

Người biên soạn: Nguyễn Việt Anh – ChemHUS

Đại Học Khoa Học Tự Nhiên – Đại Học Quốc Gia Hà Nội

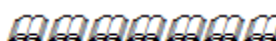
SĐT: 01655911717 - Email: Nguyenvietanh1@hus.edu.vn

PHƯƠNG PHÁP GIẢI NHANH BẰNG CASIO

Chuyên Đề: SỐ PHỨC và CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN SỐ PHỨC

(Nâng cao các dạng trong đề thi)

Tất cả các bài toán số phức đều thực hiện trong chức năng **MODE 2 (CMPLX)** ngoại trừ 1 số bài toán đặc biệt. Chú ý 2 phần D và E



A.. Các phép tính thông thường, Tính Moldun, Argument, Conjg của 1 số phức hay 1 biểu thức số phức. **Và tính số phức có mũ cao.....**

Bài toán tổng quát: Cho $Z = z_1 \cdot z_2 - \frac{z_3 + z_4}{z_5}$. Tìm Z và tính Moldun, Argument và số phức liên hợp của số phức Z ???

Phương pháp giải:

- Để máy tính ở chế độ Deg không để dưới dạng Rad và vào chế độ số phức Mode 2
- Khi đó chữ “i” trong phần ảo sẽ là nút “ENG” và ta thực hiện bấm máy như 1 phép tính bình thường.
- Tính Moldun, Argument và số phức liên hợp của số phức Z :
 - Moldun: Ấn shift + hyp. Xuất hiện dấu trị tuyệt đối thì ta nhập biểu thức đó vào trong rồi lấy kết quả
 - Tính Arg ấn Shift 2 chọn 1. Tính liên hợp ấn shift 2 chọn 2

Ví dụ 1: Đề thi minh họa của bộ GD và ĐT lần 2 năm 2017

Tìm số phức liên hợp của số phức $z = i(3i + 1)$

A: $3 - i$

B: $-3 + i$

C: $3 + i$

D: $-3 - i$

Giải:

- Mode 2 và ấn shift 2 chọn 2
- Nhập như sau: Conjg(i(3i + 1)) và ấn bằng
- Kết quả ra -3 - i vậy D đúng

Ví dụ 2: Đề thi minh họa của bộ GD và ĐT lần 2 năm 2017

Tìm modulus của số phức z thỏa mãn $z(2 - i) + 13i = 1$

A: $|z| = \sqrt{34}$

B: $|z| = 34$

C: $|z| =$

D: $|z| =$

Giải:

- Chuyển về để z ở 1 phía
- Mode 2 và ấn shift hyp
- Nhập vào như sau: $|\frac{1-13i}{2-i}|$ sau đó lấy kết quả và thấy A đúng.

****: Với số phức có mũ cao thì chỉ máy tính Casio fx 570 vn plus và Vinacal ES plus II có thể bấm được như bình thường. Còn Casio fx 570 es plus thì sẽ Math Error.

Bài tập tự luyện:

Câu : Modulus của số phức $z = 5 + 2i - (1 + i)^3$ là:

A. 7

B. 3

C. 5

D. 2

Câu : Thực hiện các phép tính sau: $B = \frac{3-4i}{(1-4i)(2+3i)}$.

A. $\frac{3+4i}{14-5i}$

B. $\frac{62-41i}{221}$

C. $\frac{62+41i}{221}$

D. $\frac{-62-41i}{221}$

Câu : Cho số phức $z = -5 - 12i$. Khẳng định nào sau đây là sai:

A. Số phức liên hợp của z là $\bar{z} = 5 - 12i$

B. $w = 2 - 3i$ là một căn bậc hai của z

C. Modulus của z là 13

D. $z^{-1} = -\frac{5}{169} + \frac{12}{169}i$

Câu : Thực hiện các phép tính sau: $A = (2-3i)(1+2i) + \frac{4-i}{3+2i}$.

