

CD10_211-240 _ CHỨNG MINH BĐT VÀ TÌM GTLN, GTNN _Phương Minh

Người làm: Phương Minh

Zalo: Phương Minh - số dt zalo: 0989606390

Email: phuongminh0503@gmail.com

CD10: CHỨNG MINH BĐT VÀ TÌM GTLN, GTNN

Dạng 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất:

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 trường THCS Trà My, năm học 2018 - 2019)

Tìm giá trị nguyên lớn nhất của biểu thức $M = \frac{15 - x}{5 - x}$

Lời giải

$$M = \frac{15 - x}{5 - x} = 1 + \frac{10}{5 - x} \cdot M \text{ lớn nhất khi và chỉ khi } \frac{10}{5 - x} \text{ lớn nhất}$$

$$+) x > 5 \text{ thì } \frac{10}{5 - x} < 0 \quad (1)$$

$+) x < 5 \text{ thì } \frac{10}{5 - x} > 0$ mà $\frac{10}{5 - x}$ có tử không đổi nên phương trình có giá trị lớn nhất khi mẫu nhỏ nhất mà $5 - x$ là số nguyên dương nhỏ nhất khi $5 - x = 1 \Rightarrow x = 4$

$$\text{Khi đó } \frac{10}{5 - x} = 10 \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) thấy $\frac{10}{5 - x}$ lớn nhất bằng 10.

Vậy GTLN của $M = 11$ khi và chỉ khi $x = 4$

Câu 2. (HSG 7 trường Nguyễn Trãi, năm học 2018 - 2019)

Tìm số tự nhiên x để phân số $\frac{7x - 8}{2x - 3}$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

$$\text{Đặt } A = \frac{7x - 8}{2x - 3} = \frac{2(7x - 8)}{2(2x - 3)} = \frac{7(2x - 3) + 5}{2(2x - 3)} = \frac{7}{2} + \frac{5}{2(2x - 3)}$$

Đặt $B = \frac{5}{2(2x - 3)}$ thì A lớn nhất khi và chỉ khi B lớn nhất

Vậy GTLN của $A = 6 \Leftrightarrow x = 2$

Câu 3. (HSG 7 huyện Phú Lý, trường THCS Lý Tự Trọng, năm học 2018 - 2019)

Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $M = \frac{2016x - 2016}{3x + 2}$ có giá trị nhỏ nhất

Lời giải

$$M = \frac{2016x - 2016}{3x + 2} = \frac{672 \cdot (3x + 2) - 2016 - 1344}{3x + 2} = 672 - \frac{3360}{3x + 2}$$

$$M \text{ nhỏ nhất} \Rightarrow \frac{3360}{3x + 2} \text{ lớn nhất}$$

$$* \text{ Xét } 3x + 2 < 0 \text{ thì } \frac{3360}{3x + 2} < 0 \quad (1)$$

$$* \text{ Xét } 3x + 2 > 0 \text{ thì } \frac{3360}{3x + 2} > 0$$

$$\frac{3360}{3x + 2} \text{ lớn nhất khi } 3x + 2 \text{ nhỏ nhất.}$$

Mà x nguyên, $3x + 2$ dương và $3x + 2$ chia 3 dư 2 nên $3x + 2 = 2 \Leftrightarrow x = 0$

$$\text{Khi đó } \frac{3360}{3x + 2} = \frac{3360}{3 \cdot 0 + 2} = 1680 \quad (2)$$

$$\text{So sánh (1) và (2) thì } \frac{3360}{3x + 2} \text{ có giá trị lớn nhất bằng } 1680$$

$$\text{Vậy } M_{\min} = -1008 \Leftrightarrow x = 0$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Phú Lý, trường THCS Lý Tự Trọng, năm học 2018 - 2019)

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn: $2x = 3y = 5z$ và $|x - 2y| = 5$. Tìm giá trị lớn nhất của $3x - 2z$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{x}{3} = \frac{2y}{4} = \frac{x - 2y}{-1}, 3y = 5z$$

$$\text{Nếu } x - 2y = 5 \Rightarrow x = -15, y = -10, z = -6. \text{ Khi đó } 3x - 2z = -45 + 12 = -33$$

$$\text{Nếu } x - 2y = -5 \Rightarrow x = 15, y = 10, z = 6. \text{ Khi đó } 3x - 2z = 45 - 12 = 33$$

Vậy giá trị lớn nhất của $3x - 2z$ là 33.

