



Chương

Bài 4.

TÍCH VÔ HƯỚNG HAI VECTƠ

A

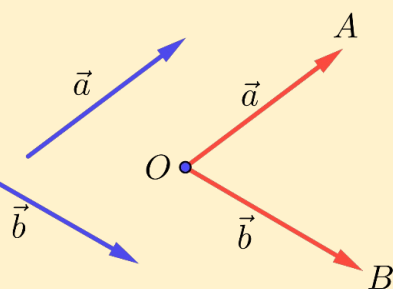
Lý thuyết

1. Góc giữa hai vectơ



Định nghĩa

- » Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$.
- » Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\vec{OA} = \vec{a}$ và $\vec{OB} = \vec{b}$.
Góc $\angle AOB$ với số đo từ 0° đến 180° được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
- » Kí hiệu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $(\vec{a}, \vec{b})$.
- » Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$.



2. Tích vô hướng hai vectơ



Định nghĩa

- » Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số.
- » Kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$ được xác định bởi công thức $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.
- » Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\vec{0}$ ta quy ước $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Chú ý

Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Khi $\vec{a} = \vec{b}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.



3. Tính chất của tích vô hướng



Các tính chất:

Người ta chứng minh được các tính chất sau đây của tích vô hướng:

Với ba vector $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ bất kì và mọi số thực k ta có:

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán). (2) $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối)

(3) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$

(4) $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

(5) $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow (\vec{a}; \vec{b})$ là góc nhọn.

(6) $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow (\vec{a}; \vec{b})$ là góc tù.

► **Nhận xét:** Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vector ta suy ra:



$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

$$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$$

► **Chú ý:**



$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} AB^2 + AC^2 - BC^2$$

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} BA^2 + BC^2 - AC^2$$

$$\overline{CA} \cdot \overline{CB} = \frac{1}{2} CA^2 + CB^2 - AB^2$$

Các dạng bài tập

(1) **Dựa vào định nghĩa:**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle a; b)$$

» Trường hợp ít nhất một trong hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\vec{0}$ ta quy ước $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Với ba vectơ $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ bất kì và mọi số thực k ta có:

$$3. (k\overset{r}{a}).\overset{r}{b} = k(\overset{r}{a}.\overset{r}{b}) = \overset{r}{a}.(k\overset{r}{b})$$

Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vector $\vec{0}$ ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

$$r_a^2 = |a| |a| \cos 0^\circ = |a|^2$$

(1) $\frac{r}{a.b}$

$$(2) \quad \left(\frac{r}{a} + \frac{r}{b}\right)^2 + \left(\frac{r}{a} - \frac{r}{b}\right)^2$$

$$(3) \quad (a+2b)(2a-b)$$

 Lời giải

[illegible]



Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=a$, $\angle C=30^\circ$. Tính các tích vô hướng sau

 Lời giải

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

Cho tam giác ABC đều cạnh $AB=2a$. Tính các tích vô hướng sau

(1) $AB.BC$

$$(2) \quad 2MA - 3MB = 0$$

 **Lời giải**

[illegible]

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$
$$BC^2 = \overline{BC}^2 = (\overline{AC} - \overline{AB})^2$$


Cho $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Định góc giữa hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ biết:

$$(2) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

$$(A) \quad |a+2b| = \sqrt{3}; \quad |a| = |b| = 1$$

Lời giải

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting or typing. There are no margins, text, or other markings on the page.


$$P = \cos\left(\overset{uu}{AB}, \overset{uu}{BC}\right)$$

 **Lời giải**

[illegible]

(1) Tính $\cos A, \cos B, \cos C$

(2) Tính $AB.BC + BC.CA + CA.AB$

(3) Tính độ dài đường trung tuyến ứng với cạnh BC của tam giác ABC .

Lời giải

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

(1) **Dựa vào định nghĩa:** Tích vô hướng của a và b là một số.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle a; b)$$

► **Kí hiệu** là $\overset{r}{a}.\overset{l}{b}$ được xác định bởi công thức

(2) **Tính chất:**

Với ba vectơ $\begin{matrix} r & | & r \\ a; b; c \end{matrix}$ bất kì và mọi số thực k ta có:

1. $\overset{r}{a}.\overset{r}{b}=\overset{r}{b}.\overset{r}{a}$ (tính chất giao hoán). **2.** $\overset{r}{a}(\overset{r}{b}+\overset{r}{c})=\overset{r}{a}.\overset{r}{b}+\overset{r}{a}.\overset{r}{c}$ (tính chất phân phối).

