

ĐỀ SỐ 16: ĐỀ TỰ LUYỆN BỒI DƯỠNG HSG CẤP HUYỆN LỚP 8**NĂM HỌC: 2023-2024****Thời gian làm bài 120 phút****I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm)** Chọn một phương án đúng

Câu 1. Sau khi rút gọn biểu thức $P = \frac{2x^5 - x^4 - 2x + 1}{4x^2 - 1} + \frac{8x^2 - 4x + 2}{8x^3 + 1}$ với $x \neq \pm \frac{1}{2}$ là:

A. $P = \frac{x^4 - 1}{2x + 1}$

B. $P = \frac{x^4 + 1}{2x - 1}$

C. $P = \frac{x^4 + 1}{2x + 1}$

D. $P = \frac{x^4 + 1}{x + 1}$

Câu 2. Cho biết $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2005.2006}$ và $B = \frac{1}{1004.2006} + \frac{1}{1005.2006} + \dots + \frac{1}{2006.1004}$ thì:

A. $\frac{A}{B} = 1005$

B. $\frac{A}{B} = \frac{1}{1050}$

C. $\frac{A}{B} \in \mathbb{Z}$

D. $\frac{A}{B} = \frac{1}{1505}$

Câu 3. Cho các số a, b lần lượt thỏa mãn các hệ thức sau: $a^3 - 3a^2 + 5a - 2011 = 0$,

$b^3 - 3b^2 + 5b + 2005 = 0$. Giá trị $a + b$ là :

A. 0

B. 2

C. 2011

D. 2005

Câu 4. Trên cùng một mặt phẳng tọa độ cho hai điểm A(5; 2) và B(3; -4). Xác định điểm M trên trục hoành để tam giác MAB cân tại M, tọa độ điểm M là

A. M(1;2)

B. M(1;0)

C. M(2;0)

D. M(3;0)

Câu 5. Cho 3 hàm số $f(x) = x^2 + 3$; $g(x) = x^2 - x + 1$ và $h(x) = 2x^2 + 3x - 1$.

Xét các khẳng định

(1): $f(x) - g(x)$ là hàm số bậc nhất;

(2): $h(x) - g(x)$ là hàm số bậc nhất;

(3): $f(x) + g(x) - h(x)$ là hàm số bậc nhất.

Trong các khẳng định trên, khẳng định đúng là

A. Chỉ (1).

B. Chỉ (2).

C. Chỉ (1) và (2).

D. Chỉ (1) và (3).

Câu 6. Số hữu tỷ a và b để đa thức $x^3 + ax + b$ chia hết cho đa thức $x^2 + x + 2$ là:

A. $a = -3$; $b = -2$

B. $a = 3$; $b = 2$

C. $a = 3$; $b = -2$

D. $a = -3$; $b = 2$

Câu 7. Cho biểu thức $(2x^2 - 3)^{2017}$ sau khi khai triển được đa thức, tổng các hệ số của đa thức là:

A. 1

B. 0

C. -1

D. 2017

Câu 8. Xác định a và b để đa thức $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - ax + b$ chia hết cho đa thức $x^2 - x - 2$ là:

A. $a = -2$; $b = -4$

B. $a = 2$; $b = -4$

C. $a = 2$; $b = 4$

D. $a = -2$; $b = 4$

Câu 9. Cho ΔABC vuông tại A. Trên BC lấy điểm M, trên AB lấy điểm N, trên AC lấy điểm P sao cho $BM = BN$, $CM = CP$. Số đo góc PMN là:

A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 70°

Câu 10. Cho tam giác ABC có $\angle B = 120^\circ$, $AB = 6\text{cm}$, $BC = 12\text{cm}$, phân giác BD. Độ dài BD là:

A. 4

B. 5

C. 6

D. 8

Câu 11. Cho tam giác ABC vuông tại A, gọi I là giao điểm các đường phân giác. Biết $AB = 5\text{ cm}$, $IC = 6\text{ cm}$. Độ dài BC là:

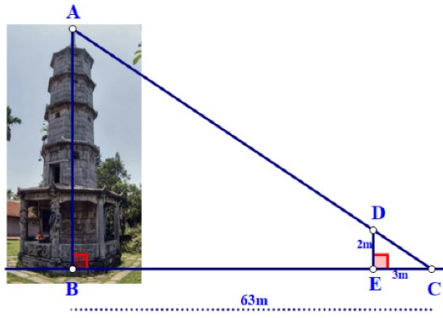
A. 8cm ;

B. 9cm ;

C. $BC = 10\text{cm}$;

D. Một số khác

Câu 12. Bóng của một tháp trên mặt đất có độ dài $BC = 63\text{ m}$ (như hình vẽ). Cùng thời điểm đó, một cây cột DE cao 2 mét cắm vuông góc với mặt đất có bóng dài 3 mét.



Khi đó, chiều cao AB của tháp là:

A. 42 m

B. 44 m.

C. 94,5 m

D. 99 m

Câu 13. Ba đường cao AD , BE , CF của tam giác ABC gặp nhau tại H . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $DA.DE = DH.DF$

B. $DA.DF = DE.DH$

C. $DE.DH = DA.DF$

D. $DA.DH = DE.DF$

Câu 14. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trên đường chéo BD lấy điểm P , gọi M là điểm đối xứng của điểm C qua P . Tứ giác $AMDB$ là hình gì?

A. Tứ giác $AMDB$ là hình vuông

B. Tứ giác $AMDB$ là hình chữ nhật

C. Tứ giác $AMDB$ là hình thang

D. Tứ giác $AMDB$ là hình bình hành

Câu 15: Một khối bê tông được làm có dạng hình chóp tứ giác đều trong đó có cạnh đáy hình chóp là 2m, chiều cao của mặt bên xuất phát từ đỉnh của hình chóp là 3m. Người ta sơn bốn mặt xung quanh của khối bê tông. Cứ mỗi mét vuông sơn cần trả 30 000 đồng (tiền sơn và tiền công). Cần phải trả bao nhiêu tiền khi sơn bốn mặt xung quanh?

A. 360000 đồng; B. 540000 đồng; C. 180000 đồng; D. 270000 đồng

Câu 16. Bác Mai muốn may một cái lều cắm trại bằng vải bạt có dạng hình chóp tứ giác đều với độ dài cạnh đáy là 2,5m, chiều cao của cái lều trại là 3m. Tính thể tích khoảng không bên trong lều?

A. 6,52 (m^3)

B. 5,62 (m^3)

C. 5,26 (m^3)

D. 6,25 (m^3)



II. Phần tự luận (12 điểm)

Câu 1 (3,5 điểm):

a. Chứng minh rằng: $(n^5 - 5n^3 + 4n) : 120$ với $n, n \in \mathbb{Z}$

b. Giải phương trình với nghiệm là số nguyên: $x(x^2 + x + 1) = 4y(y + 1)$.

Câu 2 (3,0 điểm):

a. Tìm đa thức $f(x)$ biết $f(x)$ chia cho $x-3$ thì dư 2, $f(x)$ chia cho $x+4$ thì dư 9, còn $f(x)$ chia cho x^2+x-12 được thương là x^2+3 và còn dư.

b. Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$. Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$.

Câu 3 (4,5 điểm): Cho hình vuông $ABCD$, độ dài các cạnh bằng a . Một điểm M chuyển động trên cạnh DC ($M \neq D$, $M \neq C$) chọn điểm N trên cạnh BC sao cho $\angle MAN = 45^\circ$, DB thứ tự cắt AM , AN tại E và F .

