ĐỀ SỐ 30

(Đề học sinh giỏi môn toán lớp 9 tỉnh Gia Lai 2023-2024)

Thời gian làm bài : 150 phút

Câu 1 *(5,0 điểm).*

a) Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}=1+\frac{1}{k(k+1)}\left(Với\, k>0\right)$.

Từ đó hãy tính giá trị biểu thức:

$$S=\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\ldots+\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2022^2}+\frac{1}{2023^2}}+\frac{1}{2023}$$

b) Tìm tất cả các cặp số *(x;y)* nguyên thỏa mãn:

$x^2 - xy + x + y + 5 = 0$

Câu 2 *(4,0 điểm).*

a) Cho hàm số $y = (m^2-m+2)x+2m-8$ có đồ thị là đường thẳng *d* . Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để đường thẳng *d* cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại *A* và *B* sao cho diện tích tam giác *OAB* bằng 2 (với *O* là gốc tọa độ).

b) Cho hai vòi nước chảy vào 1 bồn nước. Nếu cho vòi thứ nhất chảy vào bồn rỗng trong 3 giờ rồi dừng lại, sau đó cho vòi thứ hai chảy tiếp vào trong 8 giờ nữa thì đầy bồn. Nếu cho vòi thứ nhất chảy vào bồn rỗng trong 1 giờ rồi cho cả 2 vòi chảy tiếp trong 4 giờ nữa thì số nước đã chảy vào bằng $\frac{8}{9}$ bồn. Hỏi nếu mỗi vòi chảy riêng thì trong bao lâu nước sẽ đầy bồn đó ?

Câu 3 *(2,0 điểm).*

Cho x = $1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$. Chứng tỏ $x^3-3x^2-6x+21$ là số chia hết cho 5 .

Câu 4 *(5,0 điểm).*

Cho đường tròn *(O)* đường kính *BC*= 2R và điểm *A* thay đổi trên *(O)* (điểm *A* không trùng với *B,C*). Đường phân giác trong góc *A* của tam giác *ABC* cắt đường tròn *(O)* tại *K* . Hạ *AH* vuông góc với *BC* .

a) Chứng minh rằng khi *A* thay đổi, tổng AH^2+KH^2 luôn không đổi. Tính góc *B* của tam giác *ABC biết AH* = $\frac{\sqrt{3}}{2}R$.

b) Đặt $AH = x$. Tìm x sao cho diện tích tam giác OAH đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5 *(2,0 điểm).*

Cho ΔABC vuông tại A biết $AB = 3$, $AC = 4$ và AH là đường cao. Gọi $I \in AB$ sao cho $AI = 2BI$, CI cắt AH tại E. Tính CE.

Câu 6 *(2,0 điểm).*

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{(a^2+bc)(b+c)}{a(b^2+c^2)}}+\sqrt{\frac{(b^2+ca)(c+a)}{b(c^2+a^2)}}+\sqrt{\frac{(c^2+ab)(a+b)}{c(a^2+b^2)}}\ge 3\sqrt{2}.$$

ĐỀ SỐ 9

(Đề học sinh giỏi môn toán lớp 9 tỉnh Gia Lai 2023-2024)

Câu 1 (5,0 điểm).

a) $\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}} = \sqrt{\frac{k^2(k+1)^2+(k+1)^2+k^2}{k^2(k+1)^2}}$

$=\sqrt{\frac{k^4+2k^3+k^2+k^2+2k+1+k^2}{k^2(k+1)^2}} = \sqrt{\frac{k^4+2k^3+k^2+k^2+2k+1}{k^2(k+1)^2}}$

$=\sqrt{\frac{(k^2+k+1)^2}{k^2(k+1)^2}} = \frac{k^2+k+1}{k(k+1)}$

$=\frac{k(k+1)+1}{k(k+1)} = 1+\frac{1}{k(k+1)}$ (đpcm).

Ta có:

$\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}} = 1+\frac{1}{k(k+1)} = 1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$

Khi đó:

$S = \sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\ldots+\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2022^2}+\frac{1}{2023^2}}+\frac{1}{2023}$

$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+1+\frac{1}{2022}-\frac{1}{2023}+\frac{1}{2023}$

$= 2021+\frac{1}{2} = 2021,5$

b) Ta có : $x^2 - xy + x + y + 5 = 0 \Leftrightarrow y(x-1) = x^2 + x + 5$ (*) Với $x = 1$ không thỏa mãn đẳng thức (*).

