

DẠNG 1**Các yếu tố liên quan đến khối nón, khối trụ**

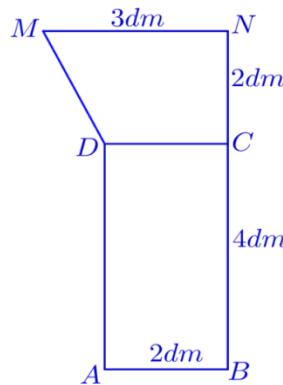
Câu 1: Một hình nón tròn xoay có đường sinh $2a$. Thể tích lớn nhất của khối nón đó là

- A. $\frac{16\pi a^3}{3\sqrt{3}}$. B. $\frac{16\pi a^3}{9\sqrt{3}}$. C. $\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{3}}$. D. $\frac{8\pi a^3}{3\sqrt{3}}$.

Câu 2: Cho đường tròn (C) có tâm I , bán kính $R = a$. Gọi M là điểm nằm ngoài (C) và $IM = a\sqrt{3}$; A là điểm thuộc (C) và MA tiếp xúc với (C) ; H là hình chiếu của A trên đường thẳng IM . Tính theo a thể tích V của khối tròn xoay tạo bởi hình tam giác MAH quay xung quanh trục IM .

- A. $V = \frac{\sqrt{3}}{12}\pi a^3$. B. $V = \frac{\sqrt{3}}{8}\pi a^3$. C. $V = \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi a^3$. D. $V = \frac{9}{8}\pi a^3$.

Câu 3: Hình bên bao gồm hình chữ nhật $ABCD$ và hình thang vuông $CDMN$. Các điểm B, C, N thẳng hàng, $AB = CN = 2\text{dm}$; $BC = 4\text{dm}$; $MN = 3\text{dm}$. Quay hình bên xung quanh cạnh BN ta được khối tròn xoay có thể tích bằng



- A. $54\pi \text{dm}^3$. B. $\frac{86\pi}{3}\text{dm}^3$. C. $\frac{86}{3}\text{dm}^3$. D. 54dm^3 .

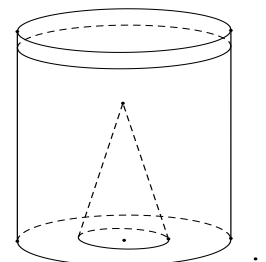
Câu 4: Biết thiết diện qua trục của một hình nón là tam giác đều có diện tích bằng $a^2\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối nón đã cho.

- A. $V = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $V = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $V = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{6}$. D. $V = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 5: Cho hình trụ (T) có chiều cao $h = 2m$, bán kính đáy $r = 3m$. Giả sử (L) là hình lăng trụ đều n cạnh có hai đáy là đa giác đều nội tiếp đường tròn đáy của hình trụ (T) . Khi n tăng lên vô hạn thì tổng diện tích tất cả các mặt của của khối lăng trụ (L) có giới hạn là:

- A. $S = 12$. B. $S = 20\pi$. C. 30π . D. 12π .

Câu 6: Một khối nón làm bằng chất liệu không thấm nước, có khối lượng riêng lớn hơn khối lượng riêng của nước, có đường kính đáy bằng a và chiều cao 12, được đặt trong và trên đáy của một cái cốc hình trụ bán kính đáy a như hình vẽ, sao cho đáy của khối nón tiếp xúc với đáy của cốc hình trụ. Đổ nước vào cốc hình trụ đến khi mực nước đạt đến độ cao 12 thì lấy khối nón ra. Hãy tính độ cao của nước trong cốc sau khi đã lấy khối nón ra.



- A. 11,37. B. 11. C. $6\sqrt{3}$. D. $\frac{\pi\sqrt{37}}{2}$.

Câu 7: Một hình trụ có thiết diện qua trục là một hình vuông. Biết diện tích xung quanh của khối trụ bằng 16π . Thể tích V của khối trụ bằng

- A. $V = 32\pi$. B. $V = 64\pi$. C. $V = 8\pi$. D. $V = 16\pi$.

Câu 8: Cho hình nón tròn xoay có độ dài đường sinh là $2a$, góc ở đỉnh của hình nón bằng 60° . Thể tích V của khối nón đã cho là

- A. $V = \frac{\pi a^3}{3}$. B. $V = \pi\sqrt{3}a^3$. C. $V = \pi a^3$. D. $V = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 9: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi N là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AN = 2ND$. Đường thẳng qua N vuông góc với BN cắt BC tại K . Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay tứ giác $ANKB$ quanh trục BK là

- A. $V = \frac{7}{6}\pi a^3$. B. $V = \frac{9}{14}\pi a^3$. C. $V = \frac{6}{7}\pi a^3$. D. $V = \frac{14}{9}\pi a^3$.

Câu 10: Cho khối trụ có đáy là các đường tròn tâm (O) , (O') có bán kính là R và chiều cao $h = R\sqrt{2}$. Gọi A , B lần lượt là các điểm thuộc (O) và (O') sao cho OA vuông góc với $O'B$. Tỉ số thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ với thể tích khối trụ là:

- A. $\frac{2}{3\pi}$. B. $\frac{1}{3\pi}$. C. $\frac{1}{6\pi}$. D. $\frac{1}{4\pi}$.

Câu 11: Người ta cần đổ một ống cống thoát nước hình trụ với chiều cao $2m$, độ dày thành ống là $10cm$. Đường kính ống là $50cm$. Tính lượng bê tông cần dùng để làm ra ống thoát nước đó?

- A. $0,08\pi (m^3)$. B. $0,18\pi (m^3)$. C. $0,5\pi (m^3)$. D. $0,045\pi (m^3)$.

Câu 12: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2$, $AD = 2\sqrt{3}$ và nằm trong mặt phẳng (P) . Quay (P) một vòng quanh đường thẳng BD . Khối tròn xoay được tạo thành có thể tích bằng

- A. $\frac{28\pi}{9}$. B. $\frac{28\pi}{3}$. C. $\frac{56\pi}{9}$. D. $\frac{56\pi}{3}$.

Câu 13: Cho mặt cầu (S) có bán kính $\sqrt{3}$. Trong tất cả các khối trụ nội tiếp mặt cầu (S) , khối trụ có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}$. B. 4π . C. 3π . D. $\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$.

Câu 14: Cho hình thang $ABCD$ có $A = B = 90^\circ$, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình thang $ABCD$ xung quanh trục CD .

- A. $\frac{7\sqrt{2}\pi a^3}{6}$. B. $\frac{7\sqrt{2}\pi a^3}{12}$. C. $\frac{7\pi a^3}{6}$. D. $\frac{7\pi a^3}{12}$.

Câu 15: Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D có $CD = 2AB = 2AD = 4$. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra bởi hình thang $ABCD$ khi quay xung quanh đường thẳng BC bằng

- A. $\frac{28\sqrt{2}}{3}\pi$. B. $\frac{20\sqrt{2}}{3}\pi$. C. $\frac{32\sqrt{2}}{3}\pi$. D. $\frac{10\sqrt{2}}{3}\pi$.

Câu 16: Một khối trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của một hình lập phương cạnh a . Tính thể tích V của khối trụ đã cho.

- A. $V = \frac{1}{3}a^3\pi$. B. $V = \frac{1}{4}a^3\pi$. C. $V = a^3\pi$. D. $V = \frac{1}{2}a^3\pi$.

Câu 17: Một khối trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của một hình lập phương cạnh a . Tính thể tích V của khối trụ đã cho.

- A. $V = \frac{1}{3}a^3\pi$. B. $V = \frac{1}{4}a^3\pi$. C. $V = a^3\pi$. D. $V = \frac{1}{2}a^3\pi$.

Câu 18: Cho tứ diện $ABCD$ có DA vuông góc với $mp(ABC)$, $DB \perp BC$, $AD = AB = BC = a$. Kí hiệu V_1, V_2, V_3 lần lượt là thể tích của hình tròn xoay sinh bởi tam giác ABD khi quay quanh AD , tam giác ABC khi quay quanh AB , tam giác DBC khi quay quanh BC . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $V_1 + V_2 = V_3$. B. $V_1 + V_3 = V_2$. C. $V_2 + V_3 = V_1$. D. $V_1 = V_2 = V_3$.

Câu 19: Một đội xây dựng cần hoàn thiện một hệ thống cột trụ tròn của một cửa hàng kinh doanh gồm 10 chiếc. Trước khi hoàn thiện mỗi chiếc cột là một khối bê tông cốt thép hình lăng trụ lục giác đều có cạnh 20 cm , sau khi hoàn thiện mỗi cột là một khối trụ có đường kính đáy bằng 42 cm . Chiều cao của mỗi cột trước và sau khi hoàn thiện là 4 m . Biết lượng xi măng cần dùng chiếm 80% lượng vữa và cứ một bao xi măng 50 kg thì tương đương với 64000 cm^3 xi măng. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu bao xi măng loại 50 kg để hoàn thiện toàn bộ hệ thống cột đã cho?

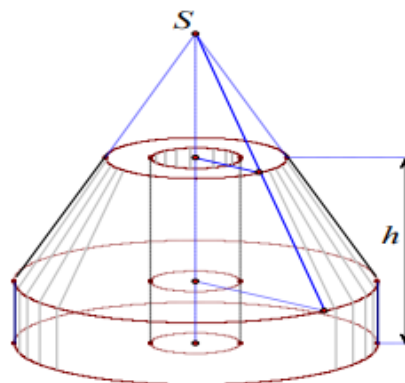
- A. 25. B. 18. C. 28. D. 22.

