



Chương

Bài 2.

# HÀM SỐ LIÊN TỤC

A

## Lý thuyết

### 1. Hàm số liên tục tại một điểm



#### Định nghĩa:

- Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên khoảng  $K$  và  $x_0 \in K$ .  
Hàm số  $y = f(x)$  được gọi là liên tục tại  $x_0$  nếu  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .  
Hàm số  $y = f(x)$  không liên tục tại  $x_0$  được gọi là gián đoạn tại điểm  $x_0$ .

### 2. Hàm số liên tục trên một khoảng

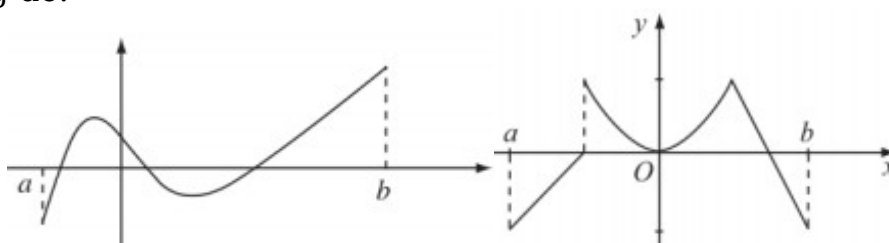


#### Định nghĩa:

- Hàm số  $y = f(x)$  được gọi là liên tục trên một khoảng  $(a; b)$  nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.
- Hàm số  $y = f(x)$  được gọi là liên tục trên đoạn  $[a; b]$  nếu nó liên tục trên khoảng  $(a; b)$  và  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ .

#### Chú ý

- Khái niệm hàm số liên tục trên nửa khoảng, như  $(a; b]; [a; b); (-\infty; b]; [a; +\infty)$  được định nghĩa một cách tương tự.
- Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một “đường liền” trên khoảng đó.





### 3. Một số định lý



#### Định lý 1.

- » Hàm số đa thức liên tục trên  $\mathbb{R}$ .
- » Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) và các hàm số lượng giác thì liên tục trên tập xác định của nó.



#### Định lý 2.

Giả sử  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$  là hai hàm số liên tục tại  $x_0$ .  
Khi đó:

- » Các hàm số  $y = f(x) + g(x), y = f(x) - g(x), y = f(x) \cdot g(x)$  cũng liên tục tại  $x_0$ .
- $f(x)$



#### Định lý 3.

- » Nếu hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$  và  $f(a) \cdot f(b) < 0$  thì tồn tại ít nhất một điểm  $c \in (a; b)$  sao cho  $f(c) = 0$ .

**\* Lưu ý:**

Định lý này thường được áp dụng để chứng minh sự tồn tại nghiệm của phương trình trên một khoảng.

**Có thể phát biểu Định lý 3 dưới một dạng khác như sau:**

- » Nếu hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[a; b]$  và  $f(a) \cdot f(b) < 0$  thì phương trình  $f(x) = 0$  có ít nhất một nghiệm  $x_0 \in (a; b)$ .



B

## Các dạng bài tập

### Dạng 1. Xét tính liên tục của hàm số tại 1 điểm



Phương

✱ **Bài toán:** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên tập  $D$ . Để xét tính liên tục của hàm số  $y = f(x)$  tại điểm  $x_0 \in D$ , ta thực hiện các bước sau

- **Bước 1.** Tính  $f(x_0)$ .
- **Bước 2.** Tìm  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .
- **Bước 3.** So sánh và rút ra kết luận.

Nếu  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  thì hàm số  $f(x)$  liên tục tại điểm  $x_0$ .  
Nếu  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$  thì hàm số  $f(x)$  không liên tục tại điểm  $x_0$ .



#### Ví dụ 1.1.

Xét tính liên tục của hàm số  $f(x) = \frac{2}{x-1}$  tại điểm  $x_0 = 2$

👉 **Lời giải**

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x-1} = 2 = f(2)$$

Vậy hàm số liên tục tại  $x_0 = 2$ .



#### Ví dụ 1.2.

Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x > 0 \\ x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ . Xét tính liên tục của hàm số tại điểm

👉 **Lời giải**

Ta có  $f(0) = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$$

Ta có  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .

Vậy hàm số  $f(x)$  gián đoạn tại điểm  $x_0 = 0$ .



**Ví dụ 1.3.**

Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \end{cases} \text{ tại } x=1$$

**Lời giải**

Ta có  $f(1) = -\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x+1} = -\frac{1}{2}$$

Vậy hàm số  $f(x)$  liên tục tại  $x_0 = 1$ .