Khi đó (*) $\Leftrightarrow y = \frac{x^2+x+5}{x-1} \Leftrightarrow y = x+2+\frac{7}{x-1}$

Vì x, y nguyên nên suy ra: $(x-1)$ là ước nguyên của 7

Suy ra: $(x-1) \in \{\pm 1; \pm 7\}$

- $x-1=1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=11$
- $x-1=-1 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=-5$
- $x-1=7 \Rightarrow x=8 \Rightarrow y=11$
- $x-1=-7 \Rightarrow x=-6 \Rightarrow y=-5$

Vậy có 4 cặp số nguyên thỏa ycbt : (2;11), (0;- 5), (8;11), (-6;-5) .

Câu 2 *(4,0 điểm).*

a) Vì O A B, tạo thành tam giác nên : ¿ $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall m \in R \\ m \neq 4 \end{cases}$

Đường thẳng d cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại A và B nên suy ra :

$A\left(\frac{-2m+8}{m^2-m+2};0\right)$ & $B(0;2m-8)$

Ta có : $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}.OA.OB=\frac{1}{2}.\ m\left|\frac{-2m+8}{m^2-m+2}\right|.|2m-8|=2$

$\Leftrightarrow (m-4)^2=|m^2-m+2| \Leftrightarrow m^2-8m+16=|m^2-m+2|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-8m+16=m^2-m+2 \\ m^2-8m+16=-m^2+m-2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow m=2$(TMĐK)

b) Gọi x (giờ), y (giờ) lần lượt là thời gian để mỗi vòi chảy riêng đổ đầy b nước, $x>0$, $y>0$.

Khi đó, trong 1 giờ : vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ bồn, vòi thứ hai chảy được bồn.

Theo giả thiết bài toán ta có hệ phương trình : $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{8}{y}=1 \\ \frac{1}{x}+4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{8}{9} \end{cases}$

Đặt : $a=\frac{1}{x}$, $b=\frac{1}{y}$ $hệ\ trở\ thành:$ $\begin{cases} 3a+8b=1 \\ 5a+4b=\frac{8}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{9} \\ b=\frac{1}{12} \end{cases}$

Suy ra : $x=9$, $y=12$.

Vậy vòi thứ nhất cần 9 (giờ), vòi thứ hai cần 12 (giờ) để chảy riêng một mình thì đầy bồn.

Câu 3 *(2,0 điểm).*

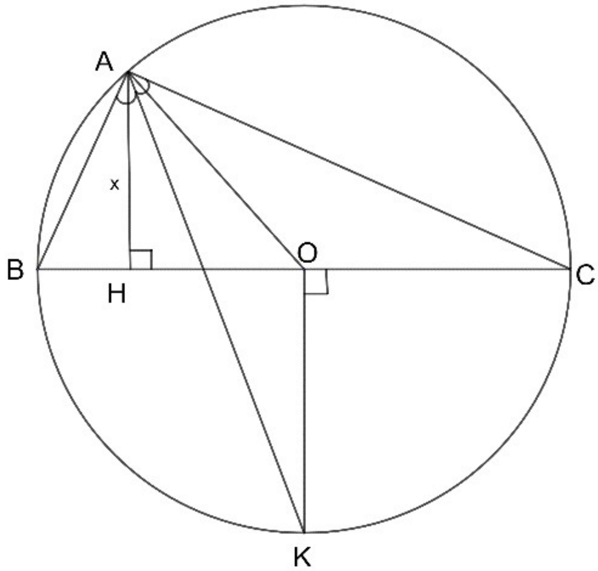
Ta có: $x=1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9} \Leftrightarrow x\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}+3$

$\Leftrightarrow x\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}+1+2 \Leftrightarrow \ x\sqrt[3]{3}=x+2$

$\Leftrightarrow 3x^2=x^3+6x^2+12x+8 \Leftrightarrow \Leftrightarrow x^3-3x^2+6x=4$

Từ đó suy ra : $x^3-3x^2+6x+21=4+21+25$ *là số chia hết cho* 5.

Câu 4 *(5,0 điểm).*



a) Góc *BAC* vuông tại A, AK là đường phân giác trong của góc A nên K là điểm chính giữa cung BC suy ra ΔOHK vuông tại *O*.

Ta ó: $OK^2+OH^2 = HK^2 \Rightarrow HK^2 = R^2+OH^2$

Mặt khác *AH* 2 +*OH* 2 = *R*2 ⇒ *AH* 2 = *R*2 −*OH* 2

⇒ *AH* 2 + *HK* 2 = *R*2 −*OH* 2 + *R*2 +*OH* 2 = 2*R*2 (không đổi) nên Δ*OAH* vuông tại *H* có: $AH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ nên Δ*OAH* là nửa tam giác đều cạnh bằng R.