Câu 20: Để định vị một trụ điện, người ta cần đúc một khối bê tông có chiều cao $h = 1,5\text{ m}$ gồm:

Phần dưới có dạng hình trụ bán kính đáy $R = 1\text{ m}$ và có chiều cao bằng $\frac{1}{3}h$;

Phần trên có dạng hình nón bán kính đáy bằng R đã bị cắt bỏ bớt một phần hình nón có bán kính đáy bằng $\frac{1}{2}R$ ở phía trên ;

Phần ở giữa rỗng có dạng hình trụ, bán kính đáy bằng $\frac{1}{4}R$.



Thể tích của khối bê tông bằng

- A. $2,815\text{ m}^3$. B. $2,814\text{ m}^3$. C. $3,403\text{ m}^3$. D. $3,109\text{ m}^3$.

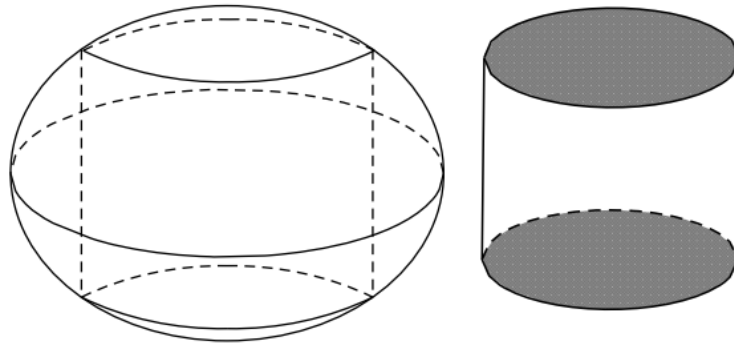
Câu 21: Cho khối trụ (T) , AB và CD lần lượt là hai đường kính trên các mặt đáy của khối (T) . Biết góc giữa AB và CD là 30° , $AB = 6\text{cm}$ và thể tích khối $ABCD$ là 30cm^3 . Khi đó thể tích khối trụ (T) là

- A. $90\pi\text{cm}^3$. B. $30\pi\text{cm}^3$. C. $45\pi\text{cm}^3$. D. $\frac{90\pi\sqrt{3}}{270}\text{cm}^3$.

Câu 22: Cho hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O bán kính R . Trên đường tròn (O) lấy hai điểm A, B sao cho tam giác OAB vuông. Biết diện tích tam giác SAB bằng $R^2\sqrt{2}$. Thể tích hình nón đã cho bằng

- A. $\frac{\pi R^3\sqrt{14}}{12}$. B. $\frac{\pi R^3\sqrt{14}}{2}$. C. $\frac{\pi R^3\sqrt{14}}{6}$. D. $\frac{\pi R^3\sqrt{14}}{3}$.

Câu 23: Một khối đá có hình là một khối cầu có bán kính R , người thợ thủ công mỹ nghệ cần cắt và gọt viên đá đó thành một viên đá cảnh có hình dạng là một khối trụ. Tính thể tích lớn nhất có thể của viên đá cảnh sau khi đã hoàn thiện?



- A. $\frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{9}$. B. $\frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{3}$. C. $\frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{6}$. D. $\frac{3\sqrt{3}\pi R^3}{12}$.

Câu 24: Một hình thang cân có chiều cao h và độ dài hai đáy là a, b . Tính thể tích vật thể tròn xoay thu được khi quay hình thang này quanh đường trung trực của hai đáy.

- A. $\frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2)$. B. $\frac{1}{6}\pi h(a^2 + ab + b^2)$.
C. $\frac{1}{12}\pi h(a^2 + ab + b^2)$. D. Cả A, B, C đều sai.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, tứ giác $ABCD$ là hình thang vuông với cạnh đáy AD, BC . $AD = 3CB = 3a$, $AB = a$, $SA = a\sqrt{3}$. Điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AI}$, M là trung điểm SD , H là giao điểm của AM và SI . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SC . Tính thể tích V của khối nón có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác EFH và đỉnh thuộc mặt phẳng $(ABCD)$.

- A. $V = \frac{\pi a^3}{5\sqrt{5}}$. B. $V = \frac{\pi a^3}{2\sqrt{5}}$. C. $V = \frac{\pi a^3}{\sqrt{5}}$. D. $V = \frac{\pi a^3}{10\sqrt{5}}$.

Câu 26: Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$. AB là một dây cung của đường tròn $(O; R)$ sao cho tam giác $O'AB$ là tam giác đều và mặt phẳng $(O'AB)$ tạo với mặt phẳng chứa đường tròn $(O; R)$ một góc 60° . Tính theo R thể tích V của khối trụ đã cho.

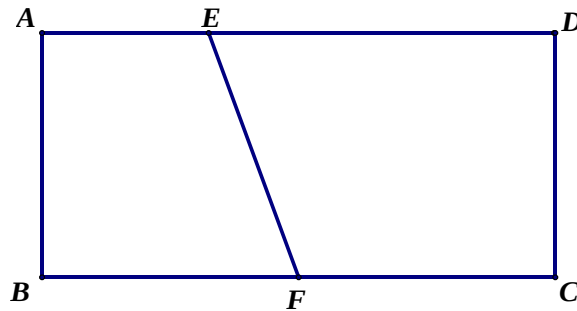
A. $V = \frac{\pi\sqrt{7}R^3}{7}$.

B. $V = \frac{3\pi\sqrt{5}R^3}{5}$.

C. $V = \frac{\pi\sqrt{5}R^3}{5}$.

D. $V = \frac{3\pi\sqrt{7}R^3}{7}$.

Câu 27: Có một miếng bìa hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 3$ và $AD = 6$. Trên cạnh AD lấy điểm E sao cho $AE = 2$, trên cạnh BC lấy điểm F là trung điểm BC .



Cuốn miếng bìa lại sao cho cạnh AB và DC trùng nhau để tạo thành mặt xung quanh của một hình trụ. Khi đó tính thể tích V của tứ diện $ABEF$.

A. $V = \frac{\pi}{3}$.

B. $V = \frac{9\sqrt{3}}{2\pi^2}$.

C. $V = \frac{3\pi^3}{2}$.

D. $V = \frac{2}{3\pi^2}$.

Câu 28: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 3. Tính diện tích xung quanh của hình nón có đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ và chiều cao bằng chiều cao của hình chóp.

A. $S_{xq} = \frac{9\pi}{2}$.

B. $S_{xq} = \frac{9\sqrt{2}\pi}{4}$.

C. $S_{xq} = 9\pi$.

D. $S_{xq} = \frac{9\sqrt{2}\pi}{2}$.

Câu 29: Một hình nón có chiều cao $2a$, bán kính đáy $a\sqrt{2}$. Một phẳng phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt đáy góc 60° . Tính diện tích thiết diện.

A. $\frac{5\sqrt{2}a^2}{3}$.

B. $\frac{4\sqrt{3}a^2}{3}$.

C. $\frac{5\sqrt{3}a^2}{3}$.

D. $\frac{4\sqrt{2}a^2}{3}$.

Câu 30: Cho hình trụ có tâm hai đáy lần lượt là O và O' ; bán kính đáy hình trụ bằng a . Trên hai đường tròn (O) và (O') lần lượt lấy hai điểm A và B sao cho AB tạo với trục của hình trụ một góc 30° và có khoảng cách tới trục của hình trụ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính diện tích toàn phần của hình trụ đã cho

A. $2\pi a^2(\sqrt{3}+1)$.

B. $\frac{\pi a^2}{3}(\sqrt{3}+2)$.

C. $\pi a^2(\sqrt{3}+2)$.

D. $\frac{2\pi a^2}{3}(\sqrt{3}+3)$.

Câu 31: Cho hình nón đỉnh I , đường cao SO và có độ dài đường sinh bằng 3cm , góc ở đỉnh bằng 60° . Gọi K là điểm thuộc đoạn SO thỏa mãn $IO = \frac{3}{2}IK$, cắt hình nón bằng mặt phẳng (P) qua K và vuông góc với IO , khi đó thiết diện tạo thành có diện tích là S . Tính S .

A. $S = \frac{\pi}{3}(\text{cm}^2)$.

B. $S = \pi(\text{cm}^2)$.

C. $S = 3\pi(\text{cm}^2)$

D. $S = \frac{2\pi}{3}(\text{cm}^2)$

Câu 32: Cho hình nón (N) có bán kính đáy bằng 6 và chiều cao bằng 12. Mặt cầu (S) ngoại tiếp hình nón (N) có tâm là I . Một điểm M di động trên mặt đáy của nón (N) và cách I một đoạn bằng 6. Quỹ tích tất cả các điểm M tạo thành đường cong có tổng độ dài bằng

- A. 6π . B. $6\pi\sqrt{2}$. C. $3\pi\sqrt{7}$. D. $4\pi\sqrt{6}$.

Câu 33: Cho hình nón đỉnh S , đường cao SO . Gọi A, B là hai điểm thuộc đường tròn đáy của hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng $2a$, $\angle SAO = 30^\circ$, $\angle SAB = 60^\circ$. Diện tích xung quanh hình nón đã cho bằng

- A. $2\pi a^2\sqrt{3}$. B. $\frac{3\pi a^2\sqrt{2}}{4}$. C. $4\pi a^2\sqrt{3}$. D. $3\pi a^2\sqrt{2}$.

