vi

$$b = 1 \Rightarrow a^{2000} = a^{2001} \Rightarrow \begin{cases} a = 1(tm) \\ a = 0(ktm) \end{cases}$$

Vi

Vậy $a = 1; b = 1 \Rightarrow a^{2013} + b^{2014} = 2$