3. $(k\overset{r}{a}).\overset{l}{b} = k(\overset{r}{a}.\overset{l}{b}) = \overset{r}{a}.(k\overset{l}{b})$ 4. $\frac{r}{a^2} \geq 0, \frac{r}{a^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{r}{a} = 0$

$$a^2 = |a||a|\cos 0^\circ = |a|^2$$

Cho tam giác $DABC$, Chứng minh rằng: với điểm M tùy ý ta có:

$$MA.BC + MB.CA + AB.MC = 0$$

Lời giải

[illegible]

Cho O là trung điểm của AB và M là một điểm tùy ý. Chứng minh rằng:

$$MA \cdot MB = OM^2 - OA^2$$

 Lời giải

[illegible]



Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB và M là điểm tùy ý. Chứng minh rằng:

 **Lời giải**

[illegible]

Cho $DABC$ có 3 trung tuyến AD, BE, CF . Chứng minh rằng:

$$BC, AD + CA, BE + AB, CF = 0$$

 **Lời giải**

[illegible]

Cho nửa đường tròn đường kính AB .

Có AC và BD là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại E .

$$AE \cdot AC + BE \cdot BD = AB^2$$

 **Lời giải**

[illegible]



Dạng 4. Tập hợp điểm



Phương

Loại 1:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k \quad (1) \quad (A, B \text{ cố định})$$

▫ Với $k=0$: Tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB

▫ Với $k \neq 0$: Gọi I là trung điểm AB :

$$(1) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = k \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = k \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 = k + \overrightarrow{IA}^2 = \frac{AB^2}{4} + k$$

(1) Nếu $\frac{AB^2}{4} + k > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{AB^2}{4}$. Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I ;

$$R = \sqrt{\frac{AB^2}{4} + k}$$

(2) Nếu $\frac{AB^2}{4} + k = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = 0$. Tập hợp các điểm M là một điểm I

(3) Nếu $\frac{AB^2}{4} + k < 0$: Tập hợp các điểm M là $\emptyset$.

Loại 2:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = k \quad (2) \quad (A \text{ cố định, } \vec{v} \text{ có hướng, độ dài xác định})$$

▫ Với $k=0$: Tập hợp các điểm M là đường thẳng qua A , có giá vuông góc với giá của $\vec{v}$

▫ Với $k \neq 0$: $(2) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} \cdot \vec{v} = k$ với $\overrightarrow{AM'}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{AM}$ trên giá của $\vec{v} \Rightarrow M'$ cố định

Tập hợp các điểm M là đường thẳng qua M' , có giá vuông góc với giá của $\vec{v}$.

Loại 3:

$$a\overrightarrow{MA}^2 + b\overrightarrow{MB}^2 = k \quad (3) \quad (A, B \text{ cố định; } a, b \text{ hằng số, } a+b \neq 0)$$

▫ Gọi I thỏa $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow I$ cố định.

$$(3) \Leftrightarrow a(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + b(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (a+b)\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB}) + a\overrightarrow{IA}^2 + b\overrightarrow{IB}^2 = k \Leftrightarrow (a+b)\overrightarrow{MI}^2 = k - a\overrightarrow{IA}^2 - b\overrightarrow{IB}^2$$

(1) Nếu $\frac{k - a\overrightarrow{IA}^2 - b\overrightarrow{IB}^2}{a+b} > 0$. Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I ;

$$R = \sqrt{\frac{k - a\overrightarrow{IA}^2 - b\overrightarrow{IB}^2}{a+b}}$$



Ví dụ 4.1.

Cho $\triangle ABC$. Tìm tập hợp các điểm M sao cho

$$(1) \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$$

$$(2) \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$$

Lời giải

.....



Cho hai điểm A, B cố định có độ dài bằng a , vector $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho

(2) $MA.MB = MA^2$

Lời giải



Cho hình vuông $ABCD$ tâm O .

Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MD^2$

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.



Dạng 5. Chứng minh vuông góc dùng tích vô hướng



Phương

- (1) **Dựa vào định nghĩa:** Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$$

- **Kí hiệu** là $\vec{a} \cdot \vec{b}$ được xác định bởi công thức

- (2) **Tính chất:**

Với ba vectơ $\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$ bất kì và mọi số thực k ta có:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán).

2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối).