Câu 34: Cho hình trụ có trục OO' , bán kính đáy r và chiều cao $h = \frac{3r}{2}$. Hai điểm M, N di động trên đường tròn đáy (O) sao cho OMN là tam giác đều. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên $(O'MN)$. Khi M, N di động trên đường tròn (O) thì đoạn thẳng OH tạo thành mặt xung quanh của một hình nón, diện tích S của mặt này.

- A. $S = \frac{9\sqrt{3}\pi r^2}{32}$. B. $S = \frac{9\sqrt{3}\pi r^2}{16}$. C. $S = \frac{9\pi r^2}{32}$. D. $S = \frac{9\pi r^2}{16}$.

Câu 35: Cho tam giác ABC cân tại A , biết $AB = 2a$ và góc $\angle ABC = 30^\circ$, cho tam giác ABC quay xung quanh đường thẳng AC được khối tròn xoay. Khi đó thể tích khối tròn xoay bằng

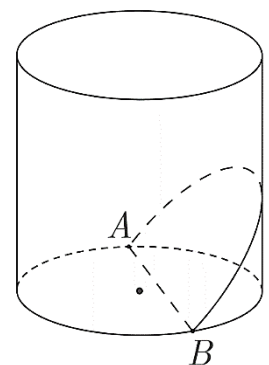
- A. $2\pi a^3$. B. $6\pi a^3$. C. $\frac{2\pi a^3}{3}$. D. $2a^3$.

Câu 36: Một hộp đựng mỹ phẩm được thiết kế có thân hộp là hình trụ có bán kính hình tròn đáy $r = 5\text{cm}$, chiều cao $h = 6\text{cm}$ và nắp hộp là một nửa hình cầu. Người ta cần sơn mặt ngoài của cái hộp đó thì diện tích S cần sơn là

- A. $S = 80\pi\text{cm}^2$. B. $S = 110\pi\text{cm}^2$. C. $S = 160\pi\text{cm}^2$. D. $S = 130\pi\text{cm}^2$.

Câu 37: Cho khối trụ có bán kính đáy bằng $4(\text{cm})$ và chiều cao $5(\text{cm})$. Gọi AB là một dây cung đáy

dưới sao cho $AB = 4\sqrt{3}(\text{cm})$. Người ta dựng mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B và tạo với mặt phẳng đáy hình trụ một góc 60° như hình vẽ. Tính diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (P) .



A. $\frac{8(4\pi - 3\sqrt{3})}{3}(\text{cm}^2)$.

B.

$\frac{4(4\pi - \sqrt{3})}{3}(\text{cm}^2)$

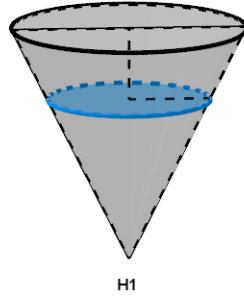
C. $\frac{4(4\pi - 3\sqrt{3})}{3}(\text{cm}^2)$.

D. $\frac{8(4\pi - \sqrt{3})}{3}(\text{cm}^2)$.

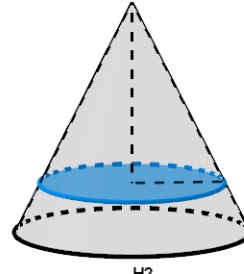
Câu 38: Một khối đồ chơi có dạng khối nón, chiều cao bằng 20cm , trong đó có chứa một lượng nước.

Nếu đặt khối đồ chơi theo hình H_1 thì chiều cao lượng nước bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của khối nón.

Hỏi nếu đặt khối đồ chơi theo hình H_2 thì chiều cao h' của lượng nước trong khối đó gần với giá trị nào sau đây?



H1



H2

A. $2,21(\text{cm})$.

B. $5,09(\text{cm})$.

C. $6,67(\text{cm})$.

D. $5,93(\text{cm})$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.C	3.B	4.D	5.C	6.B	7.D	8.D	9.A	10.C
11.A	12.C	13.B	14.A	15.A	16.B	17.B	18.A	19.B	20.D
21.A	22.C	23.A	24.C	25.D	26.D	27.B	28.D	29.D	30.A
31.B	32.C	33.C	34.A	35.A	36.B	37.A	38.A		

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn B

Gọi hình nón tròn xoay có đường sinh $l = 2a$ có bán kính đáy là R và đường cao là h .

Thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$. Ta có: $R^2 + h^2 = 4a^2$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô si: $4a^2 = R^2 + h^2 = \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2} + h^2 \geq 3\sqrt{\frac{R^4 h^2}{4}}$.

$$\Rightarrow \frac{R^4 h^2}{4} \leq \frac{64}{27} a^6 \Rightarrow \frac{1}{3}\pi R^2 h \leq \frac{16\pi\sqrt{3}}{27} a^3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{R^2}{2} = h^2 \\ h^2 + R^2 = 4a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = \frac{2\sqrt{3}}{3}a \\ R = \frac{2\sqrt{6}}{3}a \end{cases}$. Khi đó $V_{\max} = \frac{16\pi\sqrt{3}}{27} a^3$.

Câu 2: Chọn C

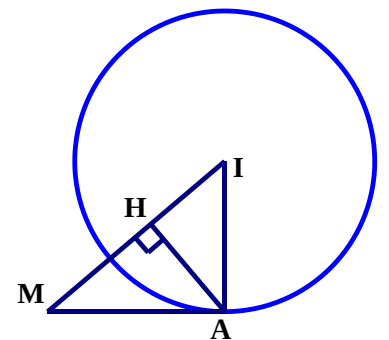
Tam giác MAH vuông tại H nên hình nón được tạo thành có chiều cao $h = MH$ và bán kính đáy là $r = AH$

$$\text{Có } IH \cdot IM = IA^2 \Leftrightarrow IH = \frac{IA^2}{IM} = \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow MH = IM - IH = a\sqrt{3} - \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$AH^2 = IH \cdot MH = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2a^2}{3}$$

$$\text{Vậy thể tích khối nón là } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{2a^2}{3} \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi a^3.$$

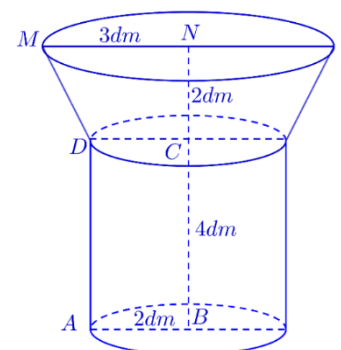


Câu 3: Chọn B

Khi quay hình trên quanh cạnh BN ta được một khối tròn xoay gồm một khối trụ có bán kính đáy bằng 2 dm, chiều cao bằng 4 dm và một khối nón cụt có bán kính hai đáy lần lượt là 2 dm và 3 dm, chiều cao bằng 2 dm.

Do đó thể tích của khối tròn xoay là

$$V = V_{\text{trụ}} + V_{\text{nón cụt}} = 4\pi \cdot 4 + \frac{2}{3}(4\pi + 9\pi + \sqrt{4\pi \cdot 9\pi}) = \frac{86\pi}{3} (\text{dm}^3).$$



Câu 4: Chọn D

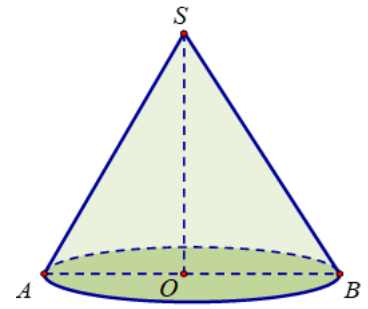
Gọi đỉnh của hình nón là S , tâm đường tròn đáy của hình nón là O , AB là một đường kính của đường tròn đáy. Khi đó ΔSAB là một thiết diện qua trục của hình nón đã cho.

Diện tích của tam giác ΔSAB là: $\frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3} \Rightarrow AB = 2a$.

Bán kính đường tròn đáy $R = \frac{AB}{2} = a$; Đường cao của hình nón là

$$h = SO = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Thể tích khối nón đã cho là: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\pi a^2 \cdot a\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$.

**Câu 5: Chọn C**

Cách 1: Vì (L) là hình lăng trụ đều n cạnh có hai đáy là đa giác đều nội tiếp đường tròn đáy của hình trụ (T) nên độ dài mỗi cạnh của lăng trụ là $a = 2r \cdot \sin \frac{\pi}{n}$.

Do đó diện tích của n mặt bên là $S_1 = nah = 2nrh \cdot \sin \frac{\pi}{n} = 12n \cdot \sin \frac{\pi}{n}$

Công thức diện tích của đa giác đều n cạnh, có độ dài mỗi cạnh là a là: $s = \frac{nr^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n}}{2}$.

Nên diện tích của hai đáy là: $S_2 = 2 \cdot s = 9n \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$.

Tổng diện tích tất cả các mặt của khối lăng trụ (L) là: $S = S_1 + S_2 = 12n \cdot \sin \frac{\pi}{n} + 9n \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$.

