

CD11: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC, TÌM GTLN, GTNN

Dạng 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện Lạng Giang 2022 - 2023)

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = \sqrt{x} + (x - 2y + 1)^2 + 10$ với $x \geq 0$ là:

A. 10 B. 11 C. 1 D. -10

Câu 2. (HSG 7 huyện Lục Nam - Bắc Giang 2021 - 2022)

Cho số $x \in \mathbb{Z}$ để $B = \frac{2018 - x}{2017 - x}$ có giá trị lớn nhất. Giá trị lớn nhất của B là :

A. 1. B. 4 C. 3. D. 2.

Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Thủy - Phú Thọ 2021 - 2022)

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |y - 2| + |y - 5|$ là

A. 2 B. 3 C. 5 D. 7

Câu 4. (HSG 7 huyện Thanh Thủy - Phú Thọ 2021 - 2022)

Với x nguyên, giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{2022 - x}{2 - x}$ là

A. 2021 B. 2020 C. 2019 D. 2018

Câu 5. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, huyện Nam Trà My, huyện Thăng Bình, trường Đào Duy Từ 2018 - 2019; huyện Lâm Thao 2016 - 2017)

Cho $(a - b)^2 + 6ab = 36$. Giá trị lớn nhất của $x = a.b$ là:

A. 6 B. -6 C. 7 D. 5

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Than Uyên - Lai Châu 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{2024}{4 - |2022x - 1|}$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Lương Tài - Bắc Ninh 2022 - 2023)

Cho x thỏa mãn: $|x - 2| + |x - 3| + |x - 4| + |x - 5| = 4$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của x , M là giá trị lớn nhất của x . Tính giá trị của $A = m + M$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Lương Tài - Bắc Ninh 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + \dots + |x - 23|$.

Câu 4. (HSG 7 trường Bồ Lý 2015 - 2016; huyện Hoàng Hóa; trường Phạm Kính Ân 2022 - 2023)

Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

$$A = |x + 1| + 5$$

a)

$$B = \frac{x^2 + 15}{x^2 + 3}$$

b)

Câu 5. (HSG 7 huyện Hậu Lộc 2016 - 2017; huyện Bồ Trách, huyện Vị Thanh 2017 - 2018; huyện Hà Đông 2022 - 2023)

Cho ba số a, b, c thỏa mãn: $0 \leq a \leq b+1 \leq c+2$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của c .

Câu 6. (HSG 7 huyện Bình Xuyên - Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Cho x là số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |2x-1| + |2x-2| + \dots + |2x-10|$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2022 - 2023)

Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 2023ca - ab - bc$.

Câu 8. (HSG 7 huyện Diễn Châu 2022 - 2023)

Tìm số nguyên x để biểu thức sau đạt giá trị lớn nhất, tìm giá trị lớn nhất đó: $P = \frac{x+1}{2x-2}$.

Câu 9. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

$$D = \frac{2022}{2023 - |x - 2024|} \quad \text{với } x \in \mathbb{Z}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

Câu 10. (HSG 7 huyện Thái Hòa - Nghệ An 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = |x+1| + |x-1| + \sqrt{x^2+4}$.

Câu 11. (HSG 7 huyện Đông Hưng, huyện Hưng Hà, trường Lê Quý Đôn - Hà Tĩnh, TP Ninh Bình 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F = |x-2022| + |x-2023|$.

Câu 12. (HSG 7 huyện Hà Trung 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |x-2021| + |x-2022| + |x-2023|$.

Câu 13. (HSG 7 huyện Lập Thạch - Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Cho biểu thức $A = \frac{2026-x}{x-2023}$. Tìm x nguyên để A có giá trị nhỏ nhất.

Câu 14. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |2x-4| + |2x-6| + |2x-8|$.

Câu 15. (HSG 7 Ninh Bình 2022 - 2023)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{27-2x}{12-x}$ (với x là số nguyên).

Câu 16. (HSG 7 trường Giao Tân 2016 - 2017; trường Lê Hồng Phong 2018 - 2019; huyện Trương Dương 2022 - 2023)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = (2x-5y)^2 - (15y-6x)^2 - |xy-90|$.

Câu 17. (HSG 7 trường Lang Chánh 2022 - 2023)

Cho các số không âm x, y, z thoả mãn: $x + 3z = 2022$ và $x + 2y = 2023$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = x + y + z + \frac{1}{2}$$

Câu 18. (HSG 7 TP Bắc Giang 2022 - 2023)

$$C = \frac{|x - 2022| + 2023}{|x - 2022| + 2024}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Câu 19. (HSG 7 trường Hiệp Hòa 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = |3x - 4| + |5x - 7| - x + 2025$.