3. $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$

4. $\vec{a}^2 \geq 0, \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

(a) $\vec{a}^2 = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$



Ví dụ 5.1.

Cho $\vec{a} \perp \vec{b}, |\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = \sqrt{2}$. Biết $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}; \vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$. Chứng minh rằng:
 $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 5.2.

Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng:

$$AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2.$$

Lời giải

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ví dụ 5.3.

Cho tam giác đều ABC cạnh $3a$. Lấy các điểm M, N, P lần lượt trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = a, CN = 2a, AP = x, 0 < x < 3a$. Xác định x để AM và PN vuông góc với nhau.

Lời giải

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.



Luyện tập

A. Câu hỏi - Trả lời trắc nghiệm

- » **Câu 1.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b})$.
 C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a} \cdot \vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b})$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}; \vec{b})$.
- » **Câu 2.** Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $4a$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$ là
- A. $8a^2$. B. $8a$. C. $8\sqrt{3}a^2$. D. $8\sqrt{3}a$.
- » **Câu 3.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a Tính $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$.
- A. $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$. B. $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = a$. C. $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \frac{a^2}{2}$. D. $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = a^2$.
- » **Câu 4.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?
- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}; \vec{b})$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$.
 C. $|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 = |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$.
- » **Câu 5.** Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ và $AB = a$. Khi đó $\vec{AC} \cdot \vec{CB}$ bằng
- A. $-2a^2$. B. $2a^2$. C. $3a^2$. D. $-3a^2$.
- » **Câu 6.** Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$.
- A. $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$. B. $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$. C. $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \frac{a^2}{2}$. D. $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -\frac{a^2}{2}$.
- » **Câu 7.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và AM là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\vec{BA} \cdot \vec{AM}$
- A. $\frac{a^2}{2}$. B. a^2 . C. $-a^2$. D. $-\frac{a^2}{2}$.
- » **Câu 8.** Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $\hat{BAD} = 60^\circ$. Tích vô hướng $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ bằng
- A. -1 . B. 1 . C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.
- » **Câu 9.** Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $\hat{BAD} = 60^\circ$. Tích vô hướng $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ bằng
- A. -1 . B. $\frac{1}{2}$. C. -1 . D. $-\frac{1}{2}$.



- » **Câu 10.** Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2$, $AD=1$, $\angle BAD=60^\circ$. Độ dài đường chéo AC bằng
- A. $\sqrt{5}$. B. $\sqrt{7}$. C. 5. D. $\frac{7}{2}$.
- » **Câu 11.** Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2$, $AD=1$, $\angle BAD=60^\circ$. Độ dài đường chéo BD bằng
- A. $\sqrt{3}$. B. $\sqrt{5}$. C. 5. D. 3.
- » **Câu 12.** Cho các véc tơ $\vec{a}; \vec{b}$ và $\vec{c}$ thỏa mãn các điều kiện $|\vec{a}|=x, |\vec{b}|=y$ và $|\vec{c}|=z$ và $\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$. Tính $A=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$.
- A. $A=\frac{3x^2-z^2+y^2}{2}$. B. $A=\frac{3z^2-x^2-y^2}{2}$. C. $A=\frac{3y^2-x^2-z^2}{2}$. D. $A=\frac{3z^2+x^2+y^2}{2}$.
- » **Câu 13.** Cho $\triangle ABC$ đều; $AB=6$ và M là trung điểm của BC . Tích vô hướng $\vec{AB}\cdot\vec{MA}$ bằng
- A. -18. B. 27. C. 18. D. -27.
- » **Câu 14.** Cho tam giác ABC vuông tại B , $BC=a\sqrt{3}$. Tính $\vec{AC}\cdot\vec{CB}$.
- A. $3a^2$. B. $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. D. $-3a^2$.
- » **Câu 15.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=\sqrt{3}$ và $(\vec{a}, \vec{b})=30^\circ$. Tính $|\vec{a}+\vec{b}|$.
- A. $\sqrt{11}$. B. $\sqrt{13}$. C. $\sqrt{12}$. D. $\sqrt{14}$.
- » **Câu 16.** Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D ; $AB=AD=a, CD=2a$. Khi đó tích vô hướng $\vec{AC}\cdot\vec{BD}$ bằng
- A. $-a^2$. B. 0. C. $\frac{3a^2}{2}$. D. $-\frac{a^2}{2}$.
- » **Câu 17.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=a, BC=2a$. Tính tích vô hướng $\vec{BA}\cdot\vec{BC}$.
- A. $\vec{BA}\cdot\vec{BC}=a^2$. B. $\vec{BA}\cdot\vec{BC}=\frac{a^2}{2}$. C. $\vec{BA}\cdot\vec{BC}=2a^2$. D. $\vec{BA}\cdot\vec{BC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
- » **Câu 18.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=4$. Kết quả $\vec{BA}\cdot\vec{BC}$ bằng
- A. 16. B. 0. C. $4\sqrt{2}$. D. 4.
- » **Câu 19.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $\angle B=30^\circ, AC=2$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính giá trị của biểu thức $P=\vec{AM}\cdot\vec{BM}$.
- A. $P=-2$. B. $P=2\sqrt{3}$. C. $P=2$. D. $P=-2\sqrt{3}$.
- » **Câu 20.** Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB=2a, AD=3a, \angle BAD=60^\circ$. Điểm K thuộc AD thỏa mãn $\vec{AK}=-2\vec{DK}$. Tính tích vô hướng $\vec{BK}\cdot\vec{AC}$
- A. $3a^2$. B. $6a^2$. C. 0. D. a^2 .
- » **Câu 21.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=8, AD=5$. Tính $\vec{AB}\cdot\vec{BD}$
- A. $\vec{AB}\cdot\vec{BD}=62$. B. $\vec{AB}\cdot\vec{BD}=-64$. C. $\vec{AB}\cdot\vec{BD}=-62$. D. $\vec{AB}\cdot\vec{BD}=64$.