Khi n tăng lên vô hạn:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(12n \cdot \sin \frac{\pi}{n} + 9n \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(12n \cdot \sin \frac{\pi}{n} \right) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(9n \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \right) = 30\pi.$$

Cách 2: Khi n tăng lên vô hạn, hình lăng trụ tiến dần tới hình trụ, do đó tổng diện tích tất cả các mặt của của khối lăng trụ (L) bằng với diện tích toàn phần của hình trụ (T) và bằng $2\pi rh + 2\pi r^2 = 30\pi$

Câu 6: Chọn B

Gọi V, R, h lần lượt là thể tích khối trụ (khối chứa phần nước trong cốc), bán kính đáy cốc và chiều cao của lượng nước trong cốc khi chưa lấy khối nón ra. Suy ra: $V = \pi R^2 h$ (1)

Gọi V_1, R_1, h_1 lần lượt là thể tích, bán kính đáy và chiều cao của khối nón.

$$\text{Suy ra: } V_1 = \frac{1}{3}\pi R_1^2 h_1 \quad (2)$$

Gọi V_2, h_2 là thể tích lượng nước đổ vào và độ cao của nước trong cốc sau khi đã lấy khối nón ra. Suy ra: $V_2 = \pi R^2 h_2$ (3)

Từ (1),(2) và (3) ta có:

$$V - V_1 = V_2 \Leftrightarrow \pi R^2 h - \frac{1}{3} \pi R_1^2 h_1 = \pi R^2 h_2 \Leftrightarrow R^2 h - \frac{1}{3} R_1^2 h_1 = R^2 h_2 \Leftrightarrow h_2 = \frac{R^2 h - \frac{1}{3} R_1^2 h_1}{R^2} \quad (4)$$

Thay $R = a, R_1 = \frac{a}{2}, h = h_1 = 12$ vào (4) ta có: $h_2 = 12 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 12 = 11$.

Câu 7: Chọn D

Gọi $ABCD$ là thiết diện qua trục của khối trụ.

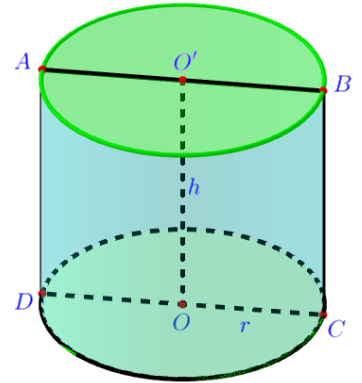
Vì $ABCD$ là hình vuông nên ta có: $OC = \frac{1}{2} OO' \Rightarrow h = 2r \quad (1)$.

Diện tích xung quanh của khối trụ là: $S_{xq} = 2\pi rh \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra: $S_{xq} = 2\pi rh = 4\pi r^2$.

Ta có: $S_{xq} = 16\pi \Rightarrow 4\pi r^2 = 16\pi \Rightarrow 4\pi r^2 = 16\pi$.

Thể tích của khối trụ là: $V = \pi r^2 h = 2\pi r^3 = 2\pi \cdot 2^3 = 16\pi$ (đơn vị thể tích).



Câu 8: Chọn D

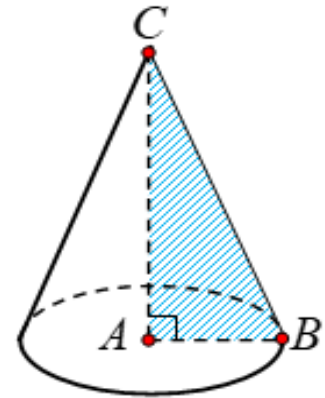
Ta có $l = CB = 2a, \angle BCA = 30^\circ$.

Xét tam giác ABC vuông tại A có:

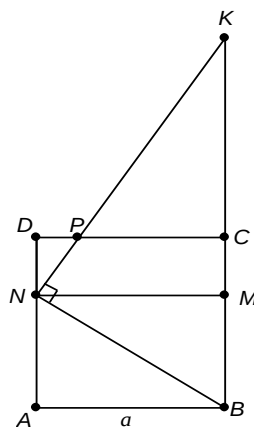
$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{CB} = \frac{r}{l} \Rightarrow r = l \cdot \sin 30^\circ = 2a \cdot \frac{1}{2} = a.$$

$$\cos 30^\circ = \frac{CA}{CB} = \frac{h}{l} \Rightarrow h = l \cdot \cos 30^\circ = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Suy ra } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{3}.$$



Câu 9: Chọn A



$$\text{Ta có } NB = \sqrt{a^2 + \frac{4a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{13}}{3}.$$

$$\triangle ABN \text{ đồng dạng } \triangle NKB \text{ suy ra } \frac{AN}{NB} = \frac{NB}{KB} \Rightarrow KB = \frac{NB^2}{AN} = \frac{13a^2}{9} \cdot \frac{3}{2a} = \frac{13a}{6}$$

Gọi M là điểm trên BC sao cho $BM = 2MC$

$$\text{Suy ra } BM = \frac{2a}{3}; MK = \frac{3a}{2}. \text{ Vậy } V = \pi a^2 \cdot \frac{2a}{3} + \frac{1}{3} \pi a^2 \cdot \frac{3a}{2} = \frac{7}{6} \pi a^3.$$

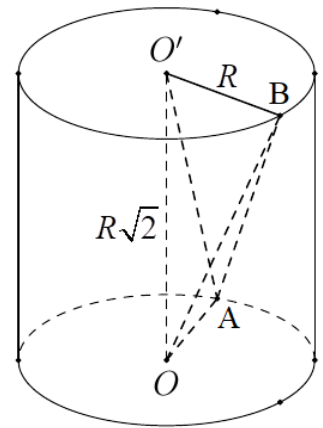
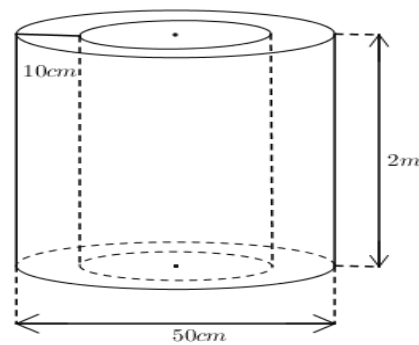
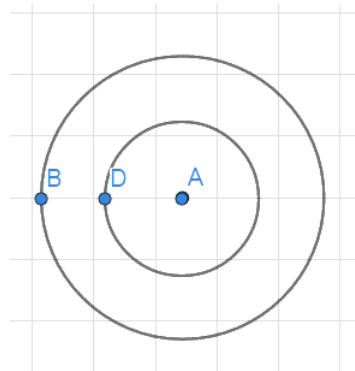
Câu 10: Chọn C

$$\text{Thể tích khối trụ } V_1 = \pi R^2 \cdot h = \pi R^2 \cdot R\sqrt{2} = \pi R^3 \sqrt{2}$$

Khối tứ diện $BO'OA$ có BO' là đường cao và đáy là tam giác vuông $O'OA$, do đó thể tích khối tứ diện là

$$V_2 = \frac{1}{3} S_{O'OA} \cdot O'B = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} OA \cdot OO' \cdot O'B = \frac{1}{6} R \cdot R\sqrt{2} \cdot R = \frac{\sqrt{2}}{6} R^3$$

$$\text{Vậy } \frac{V_2}{V_1} = \frac{R^3 \sqrt{2}}{6} \cdot \frac{1}{\pi R^3 \sqrt{2}} = \frac{1}{6\pi}.$$

**Câu 11: Chọn A**

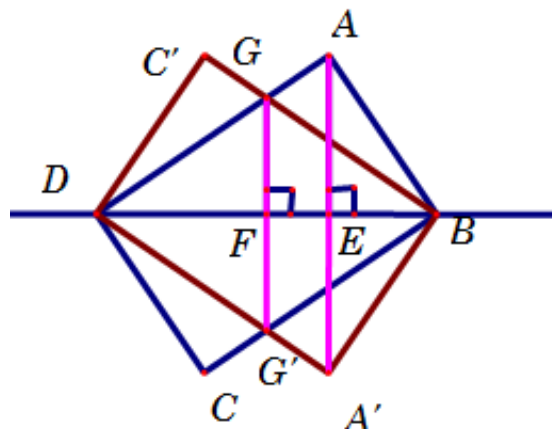
$$\text{Bán kính ống cống là: } R = AB = \frac{50}{2} = 25 \text{ cm} = 0.25 \text{ m}.$$

Do lớp bê tông dày 10 cm nên bán kính phần được giới hạn bên trong là: $r = AD = 15 \text{ cm} = 0.15 \text{ m}$

$$\text{Thể tích phần bê tông là: } V = \pi \cdot h (R^2 - r^2) = \pi \cdot 2 (0.25^2 - 0.15^2) = 0.08\pi (m^3).$$

Câu 12: Chọn C

Cách 1:



Gọi A', C' lần lượt đối xứng với A, C qua BD , $G = BC' \cap AD$, G' đối xứng với G qua BD . $E = AA' \cap BD$, $F = GG' \cap BD \Rightarrow F$ là trung điểm BD .

Gọi V là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh đường thẳng BD .

V_1 là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác BAD quanh cạnh BD (cũng là thể tích của khối tròn xoay khi quay tam giác BCD quanh cạnh BD).

V_1', V_1'' lần lượt là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay $\triangle BAE, \triangle EAD$ quanh cạnh BD .

V_2 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay $\triangle BGD$ quanh cạnh BD .

V_2' là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay $\triangle BGF$ quanh cạnh BD .