- A. $\frac{-114-2i}{13}$ B. $\frac{114+2i}{13}$ C. $\frac{114-2i}{13}$ D. $\frac{-114+2i}{13}$

Câu : Tìm số phức liên hợp của: $z = (1+i)(3-2i) + \frac{1}{3+i}$

- A. $\bar{z} = -\frac{53}{10} - \frac{9}{10}i$ B. $\bar{z} = \frac{53}{10} + \frac{9}{10}i$ C. $\bar{z} = -\frac{53}{10} + \frac{9}{10}i$ D. $\bar{z} = \frac{53}{10} - \frac{9}{10}i$

Câu : Cho số phức $z = 1 - i\sqrt{3}$. Hãy xác định mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

- A. z có một argumen là $\frac{2\pi}{3}$ B. $|z| = 2$
 C. A và B đều đúng D. z có dạng lượng giác là $z = 2\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$

Câu : Cho số phức $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2017}$. Khi đó $z \cdot z^7 \cdot z^{15} =$

- A. $-i$ B. 1 C. i D. -1

Câu : Với mọi số ảo z , số $z^2 + |z|^2$ là

- A. Số 0 B. Số thực âm C. Số thực dương D. Số ảo khác 0

B.. Tìm căn bậc 2, chuyển số phức về dạng lượng giác và ngược lại

[B.1.. Tìm căn bậc 2 của số phức và tính tổng hệ số của căn đó.](#)

Bài toán tổng quát: Cho số phức z thỏa mãn $z = f(a, bi)$. Tìm 1 căn bậc 2 của số phức và tính tổng, tích hoặc 1 biểu thức của hệ số.

Phương pháp giải:

- Cách 1: Đối với việc tìm căn bậc 2 của số phức cách nhanh nhất là ta bình phương các đáp án xem đáp án nào trùng số phức đề cho.
- Cách 2: Không vào chế độ Mode 2. Ta để máy ở chế độ Mode 1
 - Ấn shift + sẽ xuất hiện và ta nhập Pol(phần thực , phần ảo) ...Lưu ý dấu “,” là shift) sau đó ấn =
 - Ấn tiếp Shift – sẽ xuất hiện và ta nhập Rec($\sqrt{x}$, Y:2) sau đó ấn bằng ta sẽ ra lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức.

Ví dụ: Tìm 1 căn bậc 2 của số phức: $z = (-2 - 6i) + (2i - 1)$

A: $-1 + 2i$

B: $1 - 2i$

C: $1 + 2i$

D: $-1 - 2i$

Giải:

- Vào mode 2. Rút gọn z về dạng tối giản: $z = -3 - 4i$
- Lần lượt bình phương các đáp án ta thấy đáp án B khi bình phương sẽ ra đúng đề bài. Nên B đúng

B.2: Đưa số phức về dạng lượng giác và ngược lại:

Bài toán tổng quát: Tìm dạng lượng giác (bán kính, góc lượng giác) của số phức thỏa mãn $z = f(a, bi)$

Phương pháp giải:

- ấn shift chọn 4 ($\blacktriangleright r < \theta$) sau khi nhập số phức
- ấn = sẽ ra kết quả $a < b$ trong đó $r = a$, góc = b

Chuyển từ lượng giác về số phức: chuyển về radian

- Nhập dạng lượng giác của số phức dưới dạng: bán kính < góc (với < là shift (-))
- ấn shift 2 chọn 4 ($\blacktriangleleft a = bi$) và lấy kết quả

Ví dụ: Chuyển số phức $z = 1 + \sqrt{3}i$ về dạng lượng giác vào tìm góc (độ) của nó

A: 30

B: 45

C: 60

D: 90

Giải:

- Mode 2 và nhập số phức vào máy
- ấn shift 2 chọn 3. Ấn bằng ta được kết quả $2 < 60$
- Góc sẽ là 60 vậy C là đáp án đúng

B.3: Các phép toán cơ bản hoặc tính 1 biểu thức lượng giác của số phức: Làm tương tự như dạng chính tắc của số phức

Bài tập tự luyện:

Câu : Căn bậc hai của -4 là

- A. $-2i$ B. $2i$ C. $\pm 2i$ D. Không xác định

C... Phương trình số phức và các bài toán liên quan:

C.1: Phương trình không chứa ẩn:

Bài toán tổng quát: Cho phương trình $az^2+bz+c = 0$. Phương trình có nghiệm (số nghiệm) là:

..... 4 đáp án

Phương pháp giải:

- Dùng cho máy vinacal: Mode 2 vào chế độ phức và giải phương trình số phức như phương trình hàm số như bình thường và nhân được nghiệm phức
- Đối với casio fx: Nhiều phương trình có nghiệm thực nên cách tốt nhất ta sẽ nhập phương trình đề cho vào máy tính và thực hiện Calc đáp án để tìm ra đáp án

C.2: Phương trình tìm ẩn:

Bài toán tổng quát: Cho phương trình $az^2+bz+c = 0$. Biết phương trình có nghiệm $z_i = A_i$ tìm a,b,c ?