Suy ra: $\widehat{AOH} = 60^0$

+ Nếu *H* thuộc đoạn *OB*

Ta có: ΔOAB cân tại *O* ($OA = OB = R$) có $\widehat{AOB} = 60^0$ Tính được $\widehat{ABC} = 60^0$

+ Nếu *H* thuộc đoạn *OC*

Ta có $\widehat{ACB} = 60^0 \Rightarrow \widehat{ABC} = 90^0 - 60^0 = 30^0$

Vậy $\widehat{ABC} = 60^0$ hoặc $\widehat{ABC} = 30^0$

c) ΔOAH vuông tại H nên: $AH^2 + OH^2 = OA^2$

$\Rightarrow x^2 + OH^2 = R^2 \Rightarrow OH^2 = R^2 - x^2 \Rightarrow OH = \sqrt{R^2 - x^2}$ (đvdt)

Suy ra: $S_{\Delta OAH} = \frac{1}{2} AH.OH = \frac{1}{2} x\sqrt{R^2 - x^2}$

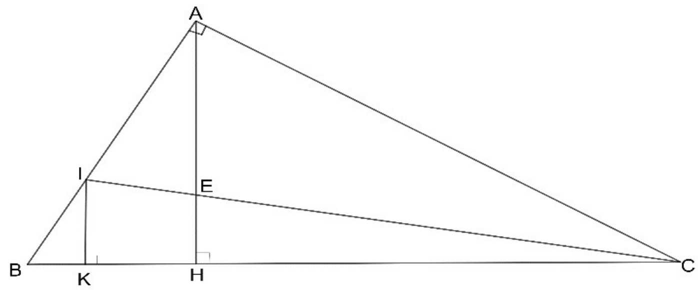
Theo bất đẳng thức Cô si:

Ta có: $S_{\Delta OAH} = \frac{1}{2} x\sqrt{R^2-x^2} \le \frac{1}{2}.\frac{x^2+R^2-X^2}{2} = \frac{R^2}{4}$, trong đó $\frac{R^2}{4}$ không đổi

Dấu "=" xảy ra khi x = $\sqrt{R^2-x^2} \Leftrightarrow x^2 = R^2 - x^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}R$

Vậy S đạt giá trị lớn nhất là $\frac{R^2}{4}$ khi x = $\frac{\sqrt{2}}{2}R$.

Câu 5 *(2,0 điểm)*



Trong ΔABC có : $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 5,\ AH = \frac{12}{5}$

$BH.BC = AB^2 \Rightarrow BH = \frac{9}{5}$, $CH = \frac{16}{5}$

Dựng $IK \perp BC$ ($K \in BC$).

Khi đó dễ dàng tính được :

BK = $\frac{1}{3}BH = \frac{3}{5}; CK = \frac{22}{5}; IK = \frac{1}{3}AH = \frac{4}{5}; IC = \sqrt{IK^2+CK^2} = 2\sqrt{5}$

Ta có**:** $\frac{CE}{CI} = \frac{CH}{CK} \Rightarrow$ **CE=** $\frac{CI.CH}{CK} = \frac{16\sqrt{5}}{11}$

Câu 6 *(2,0 điểm).*

Ta có: $(a^2+bc)(b+c) = a^2b + a^2c + b^2c + bc^2 = b(a^2+c^2) + c(a^2+b^2)$

Tương tự: $(b^2+ca)(c+a) = c(b^2+a^2) + a(b^2+c^2)$

$(c^2+ab)(a+b) = a(c^2+b^2) + b(c^2+a^2)$

Đặt: $x = a(b^2+c^2)$; $y = b(c^2+a^2)$; $z = c(b^2+a^2)$

Khi đó: $\sqrt{\frac{(a^2+bc)(b+c)}{a(b^2+c^2)}}+\sqrt{\frac{(b^2+ca)(c+a)}{b(c^2+a^2)}}+\sqrt{\frac{(c^2+ab)(a+b)}{c(a^2+b^2)}}=\sqrt{\frac{y+z}{x}}+\sqrt{\frac{z+x}{y}}+\sqrt{\frac{x+y}{z}}$

Áp dụng BĐT Cô si cho 2 số không âm x, y, z:

$$x+y\geq 2\sqrt{xy}$$
$$y+z\geq 2\sqrt{yz}$$
$$z+x\geq 2\sqrt{zx}$$
$$\Rightarrow (x+y)(y+z)(z+x)\geq 8xyz$$

Áp dụng BĐT Cô si cho 3 số không âm : $\sqrt{\frac{y+z}{x}};\sqrt{\frac{z+x}{y}};\sqrt{\frac{x+y}{z}}$

Ta có: $\sqrt{\frac{y+z}{x}}+\sqrt{\frac{z+x}{y}}+\sqrt{\frac{x+y}{z}}\geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{x.y.z}}}\geq 3\sqrt[3]{\sqrt{8}}$

$=3\sqrt{2}$ (đpcm).