**Ví dụ 1.4.**

Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -2 & \text{khi } x = 1 \end{cases} \text{ tại điểm } x_0 = 1.$$

**Lời giải**

Ta có:  $f(1) = -2$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-5)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-5}{x+1} = -2 = f(1)$$

Vậy hàm số  $f(x)$  liên tục tại  $x = 1$ .



**Ví dụ 1.5.**

Xét tính liên tục của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{2x-3}}{2-x} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases} \text{ tại điểm } x_0 = 2$$

**Lời giải**

Ta có:  $f(2) = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \sqrt{2x-3}}{2-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - (2x-3)}{(2-x)(1+\sqrt{2x-3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(2-x)}{(2-x)(1+\sqrt{2x-3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{1+\sqrt{2x-3}} = 1 = f(2) \end{aligned}$$

Vậy hàm số  $f(x)$  liên tục tại  $x_0 = 2$ .



## ▮ Dạng 2. Tìm tham số để hàm số liên tục - gián đoạn tại 1 điểm



### Phương

- **Bước 1.** Tính  $f(x_0)$ .
- **Bước 2.** Tìm  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  hoặc  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x); \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ .
- **Bước 3.** So sánh và rút ra kết luận.
  - » Hàm số  $f(x)$  **liên tục** tại điểm  $x_0$   
 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$
  - » Hàm số  $f(x)$  **gián đoạn** tại điểm  $x_0$



### Ví dụ 2.1.

Tìm tham số  $m$  để hàm số  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - m & \text{khi } x \neq 2 \\ x + m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$  liên tục tại điểm

#### 👉 Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - m) = 8 - m$$

Ta có

$$\text{Và } f(2) = 2 + m$$

$$\text{Để hàm số liên tục tại } x_0 = 2 \Leftrightarrow 8 - m = m + 2 \Leftrightarrow m = 3$$



### Ví dụ 2.2.

Tìm tham số  $m$  để hàm số  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ m^2 + 5m & \text{khi } x = -1 \end{cases}$  liên tục tại điểm

#### 👉 Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-3) = -4$$

Ta có

$$\text{Và } f(-1) = m^2 + 5m$$

$$\text{Để hàm số liên tục tại } x_0 = -1 \Leftrightarrow m^2 + 5m = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -4 \end{cases}$$



### Ví dụ 2.3.

Tìm tham số  $m$  để hàm số  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x+5} - 3}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \\ m^2 + 5m & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$  gián đoạn tại điểm



**Lời giải**

Ta có 
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\sqrt{4x+5} - 3}{x^2 - 1} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x - 4}{(x-1)(x+1)(\sqrt{4x+5} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4}{(x+1)(\sqrt{4x+5} + 3)} = \frac{1}{3}$$

Mặt khác 
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 2m + 3$$

Để hàm số gián đoạn tại  $x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq f(1) \Leftrightarrow 2m + 3 \neq \frac{1}{3} \Leftrightarrow m \neq \frac{-4}{3}$



**Ví dụ 2.4.**

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & \text{khi } x > 1 \\ x^2 + 3, & \text{khi } x < 1 \\ k^2, & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

Cho hàm số  $f(x)$  như trên. Tìm  $k$  để  $f(x)$  liên tục tại  $x = 1$ .

**Lời giải**

Ta có:  $f(1) = k^2$

Mặt khác 
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 3) = 4; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1)^2 = 4 \quad \text{suy ra} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4.$$

Vậy để hàm số liên tục tại  $x = 1$  khi  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 4 = k^2 \Leftrightarrow k = \pm 2$ .



**Ví dụ 2.5.**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$$

Cho hàm số  $f(x)$  như trên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số liên tục tại  $x = 1$ .

**Lời giải**

Hàm số liên tục tại  $x = 1$  khi 
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3m$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = 3m \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3m \Leftrightarrow 3 = 3m \Leftrightarrow m = 1.$$



**Ví dụ 2.6.**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 - \sqrt{8-4x}}{x-1} & \text{khi } x < 1 \\ 14ax & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$$

Cho hàm số  $f(x)$  như trên. Tìm  $a$  để hàm số  $f(x)$  liên tục tại  $x = 1$ .

**Lời giải**

Ta có:  $f(1) = 14a$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 14ax = 14a$$



$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^3 - \sqrt{8-4x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x^6 - (8-4x)}{(x-1)(2x^3 + \sqrt{8-4x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(4x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 8)}{(x-1)(2x^3 + \sqrt{8-4x})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 8}{2x^3 + \sqrt{8-4x}} = 7\end{aligned}$$

$f(x)$  liên tục tại  $x_0 = 1$  khi và chỉ khi  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 14a = 7 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$



### Ví dụ 2.7.

Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{3x + a} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ . Tìm các giá trị của tham số  $a$  để  $f(x)$  liên tục tại  $x = 1$ .