Câu 20. (HSG 7 huyện Gia Viễn - Ninh Bình 2022 - 2023)

$$P = 6 \cdot \left| y - \frac{1}{8} \right| + x^2 - 4x + 7.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Câu 21. (HSG 7 huyện Hương Khê-Hà Tĩnh 2022 - 2023)

$$P = \frac{4049 - 2x}{x - 2023} \quad (x \neq 2023).$$

Cho biểu thức: Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Câu 22. (HSG 7 huyện Thái Thụy - Thái Bình 2022 - 2023)

$$E = \frac{a - 5}{a - 2}$$

Cho biểu thức với a là số nguyên. Tìm giá trị nguyên nhỏ nhất của E ?

Câu 23. (HSG 7 huyện Sông Lô, trường Đôn Nghĩa-Hưng Hà 2022 - 2023)

$$P = \frac{14 - x}{4 - x}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức với x là số nguyên khác 4.

Câu 24. (HSG 7 trường Lý Nam Đế - Hưng Hà 2022 - 2023)

$$B = \frac{2011}{2012 - |x - 2010|}$$

Tìm x nguyên để biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất

Câu 25. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

$$D = \frac{2(x - 1)^2 + 2(y - 2)^2 + 100}{(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 2}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

Câu 26. (HSG 7 huyện Hương Khê - Hà Tĩnh, trường Tân Tiến - Hưng Hà 2022 - 2023)

$$C = \frac{2|x - 1| + 3}{|x - 1| + 1}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

Câu 27. (HSG 7 huyện Tam Dương - Vĩnh phúc 2016 - 2017; huyện Phủ Lý, trường THCS Lý Tự Trọng 2018 - 2019; huyện Hưng Hà, Vũng Tàu 2022 - 2023)

$$M = \frac{2016x - 2016}{3x + 2}$$

Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức có giá trị nhỏ nhất.

Câu 28. (HSG 7 huyện Hoàng Hoá - Thanh Hoá 2017 - 2018; trường Nguyễn Tông Quai - Hưng Hà 2022 - 2023)

$$B = \frac{x^2 + y^2 + 3}{x^2 + y^2 + 2}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

Câu 29. (HSG 7 trường Minh Khai - Hưng Hà 2022 - 2023)

$$C = \frac{|x - 2017| + 2018}{|x - 2017| + 2019}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

Câu 30. (HSG 7 trường Cự Khê 2016 - 2017; trường Lưu Khánh Đàm - Hưng Hà 2022 - 2023)

$$A = (x - 2)^2 + |y - x| + 3$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Câu 31. (HSG 7 trường Hồng Lĩnh - Hưng Hà 2022 - 2023)

$$K = (3x - 2y)^2 - (4y - 6x)^2 - |x + y - 5|$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau

Câu 32. (HSG 7 huyện Đất Mũi 2016 - 2017; huyện Hương Khê - Hà Tĩnh 2017 - 2018; huyện Rạch Giá - Kiên Giang 2018 - 2019; trường Hồng Lĩnh - Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho a, b, c, d là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$E = |x - a| + |x - b| + |x - c| + |x - d|$$

Câu 33. (HSG 7 trường Dân Chủ - Hưng Hà 2022 - 2023)

$$C = |x - 2| + (x - y)^2 + 3\sqrt{z^2 + 9} + 16$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Câu 34. (HSG 7 trường THCS Tân Ước 2013 - 2014; huyện Hương Khê (và Đề 326) 2016 - 2017; trường THCS Hồng Liên, huyện Phú Lý - Hà Nam, trường Hoàng Quyên, trường Lý Tự Trọng, trường Phong Đạt 2018 - 2019; trường Thái Hưng - Hưng Hà 2022 - 2023)

$$A = |2x - 2| + |2x - 2013|$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Câu 35. (HSG 7 trường Trần Thủ Độ - Hưng Hà 2022 - 2023)

$$B = \frac{2|2x - 3| + 7}{|2x - 3| + 5}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của

Câu 36. (HSG 7 huyện Hoằng Hoá - Thanh Hoá 2017 - 2018; trường Lê Tư Thành - Hưng Hà, Mường La - Sơn La, huyện Sóc Sơn 2022 - 2023)

$$\frac{7n - 8}{2^n - 3}$$

Tìm số tự nhiên n để phân số có giá trị lớn nhất.

Câu 37. (HSG 7 trường Điện Nông - Hưng Hà 2022 - 2023)

$$P = \frac{3|x - 2| + 2020}{|x - 2| + 2}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

Câu 38. (HSG 7 huyện Hưng Hà - Thái Bình 2021 - 2022)

$$B = \frac{2022 - x}{2021 - x}$$

Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để có giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Câu 39. (HSG 7 huyện Ý Yên - Nam Định 2021 - 2022)

$$A = 4y - 2y^2 - 5 - |2x - 3y + 1|$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

Câu 40. (HSG 7 huyện Lục Ngạn - Bắc Giang 2021 - 2022)

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = |x - 2019| + |x - 2020| + |x - 2021|$.

Câu 41. (HSG 7 huyện Lục Nam - Bắc Giang 2021 - 2022)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = (2x - 5y)^2 - (15y - 6x)^2 - |xy - 40|$.

