

ĐỀ KIỂM TRA CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI

Thời gian làm bài : 150 phút

Bài 1. (3,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức :

$$P = \frac{x}{\sqrt{xy} - 2y} + \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} - 2\sqrt{xy} - 2\sqrt{y}} \cdot \frac{2}{1 - \sqrt{x}} \text{ với } x \geq 0, y \geq 0, x \neq 4, x \neq 1$$

b) Cho $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Tính giá trị biểu thức $A = \sqrt{x^5 - 5x^3 - 6x^2 - 6x + 3}$

Bài 2. (4,5 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{3x^2 - 6x - 6} = 3\sqrt{(2-x)^5} + (7x-19)\sqrt{2-x}$

b) Giải phương trình $5x^2 + 6x + 4 = 3(x+1)\sqrt{3x^2 + 4}$

Bài 3. (4,0 điểm)

a) Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $p = a^2 + b^2$ là số nguyên tố và $p-5$ chia hết cho 8. Giả sử x, y là các số nguyên thỏa mãn $ax^2 - by^2$ chia hết cho p . Chứng minh rằng cả hai số x, y chia hết cho p

b) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (m, n) thỏa mãn $(2m+5n+1)(2^m+n+m^2+m) = 105$

Bài 4. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại trực tâm H . Gọi K, Q lần lượt là giao điểm của đường thẳng EF với hai đường thẳng AH, AO

1) Chứng minh $\angle AQE = 90^\circ$

2) Gọi I là trung điểm của AH . Chứng minh $IE^2 = IK \cdot ID$

3) Gọi R, J lần lượt là trung điểm của BE, CF . Chứng minh JR vuông góc với QD

Bài 5. (2,5 điểm)

a) Với các số thực a, b, c thỏa mãn $0 \leq a, b, c \leq 1$ và $a + b + c = 2$, tìm giá trị lớn nhất và giá

trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{ab}{1+ab} + \frac{bc}{1+bc} + \frac{ca}{1+ca}$

b) Trên một mặt bàn phẳng có 2021 đồng xu kích thước bằng nhau, mỗi đồng xu có hai mặt trong đó có một mặt màu xanh và một mặt màu đỏ, đồng thời tất cả các đồng xu đều ngửa mặt màu xanh lên trên mặt bàn. Thực hiện trò chơi sau đây: mỗi lượt chơi phải đổi mặt 10 đồng xu nào đó trên mặt bàn. Hỏi sau 2022 lượt chơi có thể nhận được tất cả 2021 đồng xu trên mặt bàn đều ngửa mặt màu đỏ lên trên hay không? Hãy giải thích vì sao?

Người soạn đề : PHẠM ĐỨC