1. Chứng minh: $\triangle ABF$ đồng dạng $\triangle AMC$

2. Chứng minh $\angle AFM = \angle AEN = 90^\circ$

3. Chứng minh $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} S_{\triangle AMN}$

4. Chứng minh chu vi tam giác CMN không đổi khi M chuyển động trên DC

Câu 4 (1,0 điểm): Cho a ; b ; c là số đo ba cạnh của tam giác chứng minh rằng $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

---Hết---

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM

I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm) Mỗi câu đúng 0,5 điểm

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	C	C	B	B	D	D	C	B	B	A
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	B	A	D	C	A	D				

HƯỚNG DẪN

Câu 1. Cho biểu thức $P = \frac{2x^5 - x^4 - 2x + 1}{4x^2 - 1} + \frac{8x^2 - 4x + 2}{8x^3 + 1} \quad x \neq \pm \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } P &= \frac{2x^5 - x^4 - 2x + 1}{4x^2 - 1} + \frac{8x^2 - 4x + 2}{8x^3 + 1} = \frac{x^4(2x-1) - (2x-1)}{(2x-1)(2x+1)} + \frac{2(4x^2 - 2x + 1)}{(2x+1)(4x^2 - 2x + 1)} \\
 &= \frac{(x^4 - 1)(2x-1)}{(2x-1)(2x+1)} + \frac{2}{2x+1} = \frac{x^4 - 1}{2x+1} + \frac{2}{2x+1} = \frac{x^4 + 1}{2x+1} \\
 \text{Vậy } P &= \frac{x^4 + 1}{2x+1}
 \end{aligned}$$

Câu 2. Đặt $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2005.2006}$

$B = \frac{1}{1004.2006} + \frac{1}{1005.2006} + \dots + \frac{1}{2006.1004}$. Chứng minh rằng $\frac{A}{B} \in \mathbb{Z}$

Lời giải

áp dụng các bài trên, ta có:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2005.2006} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2005} - \frac{1}{2006} = \\
 &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2005}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2006}\right) = \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2006}\right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2006}\right) = \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2006}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1003}\right) = \frac{1}{1004} + \frac{1}{1005} + \dots + \frac{1}{2006}
 \end{aligned}$$

Còn $B = \frac{2}{3010} \left(\frac{1}{1004} + \frac{1}{1005} + \dots + \frac{1}{2006} \right) \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{3010}{2} = 1505 \in \mathbb{Z}$

Câu 3. Cho các số a, b lần l-ợt thoả mãn các hệ thức sau: $a^3 - 3a^2 + 5a - 2011 = 0$, $b^3 - 3b^2 + 5b + 2005 = 0$. Giở trị $a + b$.

Từ điều kiện đã cho ta có:

$$(a-1)^3 + 2(a-1) - 2008 = 0 \quad (1), \quad (b-1)^3 + 2(b-1) + 2008 = 0 \quad (2)$$

Cộng theo vế của (1) và (2) ta có $(a-1)^3 + (b-1)^3 + (a+b-2) = 0$

$$\Leftrightarrow (a+b-2) \left[(a-1)^2 - (a-1)(b-1) + (b-1)^2 \right] + 2(a+b-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-2) \left[(a-1)^2 - (a-1)(b-1) + (b-1)^2 + 2 \right] = 0$$

$$\text{Vì } (a-1)^2 - (a-1)(b-1) + (b-1)^2 + 2$$

$$= \frac{1}{2}(a-b)^2 + \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{2}(b-1)^2 + 2 > 0 \quad \forall a, b$$

$$\text{Nên } a+b-2=0 \Leftrightarrow a+b=2$$

Câu 4. Tập nghiệm của bất phương trình: $\frac{x+2}{3} - x + 1 > x + 3$.

Giải:

$$a, (1) \Leftrightarrow x+2-3x+3 > 3x+9 \Leftrightarrow 5x < -4 \Leftrightarrow x < -\frac{4}{5}.$$

$$\text{Vậy: } S = (-\infty; -\frac{4}{5}).$$

Câu 5. Tập nghiệm của phương trình $|-5x| - 3x + 12 = 3$

Bài giải

Với $x > 0 \Rightarrow -5x < 0 \Rightarrow |-5x| = -(-5x) = 5x \Rightarrow |-5x| - 3x + 12 = 3 \Leftrightarrow 5x - 3x + 12 = 0$
 $\Leftrightarrow 2x = -12 \Leftrightarrow x = -6$ giá trị này không thỏa mãn điều kiện $x > 0$ nên nó không là nghiệm.
 Với $x \leq 0 \Rightarrow -5x \geq 0 \Rightarrow |-5x| = -5x \Rightarrow |-5x| - 3x + 12 = 3 \Leftrightarrow -5x - 3x + 12 = 0 \Leftrightarrow 8x = 12$
 $\Leftrightarrow x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ giá trị này không thỏa mãn điều kiện $x \leq 0$ nên nó không là nghiệm.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 6. Xác định các số hữu tỷ a và b để đa thức $x^3 + ax + b$ chia hết cho đa thức $x^2 + x + 2$.