Câu 42. (HSG 7 huyện Lục Nam - Bắc Giang 2021 - 2022)

Cho $x = 1 - y$, $x > 0$, $y > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^2 - x}{x} + \frac{b^2 + y}{y}$ (a và b là hằng số dương đã cho).

Câu 43. (HSG 7 Thị xã An Nhơn 2021 - 2022)

Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức $B = \frac{22 - 3x}{4 - x}$ có giá trị lớn nhất.

Câu 44. (HSG 7 huyện Mỹ Đức - Hà Nội 2021 - 2022)

Cho biểu thức: $Q = |x - 2020| + |x - 2021| + |x - 2022|$. Tìm x để biểu thức Q có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Câu 45. (HSG 7 huyện Ứng Hòa - Hà Nội 2021 - 2022)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |2021 - x| + |2022 - x|$.

Câu 46. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2014 - 2015; huyện Phù Cát - Bình Định 2017 - 2018; TP Vũng Tàu 2021 - 2022; huyện Krông Ana 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |x - 2| + |2x - 3| + |3x - 4|$.

Câu 47. (HSG 7 thị xã Cửa Lò - Nghệ An 2021 - 2022)

Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn: $a + 3c = 2021$, $a + 2b = 2022$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = a + b + c$.

Câu 48. (HSG 7 huyện Vũ Thư - Thái Bình 2021 - 2022)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C = 2022 + |3y - 1| + (2x - y + 3)^2$.

Câu 49. (HSG 7 thành phố Thái Bình 2021 - 2022)

Cho biểu thức: $A = \frac{7x - 8}{2x - 3}$ với $x \neq \frac{3}{2}$.

1. Tính giá trị của biểu thức A biết $\left|x + \frac{1}{3}\right| - 2 = -1$.

2. Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A có giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Câu 50. (HSG 7 huyện Bát Xát - Lào Cai 2021 - 2022)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{2011}{2012 - 3|x - 2010|}$.

Câu 51. (HSG 7 huyện Mường La - Sơn La 2021 - 2022)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{|x - 2016| + 2017}{|x - 2016| + 2018}$.

Câu 52. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2015 - 2016; huyện Bồ Trách - Quảng Bình 2017 - 2018; Chư Sê - Gia Lai 2021 - 2022)

Cho $x + y = 1$ và $x > 0, y > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}$ (a và b là các hằng số dương đã cho).

Câu 53. (HSG 7 huyện Lý Nhân - Hà Nam 2021 - 2022)

Tìm số nguyên y để biểu thức $D = |y - 4| + |y - 10|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 54. (HSG 7 huyện Quảng Trạch - Quảng Bình 2021 - 2022)

Tìm một số có ba chữ số sao cho tỷ số giữa số đó với tổng các chữ số của nó có giá trị nhỏ nhất.

Câu 55. (HSG 7 huyện Quảng Trạch - Quảng Bình 2021 - 2022)

Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ ta có: $A = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{12}$.

Câu 56. (HSG 7 huyện Đức Thọ - Hà Tĩnh 2021 - 2022)

Tìm số tự nhiên n để phân số $B = \frac{10n - 3}{4n - 10}$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 57. (HSG 7 huyện Tam Nông - Phú Thọ 2021 - 2022; huyện Lâm Thao 2022 - 2023)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{|x - 2022| - |x - 2023| + |x - 2024| + 2022}{|x - 2022| + |x - 2023| + |x - 2024|}$

Câu 58. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa - Thanh Hóa 2021 - 2022)

Cho x, y, z là ba số thực tùy ý thỏa mãn $x + y + z = 0$ và $-1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1; -1 \leq z \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = x^2 + y^4 + z^6$.

Câu 59. (HSG 7 thị xã Kinh Môn - Hải Dương 2021 - 2022)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |2x - y| - 3|2y - 4x| - 2x^2 + 8x + 2014$.

Câu 60. (HSG 7 huyện Tiền Hải - Thái Bình 2021 - 2022)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{40 - 3x}{13 - x}$ với x là số nguyên khác 13.

Câu 61. (HSG 7 trường Lê Hồng Phong 2018 - 2019)

Cho $A = |2x^4 + 3x^2 + 1| - |2x^4 - x^2 - 1|$. Chứng tỏ rằng giá trị biểu thức A luôn không âm với mọi giá trị của x .

Câu 62. (HSG 7 huyện Tân Bình - TP Hồ Chí Minh, trường Nguyễn Trung Trực, trường Nguyễn Trãi 2018 - 2019)

Tìm số tự nhiên x để phân số $\frac{7x - 8}{2x - 3}$ có giá trị lớn nhất.