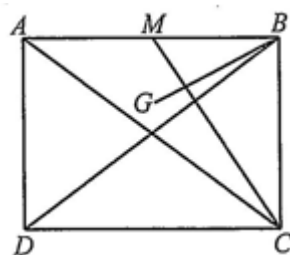


- » **Câu 22.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
- A. $\alpha = 90^\circ$. B. $\alpha = 0^\circ$. C. $\alpha = 45^\circ$. D. $\alpha = 180^\circ$.
- » **Câu 23.** Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác vectơ-không thỏa mãn $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng:
- A. $(\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$. B. $(\vec{a}; \vec{b}) = 0^\circ$. C. $(\vec{a}; \vec{b}) = 180^\circ$. D. $(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$.
- » **Câu 24.** Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Chọn phát biểu **đúng**.
- A. $\alpha = 60^\circ$. B. $\alpha = 30^\circ$. C. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. D. $\cos \alpha = \frac{3}{8}$.
- » **Câu 25.** Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ thỏa mãn $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ là
- A. 60° . B. 120° . C. 150° . D. 30° .
- » **Câu 26.** Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ sao cho $|\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{b}| = 2$ và hai vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
- A. 120° . B. 60° . C. 90° . D. 30° .
- » **Câu 27.** Cho hai điểm B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M thỏa mãn $\vec{CM} \cdot \vec{CB} = \vec{CM}^2$ là:
- A. Đường tròn đường kính BC . B. Đường tròn $(B; BC)$.
C. Đường tròn $(C; CB)$. D. Một đường khác.
- » **Câu 28.** Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M mà $\vec{CM} \cdot \vec{CB} = \vec{CA} \cdot \vec{CB}$ là:
- A. Đường tròn đường kính AB .
B. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .
C. Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC .
D. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB .
- » **Câu 29.** Cho tam giác ABC , điểm J thỏa mãn $\vec{AK} = 3\vec{KJ}$, I là trung điểm của cạnh AB , điểm K thỏa mãn $\vec{KA} + \vec{KB} + 2\vec{KC} = \vec{0}$. Một điểm M thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $(3\vec{MK} + \vec{AK}) \cdot (\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}) = 0$. Tập hợp điểm M là đường nào trong các đường sau.
- A. Đường tròn đường kính IJ . B. Đường tròn đường kính IK .
C. Đường tròn đường kính JK . D. Đường trung trực đoạn JK .