Giải

Thực hiện phép chia

x^3	+	ax	+	b	$x^2 + x - 2$
$-x^3 +$	x^2	-	$2x$		
$-x^2 + (a+2)x + b$					$x - 1$
$-x^2 -$	x	+	2		
$(a+3)x + (b-2)$					

Để chia hết, đa thức dư phải đồng nhất bằng 0, nên :

$$\begin{cases} a+3=0 \\ b-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=2 \end{cases}$$

Vậy với $a = -3; b = 2$ thì $x^3 + ax + b$ chia hết cho $x^2 + x + 2$.

Câu 7. Cho biểu thức $(2x^2 - 3)^{2017}$ sau khi khai triển được đa thức, tổng các hệ số của đa thức là: Thay $x=1$ ta được -1

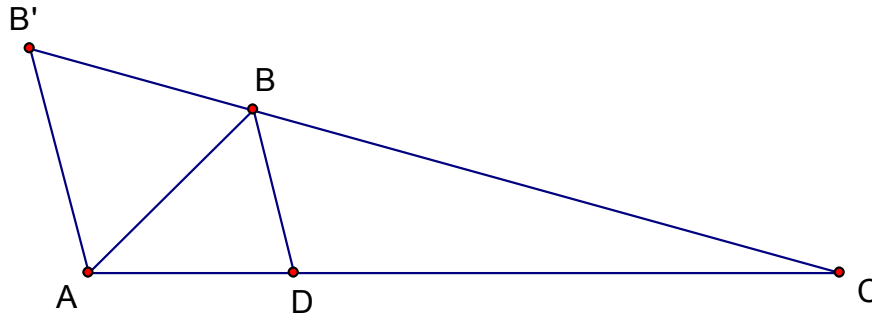
Câu 8. Xác định a và b để đa thức $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - ax + b$ chia hết cho đa thức $x^2 - x - 2$.

HD: sử dụng phương pháp giá trị riêng, ta được kết quả $a = 2; b = -4$.

Câu 9. Cho ΔABC vuông tại A. Trên BC lấy điểm M, trên AB lấy điểm N, trên AC lấy điểm P sao cho $BM=BN, CM=CP$. Tính số đo góc PMN

$$\left. \begin{array}{l} M_1 = \frac{180^\circ - B}{2} \\ M_3 = \frac{180^\circ - C}{2} \\ B + C = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow M_2 = 180^\circ - (M_1 + M_3) = 180^\circ - \frac{180^\circ - B + 180^\circ - C}{2} = 45^\circ$$

Câu 10. Cho tam giác ABC có $B = 120^\circ$, $AB = 6\text{cm}$, $BC = 12\text{cm}$, phân giác BD.
a) Tính BD.



Kẻ $AB' \parallel BD \Rightarrow \triangle ABB'$ là tam giác đều $\Rightarrow AB' = AB = BB' = 6\text{cm}$

$$\text{Có } \frac{BD}{AB'} = \frac{BC}{CB'} \Rightarrow BD = \frac{AB' \cdot BC}{CB'} = \frac{AB \cdot BC}{3 \cdot AB} = \frac{2}{3} \cdot AB = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4(\text{cm})$$

Câu 11. Cho tam giác ABC vuông tại A, gọi I là giao điểm các đường phân giác .

- Biết $AB = 5\text{ cm}$, $IC = 6\text{ cm}$. Tính độ dài BC .
- Biết $IB = \sqrt{5}\text{ cm}$, $IC = \sqrt{10}\text{ cm}$. Tính độ dài AB và AC .