Câu 63. (HSG 7 trường Bảo Phương, trường Thanh Thùy 2018 - 2019)

Tìm số nguyên x để M đạt giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị nhỏ nhất đó $M = \frac{x - 14}{4 - x}$

Câu 64. (HSG 7 trường Trần Thiện, trường Thanh Mai 2018 - 2019)

Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |x - 2008| + |x - 2009| + |y - 2010| + |x - 2011| + 2011$

Câu 65. (HSG 7 trường Hồng Dương 2017 - 2018; trường Điện Hồng 2018 - 2019)

Với giá trị nào của x thì biểu thức: $P = -x^2 - 8x + 5$ có giá trị lớn nhất? Tìm giá trị lớn nhất đó.

Câu 66. (HSG 7 trường Phương Trung, trường Bình Hân 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |x - 2001| + |x - 1|$

Câu 67. (HSG 7 huyện Anh Sơn 2016 - 2017; Đ164 huyện 2018 - 2019)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = |x| - |x - 2|$

Câu 68. (HSG 7 huyện Thái Thụy - Thái Bình 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = |x - 2017| + |x - 2018| + |x - 2019|$

Câu 69. (HSG 7 huyện Thường Tín - Hà Nội 2018 - 2019)

Tìm GTLN của: $A = \frac{|x - 2019| + 2020}{|x - 2019| + 2021}$

Câu 70. (HSG 7 trường Mỹ Hưng 2016 - 2017; trường Hùng Thụ 2017 - 2018; trường Cù Chính Lan 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A = |x - 2013| + |x - 2014| + |x - 2015|$

Câu 71. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2016 - 2017; trường Nhơn Trí 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của đa thức $g(x) = 16x^4 - 72x^2 + 90$

Câu 72. (HSG 7 huyện Lâm Thao 2016 - 2017; huyện Tân An, trường Phan Đình Phùng 2017 - 2018; huyện Hoài Nhơn - Bình Định, trường Đào Duy Từ, huyện Nam Trà My, huyện Thăng Bình 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của A , biết: $A = |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + zx - 2000|$

Câu 73. (HSG 7 trường Quang Trung 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau khi x thay đổi: $B = |x - 2| + |3 - x|$

Câu 74. (HSG 7 huyện Hiệp Đức, trường Thanh Thùy 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $C = \frac{|x - 2017| + 2018}{|x - 2017| + 2019}$

Câu 75. (HSG 7 huyện Tân Lạc - Hòa Bình 2015 - 2016; huyện Nam Sách - Hải Dương 2017 - 2018; huyện Phú Ninh 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2014 - x| + |2015 - x| + |2016 - x|$

Câu 76. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2018 - 2019)

Cho biểu thức $M = \frac{5 - x}{x - 2}$. Tìm x nguyên để M có giá trị nhỏ nhất.

Câu 77. (HSG 7 huyện Lộc Hà 2018 - 2019; huyện Yên Lập 2017 - 2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x + 2| + |2x - 2013|$ với x là số nguyên.

Câu 78. (HSG 7 huyện Việt Yên 2018 - 2019)

Cho 4 số không âm a, b, c, d thỏa mãn $a + b + c + d = 1$. Gọi S là tổng các giá trị tuyệt đối của hiệu từng cặp số có được từ 4 số này. S có thể đạt được giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

Câu 79. (HSG 7 huyện 2016 - 2017; trường Sương Bình 2017 - 2018; trường Thanh Cao 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |x - 2006| + |2007 - x|$

Câu 80. (HSG 7 trường Xuân Dương 2013 - 2014; trường Trà My 2018 - 2019)

Tìm giá trị nguyên lớn nhất của biểu thức $M = \frac{15 - x}{5 - x}$

Câu 81. (HSG 7 huyện Tam Dương - Vĩnh phúc 2016 - 2017; huyện Phủ Lý, trường Lý Tự Trọng 2018 - 2019)

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn: $2x = 3y = 5z$ và $|x - 2y| = 5$. Tìm giá trị lớn nhất của $3x - 2z$

Câu 82. (HSG 7 trường Hưng Vũ 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C = \frac{-4}{(2x - 3)^2 + 5}$

Câu 83. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2017 - 2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $A = |x + 5| + 5$

b) $B = \frac{x^2 + 17}{x^2 + 7}$

Câu 84. (HSG 7 trường Bích Hòa 2017 - 2018)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: $A = \frac{|x| + 1996}{-1997}$

Câu 85. (HSG 7 trường Kim An, trường Phú Trường 2017 - 2018)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \frac{x + 2}{|x|}$ với x là số nguyên.

Câu 86. (HSG 7 huyện Việt Yên 2017 - 2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |2013 - x| + |2014 - x|$

Câu 87. (HSG 7 huyện Thạch Thành - Thanh Hoá 2017 - 2018)

Cho các số a, b, c không âm thỏa mãn: $a + 3c = 2016; a + 2b = 2017$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a + b + c$.