B. Câu hỏi - Trả lời đúng/sai

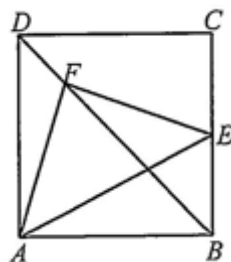


» Câu 30. Cho hình chữ nhật $ABCD$, $AB=4a$, $AD=3a$. Gọi M là trung điểm của AB , G là trọng tâm tam giác ACM



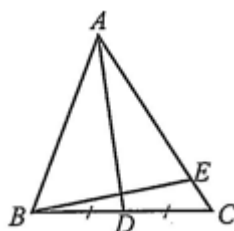
	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$\vec{CM} = \frac{1}{2}\vec{BA} - 3\vec{BC}$		
(b)	$\vec{BG} = \frac{3}{2}\vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{BC}$		
(c)	$\vec{BC} \cdot \vec{BA} = 0$		
(d)	$\vec{BG} \cdot \vec{CM} = -a^2$		

» Câu 31. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Lấy E là trung điểm của BC , điểm F thỏa mãn $\vec{BF} = \frac{3}{4}\vec{BD}$. Khi đó:



(a)	$\vec{AE} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}$		
(b)	$\vec{AF} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{5}{4}\vec{AD}$		
(c)	$\vec{EF} = \frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AD}$		
(d)	Tam giác AEF vuông cân		

» Câu 32. Cho tam giác ABC có $AB=4\sqrt{2}$, $AC=6$, $\angle BAC=45^\circ$. Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng BC . Điểm E thỏa mãn $\vec{AE} = k\vec{AC}$ ($k \in \mathbb{R}$) (Hình). Khi đó:



(a)	$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 20$		
-----	--------------------------------	--	--



(b)	$\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$		
(c)	$BC = 3\sqrt{5}$		
(d)	$AD \perp BE$ khi $k = \frac{14}{15}$		
» Câu 33. Cho tam giác ABC đều, đường cao AH . Khi đó:			
(a)	$(\vec{AB}, \vec{AC}) = 30^\circ$		
(b)	$(\vec{AH}, \vec{CB}) = 90^\circ$		
(c)	$(\vec{CA}, \vec{BC}) = 120^\circ$		
(d)	$(\vec{AH}, \vec{BA}) = 130^\circ$		
» Câu 34. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng 2 và góc B bằng 60° . Khi đó:			
(a)	$(\vec{AB}, \vec{AC}) = 60^\circ$		
(b)	$(\vec{AB}, \vec{DA}) = 30^\circ$		
(c)	$\vec{DA} \cdot \vec{DC} = 3$		
(d)	$\vec{OB} \cdot \vec{BA} = -3$		
» Câu 35. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a, BC = 2a$. Khi đó:			
(a)	$\angle C = 60^\circ$		
(b)	$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = a^2$		
(c)	$\vec{BC} \cdot \vec{CA} = 3a^2$		
(d)	$\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB} = -4a^2$		
» Câu 36. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , có cạnh a . Biết M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ADM . Khi đó:			
(a)	$\vec{AB} \cdot \vec{CA} = a^2$		
(b)	$\vec{AM} \cdot \vec{AC} = \frac{a^2}{3}$		
(c)	$\vec{AD} \cdot \vec{BD} + \vec{OM} \cdot \vec{AC} = \frac{a^2}{2}$		
(d)	$(\vec{AB} + \vec{AD})(\vec{BD} + \vec{BC}) = a^2$		
» Câu 37. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , cạnh bằng a . Khi đó:			
(a)	$\vec{AB} \cdot \vec{DC} = 2a^2$		
(b)	$\vec{AB} \cdot \vec{OC} = a^2$		



(c))	$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OC} = -a^2$		
(d))	$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = a^2$		
» Câu 38. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B , biết $AD = a, BC = 3a$ và cạnh $AB = 2a$. Khi đó:			
(a))	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -4a^2$		
(b))	$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = 2a^2$		
(c))	$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -2a^2$		
(d))	Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD . Khi đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ} = 6a^2$		
» Câu 39. Cho tam giác đều ABC , đường cao AH . Khi đó:			
(a))	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$		
(b))	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$		
(c))	$(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) = 90^\circ$		
(d))	$(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{AB}) = 120^\circ$		
» Câu 40. Cho tam giác ABC đều có cạnh a , có trọng tâm G . Khi đó:			
(a))	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$		
(b))	$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{4}$		
(c))	$\angle AGB = 120^\circ$		
(d))	$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = \frac{a^2}{6}$		
» Câu 41. Cho tam giác ABC có $AB = 2a, AC = 3a, \angle BAC = 60^\circ$. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng BC . Điểm J thuộc đoạn AC thỏa mãn: $12\overrightarrow{AJ} = 7\overrightarrow{AC}$. Khi đó:			
(a))	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4a^2$		
(b))	$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$		
(c))	$\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$		
(d))	$AI \perp BJ$		

C. Câu hỏi - Trả lời ngắn

» Câu 42. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 8$; đáy nhỏ $CD = 4$; đường cao $AD = 6$; I là trung điểm của AD . Tính $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{ID}$.