Giải

- Kẻ $BH \perp BI$ tại H, CH cắt BA tại D .

Ta có tam giác BCD cân nên $CH = HD$. Đặt $BC = x$ thì $AD = x - 5$,

Tam giác CHI vuông cân có :

$$\angle CIH = 45^\circ \Rightarrow CH = \frac{IC}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \Rightarrow DC = \frac{12}{\sqrt{2}} .$$

Áp dụng định lý Pitago cho tam giác ACD vuông tại A ta có :

$$AD^2 + AC^2 = DC^2 \Rightarrow (x - 5)^2 + (x^2 - 25) = 72$$

Rút gọn được $(x - 9)(x + 4) = 0$. Đáp số $BC = 9\text{ cm}$

- Kẻ $CH \perp BI$. Ta có tam giác CHI vuông cân nên

$$\angle CIH = 45^\circ \Rightarrow CH = \frac{IC}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5} \Rightarrow BH = 2\sqrt{5}\text{ cm}$$

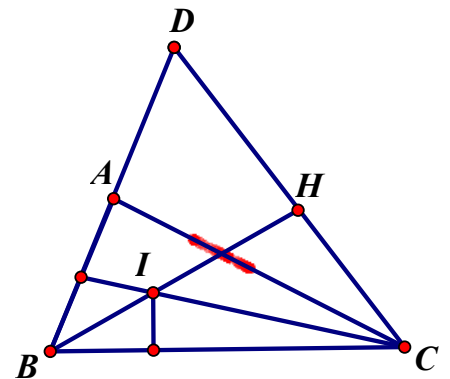
Áp dụng định lý Pitago cho tam giác vuông BHC:

$$BC^2 = BH^2 + CH^2 = 20 + 5 = 25 \text{ Nên } BC = 5\text{ cm}$$

Ta có tam giác BCD cân tại B Suy ra $BC = BD = 5\text{ cm}$;

$$CD = 2CH = 2\sqrt{5}\text{ cm}$$

$$2S_{BCD} = BH \cdot CD = AC \cdot BD . \text{ Suy ra } AC = \frac{BH \cdot CD}{BD} = \frac{BH \cdot CD}{BC}$$



Thay số $AC = 4\text{ cm}$, $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{25 - 16} = 3\text{ cm}$

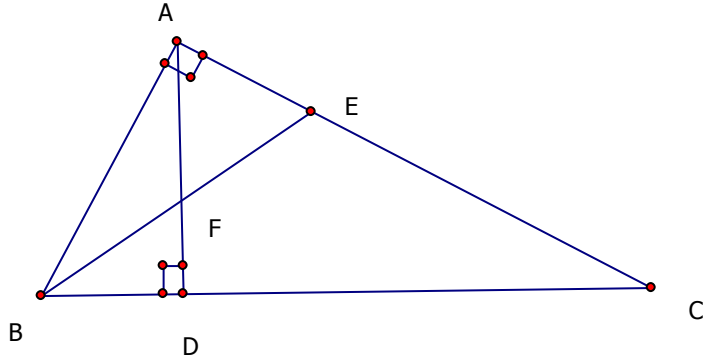
Câu 11. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AD ứng với cạnh huyền BC cắt đường phân giác BE tại F (E thuộc AC). Chứng minh rằng :

$$\frac{DF}{FA} = \frac{AE}{EC}.$$

Suy xét : DF và FA là hai đoạn thẳng tạo nên bởi đường phân giác của góc B trong tam giác BAD cắt cạnh đối diện với góc B nên tỷ số của chúng bằng $BD : AB$. Tương tự AE và EC cũng vậy, tỷ số của chúng bằng $AB : BC$. Vậy muốn có tỷ lệ thức trong kết luận ta cần chứng minh :