Ta có V_1' là thể tích của khối nón đỉnh B , bán kính đáy AE .

$$\text{Tính được } AE = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2}} = \sqrt{3}, BD = 4, BE = 1, DE = 3.$$

$$\Rightarrow V_1' = \frac{1}{3} \pi \cdot AE^2 \cdot BE = \frac{1}{3} \pi (\sqrt{3})^2 = \pi.$$

Ta có V_1'' là thể tích của khối nón đỉnh D , bán kính đáy AE .

$$\Rightarrow V_1'' = \frac{1}{3} \pi \cdot AE^2 \cdot DE = \frac{1}{3} \pi (\sqrt{3})^2 \cdot 3 = 3\pi. \text{ Suy ra } V_1 = V_1' + V_1'' = \pi + 3\pi = 4\pi.$$

Ta có V_2' là thể tích của khối nón đỉnh B , bán kính đáy GF .

Ta chứng minh được $\triangle BGF \sim \triangle BDC'$ (g - g).

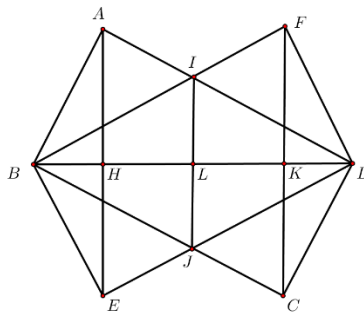
$$\Rightarrow \frac{GF}{DC'} = \frac{BF}{BC'} \Rightarrow GF = \frac{BF \cdot DC'}{BC'} = \frac{BD \cdot DC'}{2BC'} = \frac{4 \cdot 2}{2 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$V_2' = \frac{1}{3} \pi \cdot GF^2 \cdot BF = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot 2 = \frac{8\pi}{9}.$$

$$\text{Ta có } V_2 = 2V_2' = \frac{16\pi}{9}. \text{ Vậy } V = 2V_1 - V_2 = 2 \cdot 4\pi - \frac{16\pi}{9} = \frac{56\pi}{9}.$$

Cách 2:

Gọi điểm như hình vẽ



V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối nón, nón cụt nhận được khi quay tam giác ABH và tứ giác $AHLT$ quay BD .

$$\text{Ta có: } AH = \sqrt{3}, IL = \frac{2}{\sqrt{3}}, BH = HL = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } V &= 2(V_1 + V_2) = 2 \left[\frac{1}{3} BH \cdot \pi \cdot AH^2 + \frac{1}{3} HL \cdot \pi \cdot (IL^2 + IL \cdot AH + AH^2) \right] \\ &= 2 \left[\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \pi \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \pi \cdot \left(\frac{4}{3} + 2 + 3 \right) \right] = \frac{56\pi}{9}. \end{aligned}$$

Câu 13: Chọn B

Gọi bán kính mặt cầu là R và chiều cao của khối trụ là $h = 2x > 0$.

Suy ra bán kính đáy trụ là $r = \sqrt{R^2 - x^2}$.

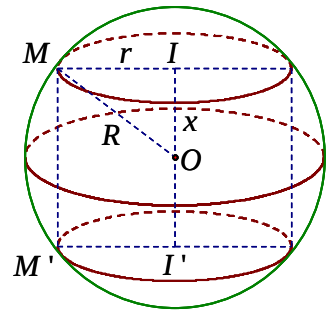
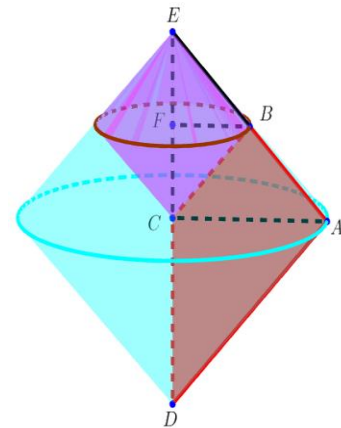
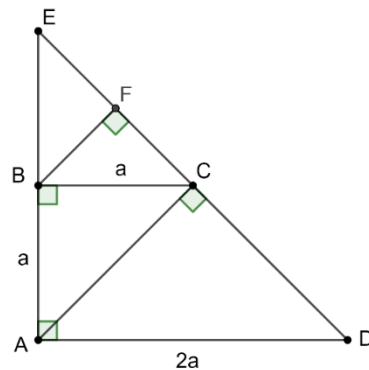
Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = 2\pi(R^2 - x^2)x$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$V^2 = 2\pi^2(R^2 - x^2)^2 \cdot 2x^2 \leq 2\pi^2 \left(\frac{2(R^2 - x^2) + 2x^2}{3} \right)^3 = \frac{16\pi^2 R^6}{27}$$

Suy ra $V \leq \frac{4\pi R^3 \sqrt{3}}{9}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $R^2 - x^2 = 2x^2 \Leftrightarrow x = \frac{R}{\sqrt{3}}$

Vậy $\max V = \frac{4\pi R^3 \sqrt{3}}{9}$. Với $R = \sqrt{3}$ thì $\max V = 4\pi$.

**Câu 14: Chọn A**

Gọi E là giao điểm của AB và CD . Gọi F là hình chiếu vuông góc của B trên CE .

Ta có: $\triangle BCF = \triangle BEF$ nên tam giác $\triangle BCF$ và $\triangle BEF$ quay quanh trục CD tạo thành hai khối nón bằng nhau có thể tích V_1 .

$\triangle ADC = \triangle AEC$ nên tam giác $\triangle ADC$ và $\triangle AEC$ quay quanh trục CD tạo thành hai khối nón bằng nhau có thể tích V .

Nên thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình thang $ABCD$ xung quanh trục CD bằng:

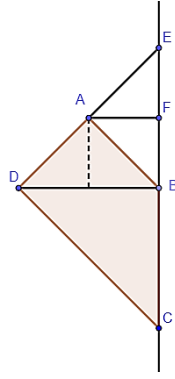
$$2V - 2V_1 = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi (CD \cdot AC^2 - CF \cdot BF^2) = \frac{2}{3} \pi \left[(a\sqrt{2})^3 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \right)^3 \right] = \frac{7\sqrt{2}\pi a^3}{6} \text{ (đvtt)}.$$

Câu 15: Chọn A

Ta có: $AB = AD = 2$, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2\sqrt{2}$, $BC = \sqrt{AD^2 + \left(\frac{1}{2}CD \right)^2} = 2\sqrt{2}$.

Tam giác BCD vuông cân tại B do $CD^2 = BD^2 + BC^2$ và $BD = BC = 2\sqrt{2}$.

Kéo dài $AD \cap BC = E$. Kẻ $AF \perp BE$ tại F . Khi đó $AF \parallel BD$.



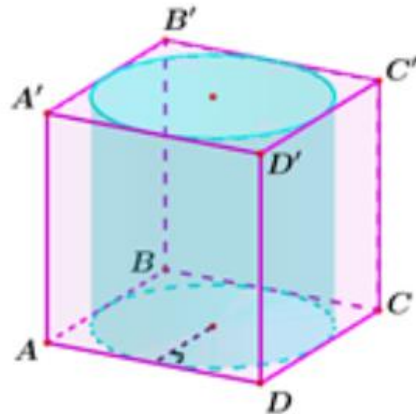
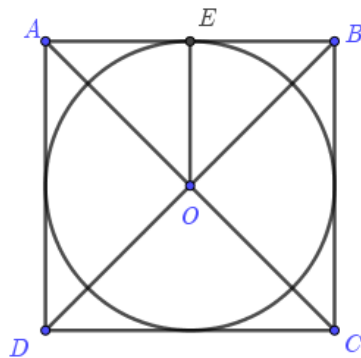
Dễ chứng minh: $\triangle BCD = \triangle BED$, $\triangle ABF = \triangle AEF$, $AF = BF = \frac{1}{2}BD = \sqrt{2}$.

Thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi tam giác ECD khi quay xung quanh đường thẳng BC bằng 2 lần thể tích khối nón sinh ra bởi tam giác BCD khi quay xung quanh đường thẳng BC (bán kính đáy BD , đường cao BC): $V_1 = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi BD^2 \cdot BC = \frac{32\sqrt{2}\pi}{3}$.

Thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi tam giác ABE khi quay xung quanh đường thẳng BC bằng 2 lần thể tích khối nón sinh ra bởi tam giác ABF khi quay xung quanh đường thẳng BC (bán kính đáy AF , đường cao BF): $V_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot AF^2 \cdot BF = \frac{4\sqrt{2}}{3} \pi$.

Thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi hình thang $ABCD$ khi quay xung quanh đường thẳng BC là: $V = V_1 - V_2 = \frac{28\sqrt{2}}{3} \pi$.

Câu 16: Chọn B



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Kẻ $OE \perp AB$ tại E , khi đó bán kính của đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ là OE .

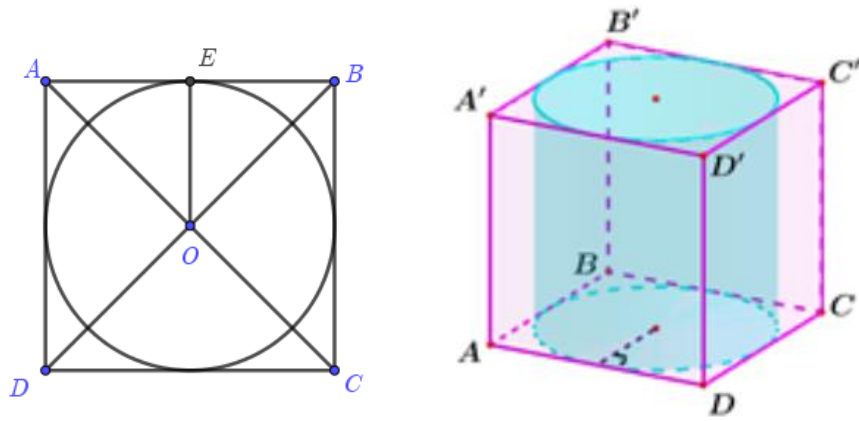
Ta có $OE = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.

