

Câu 1. Cho hàm số $y = x^2 - 2(m - 1)x - m^3 + (m + 1)^2$ (C_m).

1. Tìm m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.
2. Giải phương trình sau: $(x^2 - 16)(x - 3)^2 + 9x^2 = 0$.

Lời giải

1. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1) \Leftrightarrow m - 1 \geq 1 \Leftrightarrow m \geq 2$.
2. $(x^2 - 16)(x - 3)^2 + 9x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 3)^2 + 9x^2 - 16(x - 3)^2 = 0$
 $\Leftrightarrow x^4 - 6x^2(x - 3) - 16(x - 3)^2 = 0$ (1). Dễ thấy $x = 3$ không phải là nghiệm của (1), nên pt
 $\Leftrightarrow \frac{x^4}{(x - 3)^2} - \frac{6x^2}{x - 3} = 16$ (2). Đặt $t = \frac{x^2}{x - 3}$, (2) trở thành $t^2 - 6t - 16 = 0 \Rightarrow t = 8, t = -2$. Từ đó suy ra
 $x = -1 \pm \sqrt{7}$.

Câu 2.

1. Giải phương trình sau: $\tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4\cos^2 2x}{\tan x - \cot x}$.
2. Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x^2 + 8y^2 = 12 \\ x^3 + 2xy^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

Lời giải

1. Điều kiện
$$\begin{cases} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0; \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0; \tan x - \cot x \neq 0 \end{cases} (*)$$

Để ý rằng: $\tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$, khi đó pt trở thành:

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{4\cos^2 2x}{\tan x - \cot x} \Leftrightarrow \cot x - \tan x = 4\cos^2 2x \Leftrightarrow \frac{1 - \tan^2 x}{\tan x} = 4 \frac{1}{1 + \tan^2 2x} \\ \Leftrightarrow \frac{2}{\tan 2x} &= \frac{4}{1 + \tan^2 2x} \Leftrightarrow (\tan 2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Không thỏa mãn (*). Vậy phương trình vô nghiệm.

2. Thế pt thứ nhất vào pt thứ hai, ta được:

$$x^3 + 2xy^2 + (x^2 + 8y^2)y = 0 \Leftrightarrow (x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2 + xy) = 0$$

TH1: $x = -2y$ thế vào pt đầu ta được $12y^2 = 12 \Leftrightarrow y = \pm 1 \Rightarrow x = \mp 2$

$$\text{TH2: } x^2 - xy + 4y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{15y^2}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \text{ (loại)}$$

Vậy pt có nghiệm là $(2; -1); (-2; 1)$.

Câu 3.

1. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 2abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a(2a - 1)^2} + \frac{1}{b(2b - 1)^2} + \frac{1}{c(2c - 1)^2}.$$

2. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau:

$u_1 = 2018, u_{n-1} = n^2(u_{n-1} - u_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm giới hạn $\lim u_n$.

Lời giải

1. Đặt $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$, ta có x, y, z là ba số dương thỏa mãn $x + y + z = 2$.

Ta có: $a(2a - 1)^2 = \frac{1}{x} \left(\frac{2}{x} - 1 \right)^2 = \frac{(y+z)^2}{x^3}$. Từ đó ta có: $P = \frac{x^3}{(y+z)^2} + \frac{y^3}{(z+x)^2} + \frac{z^3}{(x+y)^2}$.

Áp dụng BĐT Cosi: $\frac{x^3}{(y+z)^2} + \frac{y+z}{8} + \frac{y+z}{8} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^3}{64}} = \frac{3x}{4}$. Tương tự ta có:

$$\frac{y^3}{(z+x)^2} + \frac{x+z}{8} + \frac{x+z}{8} \geq \frac{3y}{4}, \quad \frac{z^3}{(y+x)^2} + \frac{x+y}{8} + \frac{x+y}{8} \geq \frac{3z}{4}.$$

Từ đó $p \geq \frac{1}{4}(x+y+z) = \frac{1}{2}$. Vậy $\min P = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x=y=z \Leftrightarrow a=b=c = \frac{3}{2}$.

2. Từ công thức truy hồi của dãy số, ta được:

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) u_{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left(1 - \frac{1}{(n-1)^2}\right) u_{n-2} = \dots = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left(1 - \frac{1}{(n-1)^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) u_1.$$

Do đó: $u_n = \frac{(n+1)(n-1)}{n^2} \cdot \frac{(n-2)n}{(n-1)^2} \dots \frac{4 \cdot 2}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 1}{2^2} \cdot 2018 = \frac{n+1}{2n} \cdot 2018 \Rightarrow \lim u_n = \frac{2018}{2} = 1009$.