Câu 88. (HSG 7 huyện Hoàng Hoá - Thanh Hoá 2017 - 2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = |2012 - x| + |2013 - x|$

Câu 89. (HSG 7 huyện Mỹ Cày 2017 - 2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x + \sqrt{x} + 1$

Câu 90. (HSG 7 huyện Sông Lô 2017 - 2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |x - 2015| + |x - 2016| + |x - 2017|$

Câu 91. (HSG 7 huyện Sông Lô 2017 - 2018)

Cho bốn số nguyên dương khác nhau thỏa mãn tổng của hai số bất kỳ chia hết cho 2 và tổng của ba số bất kỳ chia hết cho 3 . Tính giá trị nhỏ nhất của tổng bốn số này

Câu 92. (HSG 7 huyện Tam Dương - Vĩnh phúc 2017 - 2018)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \frac{27 - 2x}{12 - x}$ (với $x \in \mathbb{Z}$)

Câu 93. (HSG 7 trường Nguyễn Du 2016 - 2017; trường Ngô Gia Tự, huyện Phù Cát 2017 - 2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B = |x - 2| + |x - 8|$.

Câu 94. (HSG 7 huyện Khoái Châu 2014 - 2015; huyện Mù Cang Chải 2016 - 2017)

$$C = \frac{2(x - 1)^2 + 1}{(x - 1)^2 + 2}$$

Cho biểu thức: . Với giá trị nào của x thì biểu thức C có giá trị nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Câu 95. (HSG 7 đề 351 2014 - 2015; huyện Việt Yên 2016 - 2017)

Cho $F = \frac{42 - x}{x - 15}$. Tìm số nguyên x để F đạt giá trị nhỏ nhất

Câu 96. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2016 - 2017)

Tìm giá trị nhỏ nhất hoặc giá trị lớn nhất của các biểu thức $A = |x + 5| + 5$.

Câu 97. (HSG 7 tỉnh Bắc Giang 2012 - 2013)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |x - 2012| + |x - 2013|$ với x là số tự nhiên.

Câu 98. (HSG 7 huyện Việt Yên 2013 - 2014; thị xã Bình Long 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x - 2| + |2x - 2003|$ với x là số nguyên.

Câu 99. (HSG 7 huyện Thanh Oai 2014 - 2015)

Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $B = \frac{8 - x}{x - 3}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 100. (HSG 7 trường Cao Dương 2016 - 2017; huyện Bát Xát 2022 - 2023)

$$A = \frac{4}{(2x - 3)^2 + 5}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức .

Câu 101. (HSG 7 huyện Bảo Thắng 2022 - 2023)

Cho biểu thức $A = -16 - |3x - 18| - |y - 11|$. Tìm x, y để A đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.

Câu 102. (HSG 7 huyện Tam Nông 2022 - 2023)

Cho 3 số thực x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 6109$ và $0 \leq z \leq y + 4 \leq x + 19$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = x - 2$.

Câu 103. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2022 - 2023)

$$A = \frac{|x - 2020| + |x - 2021| + 2022}{|x - 2020| + |x - 2021| + 2023}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

Câu 104. (HSG 7 trường Nguyệt Ấn - TP Vinh 2022 - 2023)

Cho x, y là các số nguyên dương thỏa mãn: $\frac{x + 2y}{x + y} = \frac{2023}{2022}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của x .

Câu 105. (HSG 7 huyện Vũ Thư 2022 - 2023)

$$D = \sqrt{(2x + 1)^2 + 4} + 3|4y^2 - 1| + 5$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

Câu 106. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

$$A = \frac{2(x - 1)^2 + 4(2x + y - 1)^2 + 19}{(x - 1)^2 + 2(2x + y - 1)^2 + 4}$$

Tính giá trị lớn nhất của biểu thức

Câu 107. (HSG 7 huyện Nho Quan - Ninh Bình 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |x - 2021| + |x - 2023| + |x - 2025|$.

Câu 107. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa - Thanh Hóa 2022 - 2023)

Với a và b là các số thực, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 3a^2 + b^2 + 3ab + 3a + 2b + 3$.

Câu 108. (HSG 7 huyện Kim Thành 2022 - 2023)

Cho a, b, c là các số tự nhiên khác 0 thỏa mãn: $\frac{95}{24} < \frac{a+1}{a} + \frac{b+1}{b} + \frac{c+1}{c} < 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $P = a + b + c + 2011$.

Câu 109. (HSG 7 huyện Văn Bàn 2022 - 2023)

$$B = \frac{2020}{5 + (2x - 3y)^2 + |xy - 24|}$$

Tìm GTLN của biểu thức

Câu 110. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ 2022 - 2023)

$$P = \frac{3 - 2x}{2 - x}$$

Cho biểu thức: $P = \frac{3 - 2x}{2 - x}$ với x là số nguyên. Tìm giá trị lớn nhất của P .