..... 4 đáp án

Phương pháp giải:

- Mode 2 và lần lượt thay các hệ số ở đáp án vào đề

- Dùng Mode 5 để giải phương trình nếu phương trình nào ra nghiệm như đề cho thì đó là đáp án đúng.

Ví dụ: Phương trình $z^2 + bz + c = 0$ nhận $z = 1 + i$ là nghiệm. Giá trị của b và c là :

A: $b = 3; c = 5$ B: $b = 1; c = 3$ C: $b = 4; c = 3$ D: $b = -2; c = 2$

Giải:

- Mode 2 và nhập vào máy tính $X^2 + BX + C$
- Calc lần lượt cho các đáp án. Khi ta calc cho $B = -2, C = 2, X = 1+i$ ra kết quả bằng 0 vậy D là đáp án đúng

Bài tập tự luyện:

Câu : Giải phương trình sau: $z^2 + (1-i)z - 18 + 13i = 0$

A. $z = 4 - i, z = -5 + 2i$

B. $z = 4 - i, z = -5 - 2i$

C. $z = 4 - i, z = -5 - 2i$

D. $z = 4 + i, z = -5 + 2i$

Câu : Phương trình $8z^2 - 4z + 1 = 0$ có nghiệm là

A. $z_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$ và $z_2 = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}i$

B. $z_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$ và $z_2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}i$

C. $z_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$ và $z_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$

D. $z_1 = \frac{2}{4} + \frac{1}{4}i$ và $z_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$

Câu : Nghiệm của phương trình $3x + (2+3i)(1-2i) = 5+4i$ trên tập số phức là:

A. $1 - \frac{5}{3}i$

B. $-1 + \frac{5}{3}i$

C. $1 + \frac{5}{3}i$

D. $-1 - \frac{5}{3}i$

Câu : Biết z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $2z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$. Khi đó, giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ là:

A. $\frac{9}{4}$

B. $-\frac{9}{4}$

C. 9

D. 4

Câu : Phương trình $z^2 + az + b = 0$ có một nghiệm phức là $z = 1 + 2i$. Tổng 2 số a và b bằng

- A. 0 B. -4 C. -3 D. 3

Câu : Gọi z là nghiệm phức có phần thực dương của phương trình: $z^2 + (1 + 2i)z - 17 + 19i = 0$. Khi đó, giả sử $z^2 = a + bi$ thì tích của a và b là:

- A. -168 B. -12 C. -240 D. -5

Câu : Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình: $z^2 - 4z + 5 = 0$. Khi đó, phần thực của $z_1^2 + z_2^2$ là:

- A. 6 B. 5 C. 4 D. 7

Câu : Bộ số thực $(a; b; c)$ để phương trình $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ nhận $z = 1 + i$ và $z = 2$ làm nghiệm.

- A. $(-4; 6; -4)$ B. $(4; -6; 4)$ C. $(-4; -6; -4)$ D. $(4; 6; 4)$

D.. Tìm số phức thỏa mãn điều kiện phức tạp và tính tổng, tích.... Hệ số của số phức

Ngoài cách hỏi trên còn có thể hỏi: Tìm phần thực, phần ảo hay module.... của số phức thỏa mãn điều kiện đề bài

Bài toán tổng quát: Cho số phức $z = a + bi$ thỏa mã điều kiện (phức tạp kèm cả liên hợp...)
Tìm số phức z ?