Diện tích hình tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ là $S = \pi \cdot OE^2 = \frac{1}{4} a^2 \pi$.

Gọi h là chiều cao của khối trụ, khi đó $h = AA'$.

Thể tích V của khối trụ đã cho là $V = h \cdot S = AA' \cdot S = a \cdot \frac{1}{4} a^2 \pi = \frac{1}{4} a^3 \pi$.

Câu 17: Chọn B



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Kẻ $OE \perp AB$ tại E , khi đó bán kính của đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ là OE . Ta có $OE = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.

Diện tích hình tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ là $S = \pi.OE^2 = \frac{1}{4}a^2\pi$.

Gọi h là chiều cao của khối trụ, khi đó $h = AA'$.

Thể tích V của khối trụ đã cho là $V = h.S = AA'.S = a.\frac{1}{4}a^2\pi = \frac{1}{4}a^3\pi$.

Câu 18: Chọn A

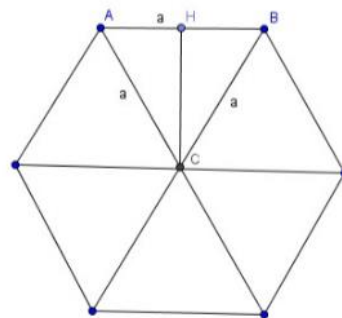
Quay tam giác ABD khi quay quanh AD ta có $V_1 = \frac{1}{3}AD.\pi AB^2 = \frac{\pi}{3}.a^3$ (đvtt).

Quay tam giác ABC khi quay quanh AB ta có $V_2 = \frac{1}{3}AB.\pi BC^2 = \frac{\pi}{3}.a^3$ (đvtt).

Quay tam giác DBC khi quay quanh BC ta có $V_3 = \frac{1}{3}BC.\pi BD^2 = \frac{\pi}{3}.AB.2AB^2 = \frac{2\pi}{3}.a^3$ (đvtt).

Vậy $V_1 + V_2 = V_3$.

Câu 19: Chọn B



Diện tích của một lục giác đều cạnh a là:

$$S = 6 \left(\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \right) = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{3(20)^2 \sqrt{3}}{2} = 600\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Tổng thể tích 10 chiếc cột ban đầu là $V_1 = 10.S.h = 10.600\sqrt{3}.400 = 2,4.10^6.\sqrt{3}$ (cm³).

Tổng thể tích 10 khối trụ sau khi hoàn thiện là:

$$V_2 = 10.\pi r^2 h = 10\pi.\left(\frac{42}{2}\right)^2.400 = 1764000\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Thể tích vữa cần dùng là $V = V_2 - V_1 = 1764000\pi - 2,4.10^6.\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}$

Số bao xi măng cần dùng là $n = \frac{0,8V}{64000} = \frac{0,8[1764000\pi - 2,4.10^6.\sqrt{3}]}{64000} \approx 17,3106.$

Câu 20: Chọn D

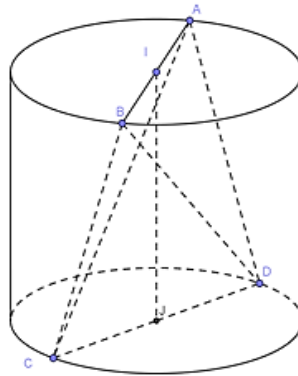
Thể tích phần khối trụ phía dưới: $V_1 = \pi R^2 \frac{1}{3}h = 0,5\pi \text{ m}^3.$

Thể tích phần khối nón cụt: $V_2 = \frac{1}{3}\pi \left[R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 + R.\frac{R}{2} \right].\frac{2h}{3} = \frac{7\pi}{12} \text{ m}^3.$

Thể tích phần trụ rỗng: $V_3 = \pi \left(\frac{R}{4}\right)^2 h = \frac{3\pi}{32} \text{ m}^3.$

Thể tích khối bê tông: $V_1 + V_2 - V_3 \approx 3,109 \text{ m}^3.$

Câu 21: Chọn A



Gọi h , V lần lượt là chiều cao và thể tích khối trụ $(T) \Rightarrow d(AB, CD) = h \text{ (cm)}.$

Ta có: $V_{ABCD} = \frac{1}{6}h.\sin(AB; CD).AB.CD = \frac{1}{6}h.\sin 30^\circ.6^2 \Rightarrow h = \frac{6V_{ABCD}}{\sin 30^\circ.6^2} = 10 \text{ (cm)}.$

$\Rightarrow V_{(T)} = \pi \left(\frac{AB}{2}\right)^2.h = 90\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$

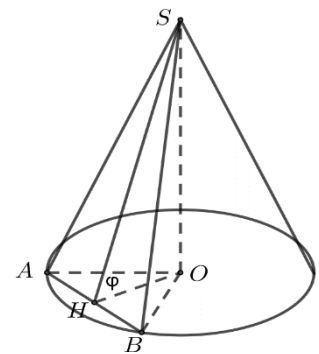
Câu 22: Chọn C

Gọi H là trung điểm của đoạn AB .

Nhận thấy:

Tam giác OAB vuông cân tại O .

Mặt khác: $OH \perp AB$, $SH \perp AB$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SAB) , (OAB) bằng $\varphi = \angle SHO$.



Ta có: $S_{\triangle OAB} = S_{\triangle SAB}.\cos \varphi \Rightarrow \frac{1}{2}R^2 = R^2\sqrt{2}.\cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$

$$\text{Mà } \cos \varphi = \frac{OH}{SH} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\frac{R\sqrt{2}}{2}}{SH} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow SH = \frac{R\sqrt{2}}{2} \cdot 2\sqrt{2} = 2R.$$

$$\Rightarrow SO = \sqrt{SH^2 - OH^2} = \sqrt{4R^2 - \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{14}}{2}$$

$$\text{Vậy thể tích của khối nón bằng } V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot SO = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot \frac{R\sqrt{14}}{2} = \frac{\pi R^3 \sqrt{14}}{6}.$$

Câu 23: Chọn A

Gọi chiều cao của viên đá cảnh hình trụ là $h = 2x$, $0 < x < R$

$$\Rightarrow \text{bán kính đáy của khối trụ là: } \sqrt{R^2 - x^2} \Rightarrow V = \pi(R^2 - x^2)2x = 2\pi(R^2x - x^3).$$

$$\Rightarrow V' = 2\pi(R^2 - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{R^2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Lập bảng biến thiên của hàm số } V \text{ trên khoảng } (0; R) \text{ ta được } V_{\max} = V\left(\frac{R\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}R^3}{9}.$$

Câu 24: Chọn C

Gọi E , F lần lượt là trung điểm của AB , CD .

Theo giả thiết, ta có $EB = \frac{a}{2}$, $FC = \frac{b}{2}$ và $EF = h$. Đặt $SE = x$.

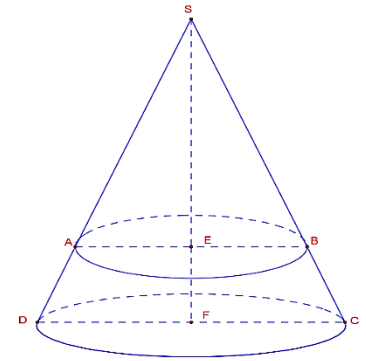
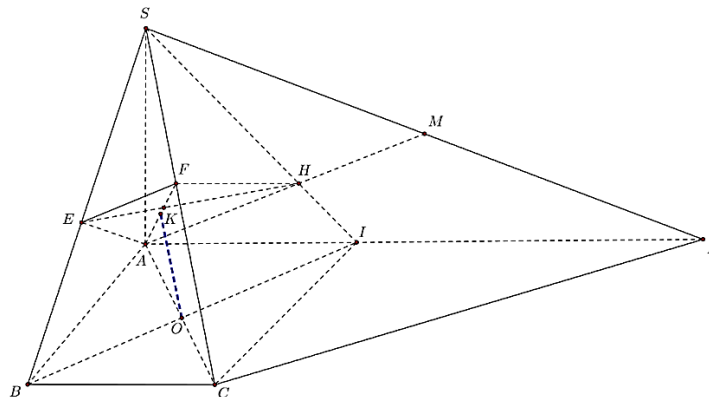
$$\triangle SEB \sim \triangle SFC \Rightarrow \frac{SE}{SF} = \frac{EB}{FC} \Rightarrow \frac{x}{x+h} = \frac{a}{b} \Rightarrow x = \frac{ah}{b-a}. \text{ Suy ra}$$

$$SF = \frac{ah}{b-a} + h = \frac{bh}{b-a}.$$

Thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot SF \cdot FC^2 - \frac{1}{3}\pi \cdot SE \cdot EB^2 = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{bh}{b-a} \cdot \frac{b^2}{4} - \frac{ah}{b-a} \cdot \frac{a^2}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{h}{4(b-a)} \cdot (b^3 - a^3) = \frac{1}{12}\pi h \cdot (a^2 + ab + b^2).$$

**Câu 25: Chọn D**

Nhận xét: Tứ giác $ABCI$ là hình vuông. Dễ chứng minh $BC \perp (SAB)$ và $BI \perp SC$.

$$\begin{cases} EA \perp SB \\ EA \perp BC \end{cases} \Rightarrow EA \perp (SBC) \Rightarrow EA \perp SC.$$

$$\begin{cases} EA \perp SC \\ FA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AEF).$$

Trong tam giác vuông SAB có $\frac{SE}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{3}{4}$.