Dạng 2.1: Bất đẳng thức về chứng minh tổng phân số tự nhiên

Câu 1. (HSG 7 huyện Đồng Xuân 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100}$. Chứng minh rằng $\frac{7}{12} < A < \frac{5}{6}$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Nga Sơn 2022 - 2023)

Cho $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{2023} - 1}$. Chứng minh rằng: $A > \frac{2023}{2}$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2018 - 2019; trường Nguyệt Ấn, huyện Ngọc Lặc 2022 - 2023)

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ thì tổng $S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$ không thể là một số nguyên.

Câu 4. (HSG 7 huyện Cát Tiên - Lâm Đồng 2018 - 2019)

Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 2016$. Chứng minh rằng giá trị biểu

thức sau không phải là một số nguyên: $A = \frac{a}{2016 - c} + \frac{b}{2016 - a} + \frac{c}{2016 - b}$

Câu 5. (HSG 7 đề 283 2018 - 2019)

Cho biểu thức $M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t}$ với x, y, z, t là các số tự nhiên khác 0 . Chứng minh $M^{10} < 1025$.

Câu 6. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2015 - 2016; trường Nguyễn Khuyến, trường Thái Phiên 2016 - 2017)

Chứng minh rằng $M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t}$ có giá trị không phải là số tự nhiên ($x, y, z, t \in \mathbb{N}^*$)

Câu 7. (HSG 7 huyện Sơn Dương 2016 - 2017)

Cho $M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ với $a, b, c > 0$. Chứng tỏ rằng M không phải là số nguyên.

Câu 8. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa - Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho $C = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2023^2}$. Chứng minh rằng $C < \frac{3}{4}$.

Câu 9. (HSG 7 huyện Tam Điệp 2021 - 2022; huyện Vũ Thư, huyện Thường Xuân 2022 - 2023)

Cho biết $a_1 = 1; a_2 = 1 + \frac{1}{2}; a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}; \dots; a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. Chứng minh rằng:

$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \frac{1}{3a_3^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < 2$ với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1

Dạng 2.2: Bất đẳng thức về chứng minh tổng lũy thừa tự nhiên

Câu 1. (HSG 7 trường Võ Thị Sáu 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots + \frac{2022}{4^{2022}}$. Chứng minh rằng: $A < \frac{1}{2}$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Thọ Xuân - Thanh Hóa 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{65} < \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2023^3} < \frac{1}{40}$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} - \frac{4}{5^4} + \frac{5}{5^5} - \dots + \frac{2021}{5^{2021}} - \frac{2022}{5^{2022}} < \frac{5}{36}$.

Câu 4. (HSG 7 TP Vĩnh Yên 2022 - 2023)

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2019}{3^{2019}} < 0,75$$

Chứng tỏ:

Câu 5. (HSG 7 huyện Ninh Giang 2022 - 2023)

$$A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2022}} < \frac{3}{4}$$

Chứng minh rằng:

Câu 6. (HSG 7 huyện Chí Linh 2022 - 2023)

$$S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots + \frac{2023}{4^{2023}} < \frac{1}{2}$$

Chứng minh

Câu 7. (HSG 7 huyện Hà Trung 2022 - 2023)

$$S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$$

Cho biểu thức: với $n \in \mathbb{N}$ và $n > 2$. Chứng minh rằng S không phải là số tự nhiên.

Câu 8. (HSG 7 trường Trần Đức Thông - Hưng Hà, huyện Mường Lát 2022 - 2023)

$$A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

Cho Chứng minh: $A < \frac{3}{16}$

Câu 9. (HSG 7 huyện Quảng Xương 2022 - 2023)

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2023}} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$$

Chứng minh rằng:

Câu 10. (HSG 7 trường Tri Thức tỉnh Đồng Nai 2022 - 2023)

$$\frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{8}$$

Chứng minh:

Câu 11. (HSG 7 huyện Quan Hóa 2021 - 2022; huyện Tiên Du - Bắc Ninh, trường Lê Quý Đôn - Hưng Hà 2022 - 2023)

$$A = \frac{1}{7^2} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{7^8} + \dots + \frac{1}{7^{98}} - \frac{1}{7^{100}}$$

Cho Chứng minh rằng $A < \frac{1}{50}$

Câu 12. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

$$A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$$

Chứng minh rằng:

Câu 13. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

$$D = \left(\frac{1}{2^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{3^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{4^2} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{100^2} - 1 \right)$$

Cho So sánh D với $-\frac{1}{2}$

Câu 14. (HSG 7 trường Lý Nam Đế - Hưng Hà 2022 - 2023)

$$A = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{2}{7^2} + \dots + \frac{2}{2007^2} < \frac{1003}{2008}$$

Chứng minh rằng:

Câu 15. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $S_1 = 1 + \frac{1}{5}; S_2 = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2}; \dots; S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n} (n \in \mathbb{N}^*)$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{5S_1^2} + \frac{1}{5^2S_2^2} + \frac{1}{5^3S_3^2} + \dots + \frac{1}{5^nS_n^2} < \frac{1}{4}$$

Câu 16. (HSG 7 trường Lưu Khánh Đàm - Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $S_n = \frac{1^2 - 1}{1} + \frac{2^2 - 1}{2^2} + \frac{3^2 - 1}{3^2} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$ (với $n \in \mathbb{N}$ và $n > 1$). Chứng minh rằng S_n không là số nguyên.