..... 4 đáp án

Phương pháp giải:

- Nhập điều kiện đề cho vào casio. Lưu ý thay $z = a + bi$ và liên hợp của $z = a - bi$
- Calc $a = 1000$ và $b = 100$
- Sau khi ra kết quả là : $X + Yi$ ta sẽ phân tích X và Y theo a và b để được 2 phương trình bậc nhất 2 ẩn để giải tìm ra a và b

- Lưu ý: Khi phân tích ưu tiên cho hệ số a nhiều nhất có thể (chú ý ví dụ)
- Sau khi tìm được a, b ta làm nốt yêu cầu của đề

Ví dụ: Tìm phần ảo của số phức $z = a + bi$ biết $(1 + i)^2 \cdot (2 - i)z = 8 + i + (2 + 2i)z$

A: -4

B: 4

C: 2

D: -2

Giải:

- Mode 2 và nhập vào casio $(1 + i)^2 \cdot (2 - i)(A + Bi) - 8 - i - (2 + 2i)(A + Bi)$
- Calc A=1000 và B=100
- Ta được kết quả là $-208 + 1999i$. Phân tích như sau:

$$\text{➤ } -208 \Leftrightarrow 0A - 2B - 8$$

$$\text{➤ } 1999 \Leftrightarrow 2A + 0B - 1$$

$\Rightarrow B = -4$ và $A = \frac{1}{2}$. Vậy số phức cần tìm là $z = \frac{1}{2} - 4i$ và phần ảo là -4. A đúng

Ví dụ 2: Câu 33 – Đề thi minh họa kì thi THPTQG đợt 2 năm 2017 của bộ GD và ĐT:

Giải:

- Mode 2 và nhập vào casio $(1+i)(A+Bi) + 2(A-Bi) - 3 - 2i$
- Calc cho A = 1000 và B = 100
- Ta được kết quả $2897 + 898i$ sẽ phân tích
- $2897 \Leftrightarrow 3A - B - 3$ và $898 \Leftrightarrow A - B - 2$. Giải hệ phương trình ta được 2 nghiệm A và B, $A + B = -1$ và chọn C

Bài tập tự luyện:

Câu : Số phức z thỏa mãn $\frac{|z|^2}{z} + 2iz + \frac{2(z+i)}{1-i} = 0$ có dạng $a+bi$ khi đó $\frac{a}{b}$ bằng:

A. $\frac{1}{5}$

B. -5

C. 5

D. $-\frac{1}{5}$

Câu : Cho số phức z thỏa mãn $z - \frac{4}{z+1} = i$. Số phức $w = z^2 + i(z+1)$ có dạng $a+bi$ khi đó $\frac{a}{b}$ là:

- A. $\frac{4}{3}$ B. $-\frac{4}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $-\frac{4}{3}$

Câu : Cho số phức z thỏa mãn hệ thức $(i+3)z + \frac{2+i}{i} = (2-i)\bar{z}$. Mô đun của số phức $w = z-i$ là:

- A. $\frac{\sqrt{26}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{5}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{26}}{25}$

Câu : Số phức z thỏa $z - (2+3i)\bar{z} = 1-9i$ là:

- A. $z = -3-i$ B. $z = -2-i$ C. $z = 2-i$ D. $z = 2+i$

Câu : Trong các số phức z thỏa mãn $|z| = |\bar{z} - 3 + 4i|$, số phức có môđun nhỏ nhất là:

- A. $z = 3+4i$ B. $z = -3-4i$ C. $z = \frac{3}{2} - 2i$ D. $z = \frac{3}{2} + 2i$

Câu : số phức z thỏa mãn: $(3-2i)\bar{z} - 4(1-i) = (2+i)z$. Môđun của z là:

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{10}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Câu : Cho số phức z thỏa mãn $(2-3i).z + (4+i).\bar{z} + (1+3i)^2 = 0$. Gọi a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$. Khi đó $2a+3b =$:

- A. 11 B. 1 C. -19 D. 4

E.. Tìm tập hợp biểu diễn của số phức thỏa mãn điều kiện và hình học số phức:

Bài toán tổng quát: Trên mặt phẳng hệ trục tọa độ Oxy tìm tập hợp biểu diễn của số phức z thỏa mã điều kiện :

..... 4 đáp án

Phương pháp giải: Ưu tiên việc sử dụng 2 máy tính để giải

- Máy thứ 1 ta nhập điều kiện của đề cho với z và liên hợp $\bar{z}$ dạng tổng quát
- Máy thứ 2 lần lượt các đáp án. Ta lấy 2 điểm thuộc các đáp án
- Calc 2 điểm vừa tìm vào điều kiện. Cái nào kết quả ra 0 thì đấy là đáp án đúng (chú ý xem ví dụ)

Ví dụ: Trên mặt phẳng Oxy tìm tập hợp biểu diễn các số phức thỏa mã điều kiện $|zi - (2 + i)| = 2$