👉 Điền đáp số:



» **Câu 43.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=1, AC=2\sqrt{3}$ và AM là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM}$.

👉 **Điền đáp số:**

» **Câu 44.** Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AM^2 - kBC^2$. Vậy $k=?$

👉 **Điền đáp số:**

» **Câu 45.** Cho tam giác ABC cân tại A ; M là trung điểm của BC , H là hình chiếu của M trên AC ; E là trung điểm của MH . Tính $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BH}$

👉 **Điền đáp số:**

» **Câu 46.** Cho tam giác ABC có $BC=a, CA=b, AB=c$. Biết M là trung điểm của BC . Tính $\overrightarrow{AM}^2$ ta thu được kết quả $\frac{m(b^2+c^2)-a^2}{n}$, với $m; n$ là các số tự nhiên. Tính $S=m^n$

👉 **Điền đáp số:**

» **Câu 47.** Cho nửa đường tròn đường kính AB . Biết rằng AC và BD là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại E . Tính $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD}$ biết $AB=2$.

👉 **Điền đáp số:**

» **Câu 48.** Cho hình vuông $ABCD$, điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{1}{4}$. Gọi N là trung điểm CD . Khi đó $\triangle BMN$ là tam giác vuông và $MB=k \cdot MN$, với k là số tự nhiên. Xác định k .

👉 **Điền đáp số:**

» **Câu 49.** Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi H là trung điểm của BC , D là hình chiếu của H trên AC , M là trung điểm của HD . Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD}$

👉 **Điền đáp số:**

» **Câu 50.** Cho hai điểm A, B cố định có khoảng cách bằng 1. Tập hợp điểm M sao cho: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4}$ là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

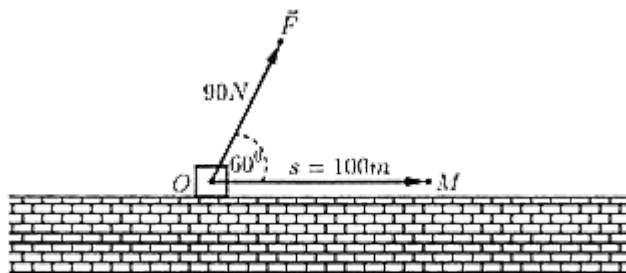
👉 **Điền đáp số:**

» **Câu 51.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và số thực k . Tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = k$ là đường tròn có bán kính dạng $R = n \cdot \sqrt{\frac{k+a^2}{m}}$, với $m; n$ là các số tự nhiên. Tính $S=m+n$

👉 **Điền đáp số:**



- » **Câu 52.** Một người dùng một lực $\vec{F}$ có độ lớn $90N$ làm một vật dịch chuyển một đoạn $100m$. Biết lực $\vec{F}$ hợp với hướng dịch chuyển một góc 60° . Công sinh ra bởi lực $\vec{F}$ là bao nhiêu Jun?



👉 **Điền đáp số:**

- » **Câu 53.** Cho tứ giác lồi $ABCD$, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O . Gọi H và K lần lượt là trực tâm các tam giác ABO và CDO . Gọi I, J lần lượt là trung điểm AD và BC . Tính $\vec{HK} \cdot \vec{IJ}$?

👉 **Điền đáp số:**

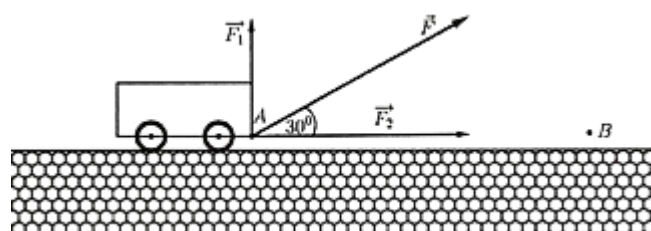
- » **Câu 54.** Cho hình chữ nhật $ABCD$. Kẻ $BK \perp AC, K \in AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AK và CD . Tìm số đo góc BMN .