Câu 4.

1. Có 7 bông hoa khác nhau và 3 lọ hoa khác nhau, một người cắm hết 7 bông hoa vào 3 lọ hoa trên. Tính xác suất để có đúng một lọ không có hoa.

2. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC cân tại A và có các cạnh BC, AB lần lượt có phương trình là $x + 2y - 2 = 0$ và $3x - y + 10 = 0$. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , biết $M(2; 2)$ thuộc đường thẳng AC .

Lời giải

2. - d qua M và $d \parallel BC$ có PT: $x + 2y - 6 = 0$.

Gọi $N = d \cap AB \Rightarrow N(-2; 4)$, trung điểm MN là

$E(0; 3)$, $\overline{MN} = (-4; 2)$. Trung trực của MN là:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3 + 2t \end{cases} \Rightarrow A(-7; -11)$$

Gọi F là trung điểm của $BC \Rightarrow x_F = -\frac{4}{5}$

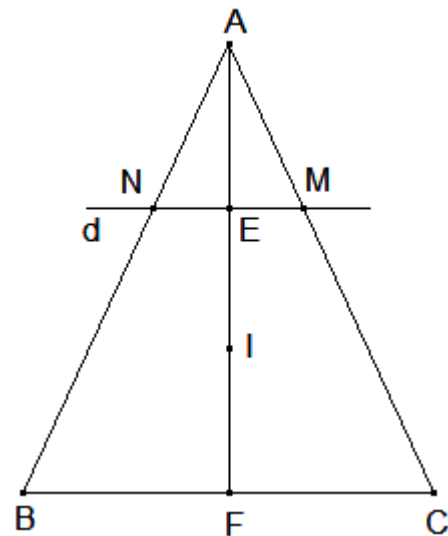
- Tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC là

$I(t; 3+2t)$ nằm trên đoạn AF , suy ra $t \in \left(-7; -\frac{4}{5}\right)$

- Khoảng cách từ I đến AB và BC bằng nhau nên

$$\frac{|t + 6 + 4t - 2|}{\sqrt{5}} = \frac{|3t - 3 - 2t + 10|}{\sqrt{10}} \Rightarrow t = \frac{7 \pm 4\sqrt{2}}{5\sqrt{2} - 1}$$

Mà $t \in \left(-7; -\frac{4}{5}\right)$ nên tâm $I \left(\frac{7 - 4\sqrt{2}}{5\sqrt{2} - 1}; \frac{-11 + 7\sqrt{2}}{5\sqrt{2} + 1} \right)$



Câu 5. Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = a$ và góc $\angle BAC = 2\alpha$. Trên đường thẳng d đi qua A vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm S sao cho $SA = 2a$. Gọi I là trung điểm của BC hạ $AH \perp SI$.

1. Chứng minh $AH \perp (SBC)$. Tính độ dài AH theo a, α .

2. K là điểm thay đổi trên AI , đặt $\frac{AK}{AI} = x$. Mặt phẳng (R) qua K và vuông góc với AI cắt các cạnh AB, AC, SC, SB lần lượt tại M, N, P, Q . Tìm x để tứ giác $MNPQ$ có diện tích lớn nhất.

Lời giải

1. Chứng minh $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AH$

theo giả thiết $AH \perp SI$ suy ra $AH \perp (SBC)$

$$- AI = a \cos \alpha, SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = a\sqrt{4 + \cos^2 \alpha}$$

$$- \text{Từ } S_{ASI} = \frac{1}{2} AH \cdot SI = \frac{1}{2} SA \cdot AI \Rightarrow AH = \frac{2a \cos \alpha}{\sqrt{4 + \cos^2 \alpha}}$$

2. - Chứng minh $MNPQ$ là hình chữ nhật.

$$- BC = 2CI = 2a \sin \alpha$$

$$- MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AK}{AI} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow MN = 2ax \sin \alpha$$

$$- QM \parallel SA \Rightarrow \frac{QM}{SA} = \frac{MB}{AB} \Rightarrow QM = 2MB$$

$$\text{Mà } \Rightarrow \frac{AK}{AI} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow AM = ax \Rightarrow MB = a(1 - x)$$

$$\Rightarrow QM = 2a(1 - x)$$

$$- S_{MNPQ} = MN \cdot QM = 4a^2 x(1 - x) \sin \alpha$$

$$- \text{Ta có } x(1 - x) \leq \left(\frac{x + 1 - x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$- S_{MNPQ} \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow x = 1 - x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$