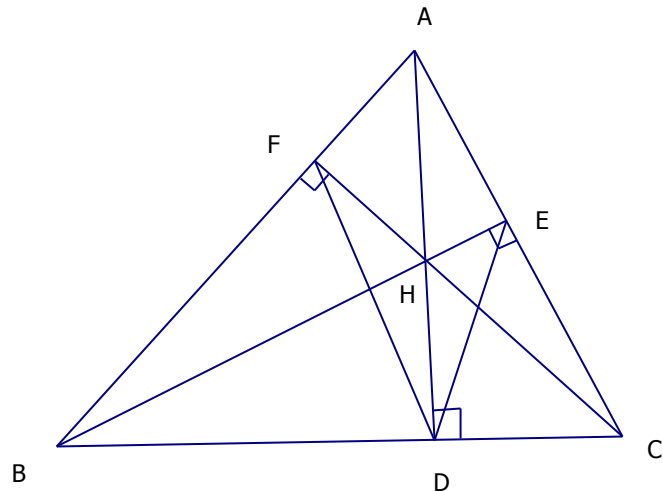
$BD : AB = AB : BC$ là đúng. Ta nhận thấy $\triangle DBA \sim \triangle ABC$ mà $BD \sim BA$;

$AB \sim BC$ là hai cặp cạnh tương ứng của hai tam giác nói trên suy ra ĐPCM.



Câu 13. Ba đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC gặp nhau tại H. Chứng minh rằng : $DA \cdot DH = DE \cdot DF$.

Suy xét : Muốn chứng minh $DA \cdot DH = DE \cdot DF$ ta biến đổi thành tỷ lệ thức $DA : DF = DE : DH$, rồi chứng minh tỷ lệ thức này. DA, DF là hai cạnh của tam giác DAE. DE, DH là hai cạnh của tam giác DFH ta phải tìm cách chứng minh hai tam giác này đồng dạng với nhau. Muốn cho hai tam giác đồng dạng thì cần phải có hai góc tương ứng bằng nhau từng đôi một. Vì tứ giác AFDC nội tiếp nên có góc $\angle DAE = \angle DFH$ và ta có $\angle ADE = \angle FDH$ nên ta có thể chứng minh hai tam giác nói trên đồng dạng được.



Câu 14 Cho hình chữ nhật ABCD. Trên đường chéo BD lấy điểm P, gọi M là điểm đối xứng của điểm C qua P.

a. Tứ giác AMDB là hình gì? Vì sao?

b. Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của điểm M lên AB, AD. Chứng minh $EF \parallel AC$ và ba điểm E, F, P thẳng hàng.

c. Chứng minh rằng tỉ số các cạnh của hình chữ nhật MEAF không phụ thuộc vào vị trí của điểm P.

d. Giả sử $CP \perp BD$ và $CP = 2,4\text{ cm}$, $\frac{PD}{PB} = \frac{9}{16}$. Tính các cạnh của hình chữ nhật ABCD.

Vẽ hình, ghi GT, KL đúng



có 1 góc = 45° $\Rightarrow AD = HD = HE = HF$

$\Rightarrow ADHE$ là hình vuông (đpcm)

Câu 16. Trường Tiểu học Xuân Đình tham gia hội khỏe Phù Đổng, có 11 học sinh đoạt giải, trong đó có 6 em giành ít nhất 2 giải, có 4 em giành ít nhất 3 giải và có 2 em giành mỗi người 4 giải. Hỏi trường đó đã giành được bao nhiêu giải?

Bài giải:

Có 11 em đoạt giải, trong đó có 6 em giành ít nhất 2 giải nên số học sinh giành mỗi em 1 giải là : $11 - 6 = 5$ (em). Có 6 em giành ít nhất 2 giải, trong đó có 4 em giành ít nhất 3 giải nên số em giành mỗi em 2 giải là : $6 - 4 = 2$ (em). Có 4 em giành ít nhất 3 giải trong đó có 2 em giành mỗi em 4 giải nên số em giành mỗi em 3 giải là : $4 - 2 = 2$ (em). Số em giành từ 1 đến 4 giải là : $5 + 2 + 2 + 2 = 11$ (em). Do đó không có em nào giành được nhiều hơn 4 giải. Vậy số giải mà trường đó giành được là : $1 \times 5 + 2 \times 2 + 3 \times 2 + 4 \times 2 = 23$ (giải).