👉 **Điền đáp số:**

- » **Câu 55.** Cho đoạn $AB=20$. Tồn tại điểm M sao cho $T=3MA^2+2MB^2$ đạt giá trị bé nhất $T_{\min}$. Tính giá trị $T_{\min}$?

👉 **Điền đáp số:**

- » **Câu 56.** Một chiếc xe được kéo bởi một lực $\vec{F}$ có độ lớn $50N$, di chuyển theo quãng đường từ A đến B có chiều dài $200m$. Cho biết góc hợp bởi lực $\vec{F}$ và $\vec{AB}$ bằng 30° và lực $\vec{F}$ được phân tích thành hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$. Gọi $m; n; k$ lần lượt là các công sinh ra bởi các lực $\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2$. Khi đó tính $S=m- n- k$.



👉 **Điền đáp số:**

- » **Câu 57.** Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh $AC=7cm$ và $BC=14cm$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{AC}$ và $\vec{CB}$.

👉 **Điền đáp số:**



» **Câu 58.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 3. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM=1$, trên cạnh CD lấy điểm N sao cho $DN=1$ và P là trung điểm BC . Tính $\cos \angle MNP$. Kết quả làm tròn đến hàng phần chục

👉 **Điền đáp số:**

» **Câu 59.** Cho tam giác ABC . Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Tính: $\vec{AM} \cdot \vec{BC} + \vec{BN} \cdot \vec{CA} + \vec{CE} \cdot \vec{AB}$.

👉 **Điền đáp số:**

» **Câu 60.** Cho tam giác đều ABC cạnh 1 nội tiếp đường tròn (O) bán kính R, M là điểm bất kỳ nằm trên đường tròn (O) . Tính $MA^2 + MB^2 + MC^2$.

👉 **Điền đáp số:**

» **Câu 61.** Cho tam giác ABC vuông tại A , trên hai cạnh AB và AC lần lượt lấy hai điểm B' và C' sao cho $\vec{AB} \cdot \vec{AB'} = \vec{AC} \cdot \vec{AC'}$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính $\vec{AM} \cdot \vec{B'C'}$

👉 **Điền đáp số:**

» **Câu 62.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=1$ và $AD=\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD . Tính $\vec{BK} \cdot \vec{AC}$.

👉 **Điền đáp số:**

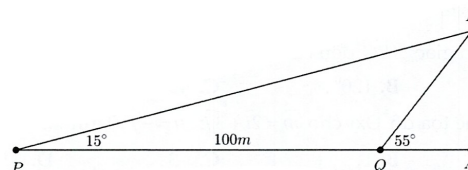
» **Câu 63.** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=\sqrt{3}$ và $(\vec{a}, \vec{b})=120^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$. Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.

👉 **Điền đáp số:**

» **Câu 64.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 1. Tập hợp điểm M thỏa mãn $\vec{MA} \cdot \vec{MC} + \vec{MB} \cdot \vec{MD} = 1^2$ là đường tròn bán kính $R=?$

👉 **Điền đáp số:**

» **Câu 65.** Hai chiếc tàu thủy P và Q trên biển cách nhau $100m$ và thẳng hàng với chân A của tháp hải đăng AB ở trên bờ biển. Từ P và Q người ta nhìn chiều cao AB của tháp dưới các góc $\angle BPA = 15^\circ$ và $\angle BQA = 55^\circ$. Tính chiều cao của tháp (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



👉 **Điền đáp số:**

» **Câu 66.** Cho hình thoi $ABCD$ tâm O có cạnh bằng 1 và $\angle ABD = 60^\circ$. Gọi I là điểm thỏa mãn $2\vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$. Tính tích vô hướng $\vec{AO} \cdot \vec{BI}$.



🐞 Điền đáp số:

» Câu 67. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh là 3. Điểm M thỏa mãn: $MA^2 + MB^2 = 18$, khi đó tập hợp điểm M thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

🐞 Điền đáp số:

» Câu 68. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh là 3. Điểm M thỏa mãn: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 18$, khi đó tập hợp điểm M thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

🐞 Điền đáp số:

» Câu 69. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh là 3. Điểm M thỏa mãn: $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 18$, khi đó tập hợp điểm M thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

🐞 Điền đáp số:

» Câu 70. Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm BC và H là trực tâm. Biết $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = kBC^2$. Khi đó $k = ?$

🐞 Điền đáp số:

» Câu 71. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$. Tính $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC}$

🐞 Điền đáp số:

----- Hết -----