#### Lời giải

Ta có:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{3x + a} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 2)}{3x + a}$

Nếu  $a = -3$  thì  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 2)}{3(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2}{3} = 1 > 0$  và  $f(1) = 0$

Nên hàm số không liên tục tại  $x = 1$ .

Nếu  $a \neq -3$  thì  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 2)}{3x + a} = 0$ , nhưng  $f(1) = 3 + a \neq 0$

Nên hàm số không liên tục tại  $x = 1$ .

Vậy không có giá trị nào của  $a$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.



### Ví dụ 2.8.

Tìm  $m$  để hàm số  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x} & \text{khi } x < 0 \\ m + \frac{x^3 - 3x + 1}{x+2} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$  liên tục tại  $x_0 = 0$ .

#### Lời giải

Ta có:  $f(0) = m + \frac{1}{2}$ .

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{1+x} - 1) + (1 - \sqrt[3]{1+x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \sqrt[3]{1+x}}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

»



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt[3]{1+x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \sqrt[3]{1+x}) \left[ 1 + \sqrt[3]{1+x} + (\sqrt[3]{1+x})^2 \right]}{x \left[ 1 + \sqrt[3]{1+x} + (\sqrt[3]{1+x})^2 \right]} \\ &\gg \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - (1+x)}{x \left[ 1 + \sqrt[3]{1+x} + (\sqrt[3]{1+x})^2 \right]} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{1 + \sqrt[3]{1+x} + (\sqrt[3]{1+x})^2} = \frac{-1}{3} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( m + \frac{x^3 - 3x + 1}{x + 2} \right) = m + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Để hàm số liên tục tại  $x=0$  thì  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow m + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}.$



### Dạng 3. Chứng minh phương trình có nghiệm



#### Phương pháp

- Để chứng minh phương trình  $f(x)=0$  có **ít nhất một nghiệm** trên  $D$ .  
Ta chứng minh hàm số  $y=f(x)$  :  
» Liên tục trên  $D$  và  
» Có hai số sao cho  $f(a).f(b)<0$ .
- Để chứng minh phương trình  $f(x)=0$  có  **$k$  nghiệm** trên  $D$ .  
Ta chứng minh hàm số  $y=f(x)$  :  
» Liên tục trên  $D$  và  
» Chia  $D$  thành  $k$  khoảng  $(a_i; a_{i+1}) (i=1, 2, \dots, k)$  sao cho  $f(a_i).f(a_{i+1})<0$



#### Ví dụ 3.1.

Chứng minh rằng phương trình  $2x^4 - 2x^3 - 3 = 0$  có ít nhất một nghiệm thuộc  $(-1; 0)$ .

#### Lời giải

Đặt  $f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 3$ .

Vì  $f(x)$  là hàm đa thức xác định trên  $\mathbb{R}$  nên liên tục trên  $\mathbb{R}$ .  
 $\Rightarrow f(x)$  liên tục trên  $[-1; 0]$ .

Ta có:  $f(0) = -3; f(-1) = 1 \Rightarrow f(0).f(-1) < 0$

$\Rightarrow f(x) = 0$  có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng  $(-1; 0)$ .



#### Ví dụ 3.2.

Chứng minh rằng phương trình  $6x^3 + 2x^2 - 31x + 10 = 0$  có đúng ba nghiệm phân biệt.

#### Lời giải

Đặt  $f(x) = 6x^3 + 2x^2 - 31x + 10$ .

TXĐ:  $D = \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$  liên tục trên  $[-3; 2]$ .

$\begin{cases} f(-3) = -32 \\ f(0) = 10 \end{cases} \Rightarrow f(-3).f(0) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$  có nghiệm thuộc  $(-3; 0)$ .

$\begin{cases} f(0) = 10 \\ f(1) = -12 \end{cases} \Rightarrow f(0).f(1) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$  có nghiệm thuộc  $(0; 1)$ .

$\begin{cases} f(1) = -12 \\ f(2) = 8 \end{cases} \Rightarrow f(1).f(2) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$  có nghiệm thuộc  $(1; 2)$ .



Mặt khác vì  $f(x)$  là một đa thức bậc ba nên  $f(x)=0$  chỉ có tối đa ba nghiệm.  
Vậy phương trình  $f(x)=0$  có đúng 3 nghiệm phân biệt.