II. Phần tự luận (12,0 điểm)

Câu 1(3,5 điểm): a. Chứng minh rằng: $(n^5 - 5n^3 + 4n) : 120$ với $n, n \in \mathbb{Z}$

Ta có : $n^5 - 5n^3 + 4n = n^5 - n^3 - 4n^3 + 4n = n^3(n^2 - 1) - 4n(n^2 - 1)$
 $= n(n - 1)(n + 1)(n - 2)(n + 2)$ là tích của 5 số nguyên liên tiếp trong đó có ít nhất hai số là bội của 2 (trong đó một số là bội của 4, một số là bội của 3, một số là bội của 5).

Vậy tích của 5 số nguyên liên tiếp chia hết cho $8, 3, 5 = 120$.

b. Giải phương trình với nghiệm là số nguyên: $x(x^2 + x + 1) = 4y(y + 1)$.

+ Phương trình đưa về biến đổi thành: $(x + 1)(x^2 + 1) = (2y + 1)^2$

+ Ta chứng minh $(x + 1)$ và $(x^2 + 1)$ nguyên tố cùng nhau !

Vì nếu $d = \text{UCLN}(x+1, x^2 + 1)$ thì d phải là số lẻ (vì $2y+1$ lẻ)

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1:d \\ x^2+1:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+x:d \\ x^2+1:d \\ x+1:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1:d \\ x-1:d \end{cases} \Rightarrow 2:d \text{ mà } d \text{ lẻ nên } d = 1.$$

+ Nên muốn $(x + 1)(x^2 + 1)$ là số chính phương

Thì $(x+1)$ và $(x^2 + 1)$ đều phải là số chính phương

$$\text{Đặt: } \begin{cases} x^2 + 1 = k^2 \\ x + 1 = t^2 \end{cases} \Rightarrow (k + x)(k - x) = 1 \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ x = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} k = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

+ Với $x = 0$ thì $(2y + 1)^2 = 1 \Rightarrow y = 0$ hoặc $y = -1$. (Thỏa mãn pt)

Vậy nghiệm của phương trình là: $(x; y)$

Câu 2 (3,0 điểm):

a. Tìm đa thức $f(x)$ biết $f(x)$ chia cho $x-3$ thì dư 2, $f(x)$ chia cho $x+4$ thì dư 9, còn

$f(x)$ chia cho $x^2 + x - 12$ được thương là $x^2 + 3$ và còn dư

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(x) = (x-3)A(x) + 2 \quad (1)$$

$$f(x) = (x+4)B(x) + 9 \quad (2)$$

$$f(x) = (x^2 + x - 12)C(x) + ax + b$$

$$= (x^2 + x - 12)(x^2 + 3) + ax + b \quad (3)$$

$$\text{Thay } x = 3 \text{ vào (1) ta có: } f(3) = 2 \quad (4)$$

$$\text{Thay } x = -4 \text{ vào (2) ta có: } f(-4) = 9 \quad (5)$$

$$\text{Từ (3) ta có: } f(x) = (x-3)(x+4)(x^2+3) + ax + b \quad (6)$$

$$\text{Từ (4) và (6): } 3a + b = 2 \quad (7)$$

$$\text{Từ (5) và (6): } -4a + b = 9 \quad (8)$$

$$\text{Từ (7) và (8) ta có: } a = -1, b = 5$$

$$\text{Vậy } f(x) = (x^2 + x - 12)(x^2 + 3) - x + 5.$$

b. Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$. Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$.

Giải:

$$\text{Từ } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\left(\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ac}\right) = 1$$

$$\Rightarrow A = 1 - 2\left(\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ac}\right) = 1 - 2\left(\frac{xyz}{abc}\right)$$

$$\text{Từ } \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Rightarrow \frac{xyz}{abc} = 0$$

