

Bài 1 (2,0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{x+5+2\sqrt{x^2-25}}{-2x+10-\sqrt{x^2-25}}$ với $x \neq \pm 5$, $x < -5$.

b) Chứng minh đẳng thức: $\sqrt{5} - \sqrt{3-12\sqrt{5}} = 1$.

Bài 2 (2,0 điểm).

a) Giải phương trình $x^2 - 2x - x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 4 = 0$.

b) Cho hàm số $y = x - 2m - 1$ với m là tham số. Tính theo m tọa độ các giao điểm A, B của đồ thị hàm số với các trục Ox, Oy . Gọi H là hình chiếu của O trên AB . Xác định giá trị của m để $OH = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 3. (2,0 điểm).

a) Cho $A = \frac{9\sqrt{x}+12}{3\sqrt{x}+2}$ (với $x \geq 0$). Tìm các giá trị của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

b) Cho 2 số nguyên a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 + 1 = 2(ab + a + b)$. Chứng minh a và b là hai số chính phương liên tiếp.

Bài 4. (3,0 điểm).

Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi H là một điểm thay đổi trên đoạn AB (H khác A và B). Đường thẳng vuông góc với AB tại H cắt nửa đường tròn (O) tại C . Qua A kẻ đường thẳng XY vuông góc với AB . Gọi I là trung điểm của AC , OI cắt đường thẳng XY tại M , MB cắt CH tại K .

a) Chứng minh $MC \perp OC$.

b) Chứng minh $KH \perp AB = CH \perp AO$ và K là trung điểm của CH .

c) Xác định vị trí của H để chu vi tam giác ACB đạt giá trị lớn nhất? Tìm giá trị lớn nhất đó theo R .

Bài 5 (1,0 điểm).

Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$.

----- Hết -----

Họ và tên thí sinh:.....SBD:.....

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Bài	Ý	Đáp án	Điểm	
Bài 1 2,0 Điểm	a	Rút gọn biểu thức $A = \frac{x+5+2\sqrt{x^2-25}}{-2x+10-\sqrt{x^2-25}}$ với $x \neq \pm 5, x < -5$.		
		với $x \neq \pm 5, x < -5$ ta có: $A = \frac{-\left(\sqrt{-(x+5)}\right)^2 + 2\sqrt{-(x+5)(5-x)}}{2(5-x) - \sqrt{-(x+5)(5-x)}}$	0,5	1,0
		$A = \frac{\sqrt{-(x+5)} \cdot \frac{2\sqrt{5-x} - \sqrt{-(x+5)}}{\sqrt{5-x} - \sqrt{-(x+5)}}}{\sqrt{5-x} \cdot \frac{2\sqrt{5-x} - \sqrt{-(x+5)}}{\sqrt{5-x} - \sqrt{-(x+5)}}}$	0,25	
		$A = \frac{\sqrt{-(x+5)}}{\sqrt{5-x}} = \sqrt{\frac{x+5}{x-5}}$	0,25	
	b	Chứng minh đẳng thức: $\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}} = 1$.		
		$\begin{aligned} VT &= \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}} = \sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{(\sqrt{20} - 3)^2}} \\ &= \sqrt{5} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = \sqrt{5} - (\sqrt{5} - 1) = 1 \end{aligned}$	0,5	1,0
			0,5	
Bài 2 2,0 Điểm	a	Giải phương trình $x^2 - 2x - x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 4 = 0$		
		ĐK: $x \geq 0$. Nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình, chia cả hai vế cho x ta có: $x^2 - 2x - x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 4 = 0 \Leftrightarrow x - 2 - \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x} = 0$ $\Leftrightarrow \frac{x^2}{x} + \frac{4\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} - \frac{2x}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - 2 = 0$	0,25	1,0
		Đặt $\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = t > 0 \Leftrightarrow t^2 = x + 4 + \frac{4}{x} \Leftrightarrow x + \frac{4}{x} = t^2 - 4$ Khi đó ta có : $(t^2 - 4) - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t - 3)(t + 2) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -2 \end{cases}$	0,25	
		Đối chiếu điều kiện	0,25	

		$t = 3 \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 3 \sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 2 = 0$ $(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 4 \\ \sqrt{x} = 1 \end{cases}$		
		Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1, x = 4$	0,25	
	b	Cho hàm số $y = x - 2m - 1$ với m là tham số. Tính theo m tọa độ các giao điểm A, B của đồ thị hàm số với các trục Ox, Oy . Gọi H là hình chiếu của O trên AB . Xác định giá trị của m để $OH = \frac{\sqrt{2}}{2}$.		
		Giao điểm A của đồ thị hàm số với trục Ox là $A(2m + 1; 0)$	0,25	1,0
		Giao điểm B của đồ thị hàm số với trục Oy là $B(0; -2m - 1)$	0,25	
		Ta có: $\triangle OAB$ vuông tại O và có OH là đường cao nên: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ hay $2 = \frac{1}{x_A^2} + \frac{1}{y_B^2} \Rightarrow 2 = \frac{2}{(2m + 1)^2} \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$	0,5	
Bài 3 2,0 Điểm	a	Cho $A = \frac{9\sqrt{x} + 12}{3\sqrt{x} + 2}$ (với $x \geq 0$). Tìm các giá trị của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.		
		Với $x \geq 0$ ta có $A = \frac{3(3\sqrt{x} + 2) + 6}{3\sqrt{x} + 2} = 3 + \frac{6}{3\sqrt{x} + 2}$	0,25	1,0
		Với $x \geq 0$, ta có $3 < A \leq 6$ Theo bài, $A \in \mathbb{Z}$ nên $A \in \{4; 5; 6\}$	0,5	
		Với $A = 4$ suy ra $x = \frac{16}{9}$ Với $A = 5$ suy ra $x = \frac{1}{9}$ Với $A = 6$ suy ra $x = 0$ Vậy $x \in \left\{0; \frac{1}{9}; \frac{16}{9}\right\}$ thì A nhận giá trị nguyên.	0,25	
		Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Gọi H là một điểm thay đổi trên đoạn AB (H khác A và B). Đường thẳng vuông	1,0	