### Ví dụ 3.3.

Chứng minh rằng phương trình  $x - 1 + \sin x = 0$  có nghiệm.

#### Lời giải

Xét hàm số  $f(x) = x - 1 + \sin x$  liên tục trên  $\left[0; \frac{p}{2}\right]$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(0) = -1 \\ f\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{p}{2} \Rightarrow f\left(\frac{p}{2}\right) \cdot f(0) = (-1) < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0 \text{ có nghiệm } x_0 \in \left(0; \frac{p}{2}\right).$$

Vậy phương trình  $x - 1 + \sin x = 0$  có nghiệm.



### Ví dụ 3.4.

Chứng minh rằng phương trình  $x^3 + (m+3)x^2 + (1-m)x - 1 = 0$  luôn có nghiệm

#### Lời giải

Xét hàm số  $f(x) = x^3 + (m+3)x^2 + (1-m)x - 1$  liên tục trên  $\mathbb{R}$

Nên cũng liên tục trên các đoạn  $[0; 1]$

$$f(0) = -1 < 0, \quad f(1) = 4 > 0,$$

Vậy trên khoảng  $(0; 1)$  phương trình có ít nhất nghiệm.



### Ví dụ 3.5.

Chứng minh rằng phương trình  $x^3 - 2x^2 + x - 1 - \frac{2}{x} + \frac{m}{x+3} = 0$  luôn có nghiệm

#### Lời giải

$$x^3 - 2x^2 + x - 1 - \frac{2}{x} + \frac{m}{x+3} = 0 \Leftrightarrow mx + (x-2)(x+3)(x^3 + x + 1) = 0 (*)$$

Đặt  $f(x) = mx + (x-2)(x+3)(x^3 + x + 1)$ .

$$\text{Nhận xét } f \text{ liên tục trên } \mathbb{R} \text{ và } \begin{cases} f(-3) = 18m \\ f(0) = -12m \end{cases}$$

**Trường hợp 1:** Nếu  $m=0$ , phương trình luôn có 1 nghiệm  $x=2$

**Trường hợp 2:** Nếu  $m \neq 0 \Rightarrow (*)$  có ít nhất một nghiệm thuộc  $(-3; 0)$  hoặc  $(0; 2)$

Suy ra:  $\forall m \in \mathbb{R}$ , luôn có ít nhất một nghiệm thuộc  $D$ .

Vậy  $\forall m \in \mathbb{R}$ , phương trình đã cho luôn có ít nhất một nghiệm.



### Ví dụ 3.6.

Chúng minh rằng phương trình  $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = m$  luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số  $m$ .

#### Lời giải

Điều kiện:  $x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

Xét hàm số  $f(x) = \sin x - \cos x - m \sin x \cos x$  liên tục trên  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  và

$$f(0) = -1 < 0.$$

Do đó phương trình  $f(x) = 0$  có ít nhất một nghiệm  $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x_0 \neq k\frac{\pi}{2}$ .  
Vậy phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm.



### Ví dụ 3.7.

Chúng minh rằng phương trình  $a \cos 2x + b \sin x + \cos x = 0$  luôn có nghiệm với mọi tham số  $a, b$

#### Lời giải

Đặt  $f(x) = a \cos 2x + b \sin x + \cos x$  có tập xác định là  $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

$$f(0) = a + 1; f(\pi) = a - 1; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -a + b; f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -a - b$$

Vì  $f(0) + f(\pi) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$  nên trong bốn số phải có hai số mà tích của chúng bé hơn hoặc bằng không.

Vậy phương trình  $f(x) = 0$  luôn có nghiệm với mọi tham số  $a, b$ .



### Ví dụ 3.8.

Chúng minh rằng phương trình  $a \cos 3x + b \cos 2x + c \cos x + \sin x = 0$  luôn có nghiệm trên  $[0; 2\pi]$

#### Lời giải

Xét hàm số  $f(x) = a \cos 3x + b \cos 2x + c \cos x + \sin x$  liên tục trên  $\mathbb{R}$

Nên cũng liên tục trên các đoạn  $[0; 2\pi]$

$$f(0) = a + b + c, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -b + 1, f(\pi) = -a + b - c, f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -b - 1$$



Suy ra  $f\left(0\right)+\left(\frac{p}{2}\right)+f\left(p\right)+\left(\frac{3p}{2}\right)=0$  nên suy ra nếu không có giá trị nào trong bốn giá trị bằng 0 thì ít nhất có một giá trị âm và dương.  
Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>