$$\Rightarrow yza + xzb + xyc = 0$$

$$\Rightarrow A = 1 - 2\left(\frac{0}{abc}\right) = 1$$

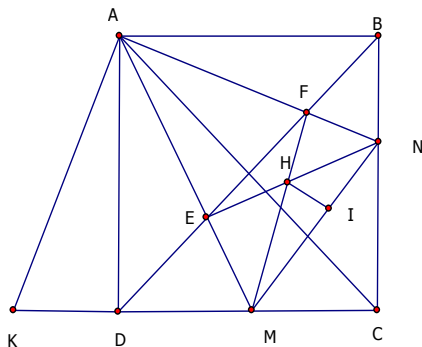
Câu 3 (4,5 điểm): Cho hình vuông ABCD, độ dài các cạnh bằng a. Một điểm M chuyển động trên cạnh DC ($M \neq D, M \neq C$) chọn điểm N trên cạnh BC sao cho $\angle MAN = 45^\circ$, DB thứ tự cắt AM, AN tại E và F.

1. Chứng minh: $\angle ABF = \angle AMC$

2. Chứng minh $\angle AFM = \angle AEN = 90^\circ$

3. Chứng minh $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} S_{\triangle AMN}$

4. Chứng minh chu vi tam giác CMN không đổi khi M chuyển động trên DC



1. Chứng minh: $\angle ABF \neq \angle AMC$ (1,25 điểm)

-Ta cm: $\angle ABF = \angle ACM = 45^\circ$

- $\angle BAF = \angle MAC$ (vì cùng cộng với góc CAN bằng 45°)

suy ra : $\angle ABF$ đồng dạng $\angle AMC$

2. Chứng minh $\angle AFM = \angle AEN = 90^\circ$ (1,5 điểm)

Từ $\triangle AFB \sim \triangle AMC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AF}{AM} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{AF}{AB} = \frac{AM}{AC} \quad (1)$$

Có $\angle MAF = \angle BAC = 45^\circ$ (2)

Từ 1 và 2 $\Rightarrow \triangle AFM \sim \triangle ABC$

$\Rightarrow \angle AFM = \angle ABC = 90^\circ$

C/M hoàn toàn tương tự có $\angle AEN = 90^\circ$

vì vậy $\angle AFM = \angle AEN = 90^\circ$

3. $S_{\triangle AEF} = 1/2 S_{\triangle AMN}$ (2 điểm)

$$\text{Có } \triangle AFM \sim \triangle AEN \Rightarrow \frac{AF}{AM} = \frac{AE}{AN}$$

$$\Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle AMN \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{AMN}} = \left(\frac{AF}{AM}\right)^2 \quad (1)$$

Có $\angle FAM = 45^\circ$, $\angle AFM = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle AFM$ Vuông cân đỉnh F nên $AM^2 = AF^2 + FM^2 = 2AF^2$

$$\Rightarrow \left(\frac{AF}{AM}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Thay vào (1) ta đ-ợc $\frac{S_{AEF}}{S_{AMN}} = \frac{1}{2}$ hay: $S_{\triangle AEF} = 1/2 S_{\triangle AMN}$

4.. C/M chu vi $\triangle CMN$ không đổi (1,25 điểm)

Trên tia đối của tia DC lấy điểm K sao cho $DK = BN$

$\triangle ADK = \triangle ABN \Rightarrow AK = AN$ và $\angle BAN = \angle DAK$.

do đó $\triangle AMN = \triangle AKM$ (c.g.c) $\Rightarrow MN = KM$

Vì vậy: Chu vi $\triangle CMN = MN + CN + CM = CM + KM + CN$
 $= CD + KD + CN = CD + NB + CN$
 $= CD + CB = 2a$ không đổi

Tức là: Chu vi $\triangle CMN$ không thay đổi khi M chuyển động trên cạnh DC

Câu 4 (1,0 điểm): Cho a; b; c là số đo ba cạnh của tam giác chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad \text{Đặt } x = b + c ; y = c + a ; z = a + b$$

$$\text{ta có } a = \frac{y+z-x}{2} ; b = \frac{z+x-y}{2} ; c = \frac{x+y-z}{2}$$

$$\text{ta có (1)} \Leftrightarrow \frac{y+z-x}{2x} + \frac{z+x-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 1 + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} - 1 + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1 \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z} \right) \geq 6 \text{ là Bđt đúng?}$$

Hết