Bài 4 3,0 điểm		góc với AB tại H cắt nửa đường tròn (O) tại C . Qua A kẻ đường thẳng xy vuông góc với AB . Gọi I là trung điểm của AC , OI cắt đường thẳng xy tại M , MB cắt CH tại K .		
		Vẽ hình	0,25	0,25
	a	Chứng minh: $MC \perp OC$		
		- Chứng minh $\widehat{DAOM} = \widehat{DCOM}$ - Chứng minh $\widehat{DAOM} = \widehat{DCOM}$ - Chứng minh $MC \perp CO$	0,25 0,25 0,25	0,75
	b	Chứng minh $KH \perp AB = CH \perp AO$ và K là trung điểm của CH		
		$\widehat{DMAO}$ có $KH \parallel MA$ (cùng $\perp AB$) $\Rightarrow \frac{KH}{AM} = \frac{HB}{AB} \Rightarrow KH \cdot AB = AM \cdot HB$ (1)	0,25	1,0
		Chứng minh $\widehat{DMAO}$ đồng dạng với $\widehat{DCHB}$ $\Rightarrow \frac{MA}{CH} = \frac{AO}{HB} \Rightarrow CH \cdot AO = AM \cdot HB$ (2)	0,25	
		Từ (1) và (2) suy ra $KH \cdot AB = CH \cdot AO$	0,25	
		Khi đó $KH = CH \times \frac{AO}{AB} = CH \times \frac{R}{2R} = \frac{CH}{2}$ $\Rightarrow K$ là trung điểm của CH	0,25	
	c	Xác định vị trí của H để chu vi $\widehat{DACB}$ đạt giá trị lớn nhất? Tìm giá trị lớn nhất đó.		
		Chu vi tam giác ACB là $P_{ACB} = AB + AC + CB = 2R + AC + CB$ Chứng minh $(AC + CB)^2 \leq 2(AC^2 + CB^2)$	0,5	1,0
		$\Rightarrow AC + CB \leq \sqrt{2(AC^2 + CB^2)} \Rightarrow AC + CB \leq \sqrt{2AB^2} = 2R\sqrt{2}$ Đẳng thức xảy ra khi $AC = CB \Rightarrow H$ là trung điểm của AB	0,25	

		Suy ra $P_{ACB} \leq 2R + 2R\sqrt{2} = 2R(1 + \sqrt{2})$, dấu "=" xảy ra khi H là trung điểm của AB. Vậy $\max P_{ACB} = 2R(1 + \sqrt{2})$ đạt được khi H là trung điểm của AB	0,25	
Bài 5 1,0 điểm		Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $x + y + z = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$.		
		Vì x, y, z dương. Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: +) $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{y+z} \cdot \frac{y+z}{4}} = x$ (1) Dấu "=" xảy ra ⇔ $\frac{x^2}{y+z} = \frac{y+z}{4}$ ⇔ $4x^2 = (y+z)^2$ ⇔ $2x = y+z$	0,25	1,0
		+) $\frac{y^2}{z+x} + \frac{z+x}{4} \geq 2\sqrt{\frac{y^2}{z+x} \cdot \frac{z+x}{4}} = y$ (2) Dấu "=" xảy ra ⇔ $\frac{y^2}{z+x} = \frac{z+x}{4}$ ⇔ $4y^2 = (z+x)^2$ ⇔ $2y = z+x$	0,25	
		+) $\frac{z^2}{x+y} + \frac{x+y}{4} \geq 2\sqrt{\frac{z^2}{x+y} \cdot \frac{x+y}{4}} = z$ (3) Dấu "=" xảy ra ⇔ $\frac{z^2}{x+y} = \frac{x+y}{4}$ ⇔ $4z^2 = (x+y)^2$ ⇔ $2z = x+y$	0,25	
		Cộng theo 3 vế bất đẳng thức cùng chiều (1), (2), (3) ta có: $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} + \frac{y+z}{4} + \frac{z+x}{4} + \frac{x+y}{4} \geq x + y + z$ ⇔ $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} + \frac{x+y+z}{2} = 1$ Dấu "=" xảy ra ⇔ $\begin{cases} 2x = y+z \\ 2y = z+x \\ 2z = x+y \\ x+y+z = 2 \\ x, y, z > 0 \end{cases}$ ⇔ $x = y = z = \frac{2}{3}$ Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 1 khi $x = y = z = \frac{2}{3}$	0,25	

.....**Hết**.....