Trong tam giác SAD có $\frac{HS}{HI} \cdot \frac{AI}{AD} \cdot \frac{MD}{MS} = 1 \Rightarrow \frac{HS}{HI} = 3 \Rightarrow \frac{SH}{SI} = \frac{3}{4}$.

Trong tam giác SBI có $\frac{SE}{SB} = \frac{SH}{SI} = \frac{3}{4} \Rightarrow EH \parallel BI$. Do $BI \perp SC$ nên $EH \perp SC$.

Suy ra các điểm A, E, F, H cùng thuộc mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC .

Gọi K là trung điểm AF .

Vì $\begin{cases} EA \perp EF \\ AH \perp FH \end{cases} \Rightarrow K$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle EFH$.

Ta có: $AF = \frac{SA \cdot AC}{SC} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$.

Suy ra bán kính đáy của khối nón là $R = \frac{1}{2}AF = \frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{5}}$.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCI$.

Do $\begin{cases} SC \perp (EFH) \\ OK \parallel SC \end{cases} \Rightarrow OK \perp (EFH) \Rightarrow O$ là đỉnh của khối nón.

Chiều cao của khối nón là $h = \frac{1}{2}FC = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 - AF^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 - \frac{6}{5}a^2} = \frac{a}{\sqrt{5}}$.

Vậy thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{5}}\right)^2 \cdot \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{\pi a^3}{10\sqrt{5}}$.

Câu 26: Chọn D

Đặt độ dài cạnh $AB = x$ ($x > 0$) và M là trung điểm AB .

Vì tam giác $O'AB$ đều nên $O'A = O'B = AB = x \Rightarrow O'M = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

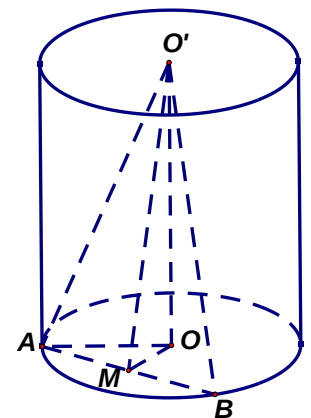
Vì mặt phẳng $(O'AB)$ tạo với mặt phẳng chứa đường tròn $(O; R)$ góc 60° nên $O'MO = 60^\circ$.

Xét tam giác $O'OM$ vuông tại O ta có: $\cos O'MO = \frac{OM}{O'M}$. Suy ra

$$\cos 60^\circ = \frac{OM}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow OM = \frac{x\sqrt{3}}{4}$$

Xét tam giác OAM vuông ở M có: $OA^2 = OM^2 + AM^2$ nên

$$R^2 = \left(\frac{x\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow R^2 = \frac{7}{16}x^2 \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{7}}{7}R$$



$$\text{Do đó: } O'M = \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{21}}{7}R \text{ và } OM = \frac{x\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{21}}{7}R.$$

$$\text{Vì vậy, ta có } OO' = \sqrt{O'M^2 - OM^2} = \frac{3\sqrt{7}}{7}R.$$

$$\text{Vậy thể tích khối trụ là } V = \pi R^2 \cdot h = \pi R^2 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{7}R \Rightarrow V = \frac{3\pi\sqrt{7}R^3}{7}.$$

Câu 27: Chọn B

Từ giả thiết suy ra BF là đường kính đường tròn đáy của hình trụ. Kẻ đường sinh FK , gọi O là trung điểm AK .

$$\text{Gọi } r \text{ là bán kính đáy, suy ra } 2\pi r = 6 \Leftrightarrow r = \frac{3}{\pi}.$$

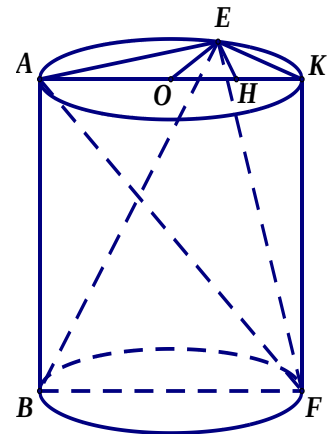
$$\text{Đặt } AOE = \alpha \text{ (rad). Trong hình chữ nhật } ABCD \text{ có } AE = 2 \Rightarrow l_{AE} = r \cdot \alpha = 2 \Rightarrow AOE = \alpha = \frac{2}{r} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow EOK = \frac{\pi}{3}, \text{ suy ra tam}$$

giác EOK là tam giác đều cạnh $r = \frac{3}{\pi}$. Gọi H là trung điểm $OK \Rightarrow EH \perp AK, EH \perp AB$

$$\Rightarrow EH \perp (ABFK) \Rightarrow d(E, (ABF)) = EH = \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}.$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABF \text{ là } S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BF = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{6}{\pi} = \frac{9}{\pi}.$$

$$\text{Thể tích khối tứ diện } ABEF \text{ là } V = \frac{1}{3} S_{ABF} \cdot d(E, (ABF)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{\pi} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} = \frac{9\sqrt{3}}{2\pi^2}.$$

**Câu 28: Chọn D**

Hình nón có bán kính của đáy là $r = \frac{AC}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ và độ dài

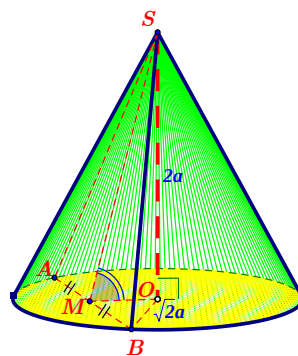
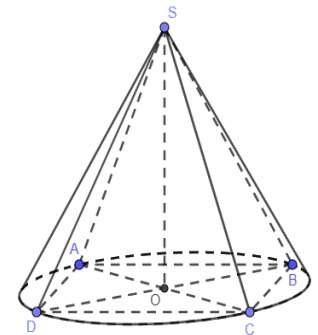
đường sinh $l = SA = 3$.

Vậy diện tích xung quanh của hình nón là:

$$S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot 3 = \frac{9\sqrt{2}\pi}{2}.$$

Câu 29: Chọn D

Kí hiệu như hình vẽ



Để thấy góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt đáy là góc $SMO = 60^\circ$.

$$\text{Xét tam giác vuông } SOM \text{ có } OM = 2a \cdot \cot 60^\circ = \frac{2a}{\sqrt{3}}; SM = \frac{2a}{\sin 60^\circ} = \frac{4a}{\sqrt{3}};$$

$$\text{Lại có } AB = 2.MB = 2\sqrt{OB^2 - OM^2} = 2\sqrt{2a^2 - \frac{4a^2}{3}} = \frac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Vậy } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}SM.AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{4a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}a^2}{3}.$$

Câu 30: Chọn A

Gọi A' là hình chiếu của A trên (O') ; B' là hình chiếu của B trên (O) .

Khi đó $OO' // AA'$ nên $(AB, OO') = (AB, AA') = BAA' = 30^\circ$ (do $\triangle ABA'$ vuông tại B).

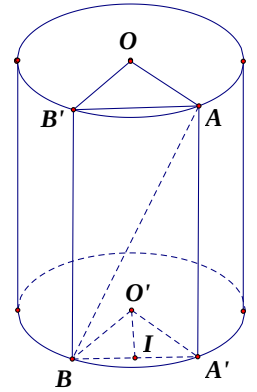
Gọi I là trung điểm $A'B$. Do $OO' // (AA'BB')$ nên

$$d(OO', AB) = d(OO', (AA'BB')) = d(O', (AA'BB')) = O'I = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ta có } A'B = 2BI = 2\sqrt{O'B^2 - O'I^2} = 2\sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = a.$$

$$OO' = AA' = A'B \cdot \cot 30^\circ = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Diện tích toàn phần: } S_p = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi a \cdot a\sqrt{3} + 2\pi a^2 = 2\pi a^2(\sqrt{3} + 1).$$



Câu 31: Chọn B

Xét tam giác IOF vuông tại O ta có:

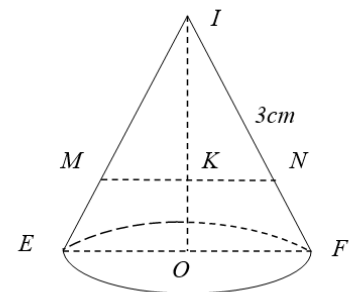
$$EF = 2OF = 2 \cdot \sin 30^\circ \cdot 3 = 3(\text{cm}).$$

Mặt khác thiết diện đi qua điểm K và vuông góc với IO nên $MN // EF$.

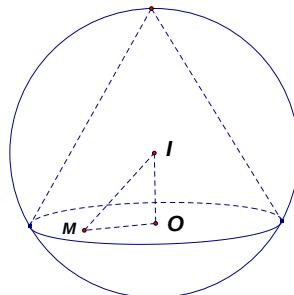
$$\text{Ta xét tỉ lệ: } \frac{MN}{EF} = \frac{IK}{IO} \Leftrightarrow MN = \frac{IK \cdot EF}{IO} = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2(\text{cm}).$$

$$\text{Vậy bán kính của thiết diện là: } KN = \frac{MN}{2} = 1(\text{cm}).$$

Suy ra: $S = \pi$.