A: $x + 2y - 1 = 0$

B: $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$

C: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$

D: $3x + 4y - 2 = 0$

Giải:

- Mode 2 và nhập điều kiện vào casio $|(A+Bi)i - (2+i)|=2$
- Thử đáp án A: Cho $y = 0$ ta được $x = 1$ ta calc $A = 1$ và $B = 0$ kết quả khác 0. Loại luôn đáp án A
- Thử đáp án B: Cho $x = -1$ ta được $y = 5$. Calc ra kết quả khác 0. Loại đáp án B
- Thử đáp án C: cho $x = 1$ ta được $y = 0$ và $y = -4$ Calc lần lượt đều được kết quả bằng 0. Vậy đáp án đúng là C

Bài tập tự luyện

Câu : Cho số phức z thỏa mãn: $2|z - 2 + 3i| = |2i - 1 - 2\bar{z}|$. Tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z là:

A. $20x - 16y - 47 = 0$

B. $20x + 16y - 47 = 0$

C. $20x + 16y + 47 = 0$

D. $20x - 16y + 47 = 0$

Câu : Giả sử $M(z)$ là điểm trên mặt phẳng phức biểu diễn số phức z . Tìm tập hợp các điểm $M(z)$ thỏa mãn điều kiện: $|z - 1 + i| = 2$

A. Đáp án khác

B. $(x+1)^2 + (y + 1)^2 = 4$

C. $(x-1)^2 + (y - 1)^2 = 4$

D. $(x-1)^2 + (y + 1)^2 = 4$

Câu : Cho số phức $w = iz + 1$ với $|z - 1 + 2i| = \sqrt{2}$. Khi đó tập hợp các điểm M biểu diễn cho số phức w trên mặt phẳng Oxy là :

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$

B. $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 2$

C. $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 2$

D. $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 2$

F.. Cặp số (x,y) thỏa mã điều kiện phức, số số phức phù hợp với điều kiện:

Phương pháp giải:

- Mode 2 và nhập điều kiện đề cho vào casio, chuyển hết về 1 vế
- Calc các đáp án. Đáp án nào ra kết quả là 0 thì đó là đáp án đúng

Ví dụ: Cặp số (x,y) nào thỏa mãn điều kiện phức sau:
 $(2x+3y+1)+(-x+2y)i = (3x-2y+2)+(4x-3y-3)i$

A: $(\frac{-9}{11}, \frac{-4}{11})$

B: $(\frac{9}{11}, \frac{4}{11})$

C: $(\frac{-4}{11}, \frac{-9}{11})$

D: $(\frac{4}{11}, \frac{9}{11})$

Giải:

- Mode 2 và nhập điều kiện $(2x+3y+1)+(-x+2y)i - (3x-2y+2)-(4x-3y-3)i$
- Calc lần lượt các đáp án ta thấy đáp án B có kết quả bằng 0. Vậy D đúng

Bài tập tự luyện

Câu : Các số thực x, y thỏa mãn: $3x + y + 5xi = 2y - 1 + (x - y)i$ là

A. $(x; y) = \left(\frac{1}{7}; \frac{4}{7}\right)$

B. $(x; y) = \left(-\frac{2}{7}; \frac{4}{7}\right)$

C. $(x; y) = \left(-\frac{1}{7}; \frac{4}{7}\right)$

D. $(x; y) = \left(-\frac{1}{7}; -\frac{4}{7}\right)$

Câu : Các số thực x, y thỏa mãn: $x^2 - y - (2y+4)i = 2i$ là:

A. $(x; y) = (\sqrt{3}; -3); (x; y) = (-\sqrt{3}; 3)$

B. $(x; y) = (\sqrt{3}; 3); (x; y) = (\sqrt{3}; -3)$

C. $(x; y) = (\sqrt{3}; -3); (x; y) = (-\sqrt{3}; -3)$

D. $(x; y) = (\sqrt{3}; 3); (x; y) = (-\sqrt{3}; -3)$

Câu : Tìm các số thực x, y thỏa mãn đẳng thức: $x(3+5i) + y(1-2i)^3 = -35 + 23i$

A. $(x; y) = (-3; -4)$

B. $(x; y) = (-3; 4)$

C. $(x; y) = (3; -4)$

D. $(x; y) = (3; 4)$