Câu 17. (HSG 7 trường Dân Chủ - Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $B = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n-1}{(n-1)^2 \cdot n^2}$ (với n là số tự nhiên lớn hơn 1).
Chứng minh rằng: $B < 1$.

Câu 18. (HSG 7 trường Trần Đức Thông - Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{2001}{2000^2 + 1} + \frac{2001}{2000^2 + 2} + \dots + \frac{2001}{2000^2 + 2000}$. Chứng minh rằng: $1 < A^2 < 4$.

Câu 19. (HSG 7 trường Kim Trung - Hưng Hà 2022 - 2023)

Chứng minh tổng: $A = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{2019^2} + \frac{1}{2020^2}$ không phải là một số nguyên.

Câu 20. (HSG 7 huyện Lục Nam 2018 - 2019; trường Điện Nông 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $\frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \dots + \frac{1}{2020^3} < \frac{1}{40}$.

Câu 21. (HSG 7 huyện Hưng Hà - Thái Bình 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{9^2}$. Chứng minh $\frac{2}{5} < A < \frac{8}{9}$.

Câu 22. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ 2021 - 2022)

Cho $A = 1 - \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 - \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2022}$. Chứng tỏ rằng A không phải là số nguyên.

Câu 23. (HSG 7 huyện Lục Ngạn-Bắc Giang 2021 - 2022)

Cho $C = \frac{2020}{2019^2 + 1} + \frac{2020}{2019^2 + 2} + \frac{2020}{2019^2 + 3} + \dots + \frac{2020}{2019^2 + 2019}$.

Chứng minh rằng giá trị của biểu thức C không phải là số nguyên.

Câu 24. (HSG 7 trường Bảo Phương, trường Thanh Thùy 2018 - 2019)

Chứng minh rằng: $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} + \frac{1}{3^{2013}} < \frac{1}{2}$

Câu 25. (HSG 7 trường Bích Hòa 2013 - 2014; trường Hồng Dương 2017 - 2018; huyện Thanh Oai, trường Điện Hồng 2018 - 2019)

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$$

Chứng minh:

Câu 26. (HSG 7 huyện Thường Tín - Hà Nội 2018 - 2019)

$$B = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{2019^3} < \frac{1}{2^2}$$

Chứng minh rằng:

Câu 27. (HSG 7 trường Trần Hưng Đạo 2017 - 2018; trường Vạn Long 2018 - 2019)

Biết $x \in \mathbb{Q}$ và $0 < x < 1$. Chứng minh $x^n < x$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Câu 28. (HSG 7 trường Hương Điền - Nam Hương 2017 - 2018)

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2005^2} < 1$$

Chứng minh:

Câu 29. (HSG 7 huyện Đông Sơn - Thanh Hoá, trường Nguyễn Chích 2017 - 2018)

$$B = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \frac{24}{25} + \dots + \frac{2499}{2500}$$

Cho . Chứng tỏ B không phải là số nguyên.

Câu 30. (HSG 7 huyện Anh Sơn, trường THCS Tào Sơn 2017 - 2018)

$$A = \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2} < 1$$

Chứng minh rằng:

Câu 31. (HSG 7 huyện Trục Ninh 2022 - 2023)

Cho $A = 4^{27} + 4^{1000} + 4^x$. Tìm số tự nhiên x lớn nhất sao cho A là số chính phương.

Câu 32. (HSG 7 TP Thanh Hóa 2022 - 2023)

Gọi a, b là hai giá trị tương ứng của x, y để biểu thức $A = x^2 + 4x + y^2 - 4y + 100$ đạt giá trị nhỏ nhất. Chứng minh rằng:

$$(a + b)^{2023} = a^{2023} + b^{2023}$$

Dạng 2.3 Bất đẳng thức về chứng minh tích của một dãy

Câu 1. (HSG 7 huyện Hưng Hà-Thái Bình 2022 - 2023)

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100}$$

Cho . Chứng minh rằng $P < \frac{1}{10}$

Câu 2. (HSG 7 huyện Quan Sơn 2022 - 2023)

$$\frac{1}{4048} < \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2021}{2022} \cdot \frac{2023}{2024} \right)^2 < \frac{1}{2025}$$

Chứng minh rằng

Dạng 3. Bất đẳng thức dạng chữ

Câu 1. (HSG 7 huyện Phú Lý 2016 - 2017; huyện Dương Nam 2017 - 2018; quận Hà Đông 2022 - 2023)

Cho $a > 2, b > 2$. Chứng minh $ab > a + b$.