Câu 32: Chọn C



Gọi O là tâm của đáy. Đặt $OI = a \Rightarrow AI = 12 - a$

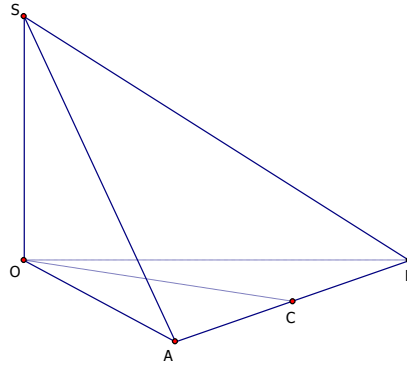
Để I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình nón thì $IA = IB \Rightarrow \sqrt{6^2 + a^2} = 12 - a \Rightarrow a = 4,5$

M thuộc mặt đáy cách I một khoảng bằng 6 $\Rightarrow IM = 6$

Xét $\triangle IOM$ vuông tại O : $OM = \sqrt{IM^2 - IO^2} = \sqrt{15,75}$

Suy ra tập hợp M là đường tròn tâm O bán kính OM . Chu vi là $2\pi\sqrt{15,75} = 3\pi\sqrt{7}$.

Câu 33: Chọn C



Đặt $OA = R$. Gọi C là trung điểm của AB . Tam giác OAB cân tại $O \Rightarrow OC \perp AB \Rightarrow OC = 2a$.

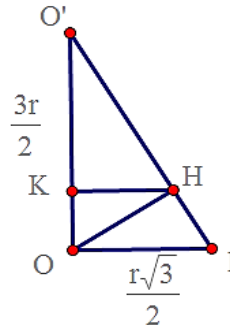
Ta tính được: $SA = SB = \frac{2R}{\sqrt{3}}$, và $AB = 2AC = 2\sqrt{R^2 - 4a^2}$.

Xét tam giác SAB có $\begin{cases} SA = SB \\ \angle SAB = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle SAB$ đều $\Rightarrow SA = AB \Leftrightarrow \frac{4R^2}{3} = 4(R^2 - 4a^2)$

$\Rightarrow R = \sqrt{6}a \Rightarrow SA = 2\sqrt{2}a$.

Diện tích xung quanh của hình nón đã cho là: $S = \pi R.SA = 4\pi a^2\sqrt{3}$.

Câu 34: Chọn A



Trong (O) kẻ $OI \perp MN$ tại I . Khi đó ta có $MN \perp (OO'I) \Rightarrow (OO'I) \perp (O'MN)$. Trong $(OO'I)$ kẻ $OH \perp O'I$ tại $H \Rightarrow OH \perp (O'MN)$ tại H nên H là hình chiếu vuông góc của O lên $(O'MN)$.

Tam giác OMN đều cạnh r , có OI là đường trung tuyến nên $OI = \frac{r\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác $O'O'I$ vuông tại O , đường cao OH nên ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{O'O^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{4}{9r^2} + \frac{4}{3r^2} = \frac{16}{9r^2} \Rightarrow OH = \frac{3r}{4}.$$

$$O'I = \sqrt{O'O^2 + OI^2} = r\sqrt{3}.$$

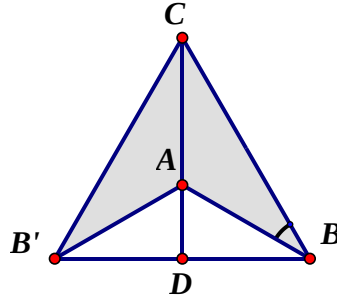
$$O'O^2 = O'H.O'I \Rightarrow \frac{O'H}{O'I} = \frac{O'O^2}{O'I^2} = \frac{3}{4}.$$

Kẻ $HK \perp O'O$ tại K ta có KH là bán kính đáy của mặt nón.

$$\text{Ta có } \frac{HK}{OI} = \frac{O'H}{O'I} = \frac{3}{4} \Rightarrow HK = \frac{3}{4}OI = \frac{3\sqrt{3}}{8}r.$$

$$\text{Diện tích } S \text{ cần tính là } S = \pi.HK.OH = \pi.\frac{3\sqrt{3}}{8}r.\frac{3r}{4} = \frac{9\sqrt{3}r^2}{32}.$$

Câu 35: Chọn A



Gọi D là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng AC .

V_1 là thể tích khối nón tròn xoay sinh bởi tam giác vuông CDB khi quay quanh trục CD .

V_2 là thể tích khối nón tròn xoay sinh bởi tam giác vuông ADB khi quay quanh trục AD .

Khi đó thể tích khối tròn xoay cần tính là $V = V_1 - V_2$.

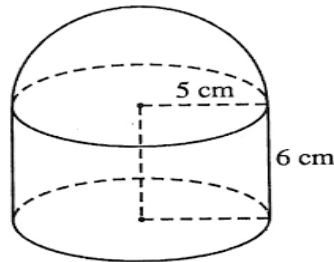
Tam giác ABC cân tại A và $AB = 2a = AC$, $ABC = 30^\circ \Rightarrow CAB = 120^\circ$ và $DAB = 60^\circ$.

Do đó $DB = AB.\sin 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Vậy ta có

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi.DB^2.DC - \frac{1}{3}\pi.DB^2.DA = \frac{1}{3}\pi.DB^2(DC - DA) = \frac{1}{3}\pi.DB^2.AC = \frac{1}{3}\pi.(a\sqrt{3})^2.2a \\ &= 2\pi a^3 \end{aligned}$$

Câu 36:



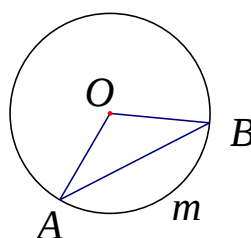
Chọn B

Diện tích xung quanh phần thân hộp là: $S_1 = 2\pi.5.6 = 60\pi (cm^2)$

Diện tích xung quanh nửa hình cầu là: $S_2 = \frac{1}{2}.4\pi.5^2 = 50\pi (cm^2)$

Diện tích cần sơn là: $S = S_1 + S_2 = 110\pi (cm^2)$.

Câu 37: Chọn A



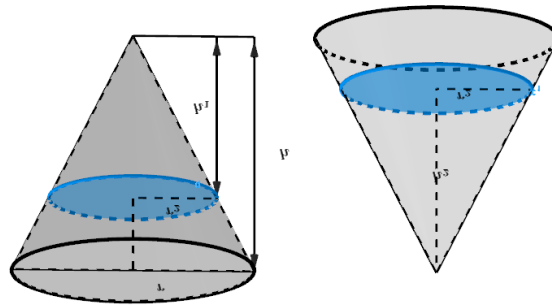
Gọi S là diện tích thiết diện, S' là diện tích hình chiếu của thiết diện lên mặt phẳng đáy. Khi đó $S' = S \cdot \cos 60^\circ$.

$$\text{Ta có } AB = 4\sqrt{3} \Rightarrow \cos AOB = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} = -\frac{1}{2} \Rightarrow AOB = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin 120^\circ = 4\sqrt{3} \\ S_{OAmB} = \frac{1}{3} \pi \cdot OA^2 = \frac{16\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow S' = S_{OAmB} - S_{OAB} = \frac{4(4\pi - 3\sqrt{3})}{3}$$

$$\Rightarrow S = \frac{S'}{\cos 60^\circ} = \frac{8(4\pi - 3\sqrt{3})}{3}.$$

Câu 38: Chọn A



Gọi V_{nuoc} , V lần lượt là thể tích của lượng nước trong đồ chơi và thể tích khối đồ chơi.

Gọi h , r lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của khối đồ. $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$.

Xét khối đồ chơi đặt theo hình H_1 .

Gọi h_1 , r_1 lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của khối nón chứa lượng nước.

Khi đó ta có: $\frac{h_1}{h} = \frac{r_1}{r} = \frac{2}{3} \Rightarrow h_1 = \frac{2}{3}h$, $r_1 = \frac{2}{3}r$.

$$V_{nuoc} = \frac{1}{3} \pi r_1^2 h_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{2}{3}r\right)^2 \cdot \frac{2}{3}h = \frac{8}{81} \pi r^2 h. (*)$$

Xét khối đồ chơi đặt theo hình H_2 .

Gọi h_2 , r_2 lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của khối nón không chứa nước trong khối đồ chơi. Suy ra thể tích của khối nón không chứa nước: $V_{non} = \frac{1}{3} \pi r_2^2 h_2$.

Đặt: $\frac{h_2}{h} = \frac{r_2}{r} = k \Rightarrow h_2 = k.h$, $r_2 = k.r$.

$$V_{nuoc} = V - V_{non} = \frac{1}{3} \pi r^2 h - \frac{1}{3} \pi r_2^2 h_2 = \frac{1}{3} \pi r^2 h - \frac{1}{3} \pi (k.r)^2 \cdot k.h = \frac{1}{3} \pi r^2 h (1 - k^3). (**)$$

Từ (*), (**) suy ra: $\frac{8}{81}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 h(1 - k^3) \Leftrightarrow 1 - k^3 = \frac{8}{27} \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{\frac{19}{27}}$.

Vậy chiều cao lượng nước ở hình H_2 : $h' = h - h_2 = h - k.h = h(1 - k) = 20 \cdot \left(1 - \sqrt[3]{\frac{19}{27}}\right) \approx 2,21(cm)$

.