Câu 2. (HSG 7 Cẩm Thủy - Nam Định 2021 - 2022; Hậu Lộc 2022 - 2023)

Cho ba số a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 1$$

Chứng minh rằng:

Câu 3. (HSG 7 huyện Tân Ước 2013 - 2014; trường Phú Nhuận 2014 - 2015; huyện Thái Thụy 2015 - 2016; huyện Hương Khê 2016 - 2017; huyện Yên Lập, huyện Hương Sơn 2017 - 2018; huyện Phú Lý - Hà Nam, trường Hoàng Quyên, trường Lý Tự Trọng, huyện Lộc Hà 2018 - 2019; huyện Triệu Sơn - Thanh Hóa, huyện Thanh Sơn - Phú Thọ 2021 - 2022; huyện Hưng Hà, huyện Cẩm Thủy, huyện Thanh Sơn, thị Xã Bỉm Sơn, trường Kinh Môn, huyện Sơn Động 2022 - 2023)

Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn: $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Chứng minh: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

Câu 4. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2015 - 2016; huyện Mỹ Cày 2017 - 2018; huyện Kinh Môn 2018 - 2019; huyện Đông Hưng 2022 - 2023)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + bc + ca)$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Yên Định - Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho tam giác nhọn ABC , trực tâm H . Chứng minh: $HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$

Câu 6. (HSG 7 huyện Yên Định - Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho x, y, z là 3 số thực tùy ý thỏa mãn $x + y + z = 0$ và $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$.

Chứng minh rằng đa thức $x^2 + y^4 + z^6$ có giá trị không lớn hơn 2.

Câu 7. (HSG 7 Quảng Ninh 2022 - 2023)

Giả sử x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 2, chứng minh:

$$S = \frac{x}{yz+1} + \frac{y}{xz+1} + \frac{z}{xy+1} < 2$$

Câu 8. (HSG 7 TP Bắc Ninh 2022 - 2023)

Cho ba số a, b, c thỏa mãn $0 \leq a \leq b+1 \leq c+2$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của c .

Câu 9. (HSG 7 thị xã Hoàng Mai 2022 - 2023)

Cho a, b, c là các số thỏa mãn: $a+b+c=0$. Chứng minh: $2022ab + 2023bc + 4045ca \leq 0$

Câu 10. (HSG 7 huyện Anh Sơn, 2015 - 2016; trường Lê Quý Đôn Hà Đông 2022 - 2023)

Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh: $2(ab + bc + ca) > a^2 + b^2 + c^2$

Câu 11. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh: $M = \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b}$ có giá trị không nguyên.

Câu 12. (HSG 7 trường Dân Chủ - Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng: $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$

Câu 13. (HSG 7 trường Bùi Hữu Diên - Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho 3 số a, b, c là các số nguyên dương sao cho mỗi số nhỏ hơn tổng hai số kia. Chứng minh

$$1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$$

Câu 14. (HSG 7 trường Văn Lang - Hưng Hà 2022 - 2023)

Với a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$

Câu 15. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2016 - 2017; huyện Thanh Miện - Hải Dương 2021 - 2022)

Cho 20 số nguyên khác 0: $a_1; a_2; a_3 \dots a_{20}$ có các tính chất sau:

- + a_1 là số dương.
- + Tổng của ba số viết liền nhau bất kì là một số dương.
- + Tổng của 20 số đó là số âm.

Chứng minh rằng: $a_1 a_{14} + a_{14} a_{12} < a_1 a_{12}$

Câu 16. (HSG 7 huyện Phù Yên - Sơn La, trường Võ Thị Sáu 2017 - 2018; huyện Tiên Phước 2018 - 2019; huyện Yên Mỹ - Hưng Yên, trường Lê Hồng Phong 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: Nếu $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9$ thì $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$

Câu 17. (HSG 7 huyện Sơn Trà - Đà Nẵng 2018 - 2019)

Tìm x, y biết $\left(2x - \frac{1}{6}\right)^2 + |3y + 12| \leq 0$

Câu 18. (HSG 7 huyện Đức Phổ 2015 - 2016; huyện Phú Lý 2016 - 2017; huyện Trà Lý, huyện Năm Căn 2017 - 2018)

Cho các số $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{15}$. Chứng minh rằng: $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}}{a_5 + a_{10} + a_{15}} < 5$

Câu 19. (HSG 7 huyện Triệu Sơn - Thanh Hoá 2017 - 2018)

Gọi a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$

Câu 20. (HSG 7 huyện Cẩm Khê - Phú Thọ 2017 - 2018)

Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Hãy so sánh $\frac{a}{b}$ với $\frac{a+c}{b+d}$.

Câu 21. (HSG 7 trường Nguyễn Du 2016 - 2017)

Chứng minh với mọi $a, b \in \mathbb{Q}$ thì $|a| + |b| \geq |a+b|$.

Câu 22. (HSG 7 huyện Bảo Thắng 2022 - 2023)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com
<https://www.vnteach.com>