Câu 5. (HSG 7 trường THCS Hưng Vũ, năm học 2018 - 2019)

$$C = \frac{-4}{(2x - 3)^2 + 5}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

Lời giải

$$C \text{ nhỏ nhất} \Rightarrow (2x - 3)^2 + 5 \text{ lớn nhất}$$

$$\text{Mà mẫu số } (2x - 3)^2 + 5 \geq 5 (\forall x \in \mathbb{Q})$$

$$\text{Vậy } C_{\min} = \frac{-4}{5} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Câu 6. (HSG 7 huyện Thanh Oai, trường THCS Hồng Dương 2017 - 2018)

Với giá trị nào của x thì biểu thức: $P = -x^2 - 8x + 5$ có giá trị lớn nhất? Tìm giá trị lớn nhất đó.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= -x^2 - 8x + 5 = -x^2 - 8x - 16 + 21 = -(x^2 + 8x + 16) + 21 \\ &= -(x + 4)^2 + 21 \\ \text{Do } -(x + 4)^2 &\leq 0 (\forall x) \Rightarrow -(x + 4)^2 + 21 \leq 21 (\forall x) \\ &\Rightarrow \text{Max} P = 21 \Leftrightarrow x = -4 \end{aligned}$$

Câu 7. (HSG 7 trường Thanh Thùy, năm học 2018 - 2019)

$$C = \frac{|x - 2017| + 2018}{|x - 2017| + 2019}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Lời giải

$$C = \frac{|x - 2017| + 2018}{|x - 2017| + 2019} = \frac{(|x - 2017| + 2019) - 1}{|x - 2017| + 2019} = 1 - \frac{1}{|x - 2017| + 2019}$$

Biểu thức C đạt giá trị nhỏ nhất khi $|x - 2017| + 2019$ có giá trị nhỏ nhất

Mà $|x - 2017| \geq 0$ nên $|x - 2017| + 2019 \geq 2019$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } x = 2017 \Rightarrow C = \frac{2018}{2019}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C là $\frac{2018}{2019}$ khi $x = 2017$.

Câu 8. (HSG 7 huyện Đức Thọ, năm học 2017 - 2018)

Tìm giá trị nhỏ nhất hoặc lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $A = |x + 5| + 5$

b) $B = \frac{x^2 + 17}{x^2 + 7}$

Lời giải

a) $A = |x + 5| + 5$

Ta có: $|x + 5| \geq 0 \Rightarrow A \geq 5$. Dấu "=" xảy ra khi $x = -5$

Vậy $\text{Min} A = 5 \Leftrightarrow x = -5$.

$$b) B = \frac{x^2 + 17}{x^2 + 7} = \frac{(x^2 + 7) + 10}{x^2 + 7} = 1 + \frac{10}{x^2 + 7}$$

$$\text{Ta có: } x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 7 \geq 7 \Rightarrow \frac{10}{x^2 + 7} \leq \frac{10}{7} \Rightarrow 1 + \frac{10}{x^2 + 7} \leq 1 + \frac{10}{7} \Rightarrow B \leq \frac{17}{7}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$

$$\text{Vậy } \text{Max} B = \frac{17}{7} \Leftrightarrow x = 0$$

Câu 9. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Bích Hòa, năm học 2017 - 2018)

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: } A = \frac{|x| + 1996}{-1997}$$

Lời giải

$A < 0$ với mọi x nên A đạt giá trị lớn nhất khi $|A|$ đạt giá trị nhỏ nhất

$$|A| = \left| \frac{|x| + 1996}{-1997} \right| = \frac{|x| + 1996}{1997}$$

$$|x| \geq 0 \forall x \text{ nên } |x| + 1996 \geq 1996, \text{ vậy } |A| \text{ nhỏ nhất bằng } \frac{1996}{1997} \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Suy ra GTLN của } A = \frac{1996}{-1997} \Leftrightarrow x = 0$$

Câu 10. (HSG 7 trường THCS Phú Trường, 2017 - 2018)

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: } A = \frac{x+2}{|x|} \text{ với } x \text{ là số nguyên.}$$

Lời giải

Xét các trường hợp:

$$+) x \leq -2 \Rightarrow A \leq 0$$

$$+) x = -1 \Rightarrow A = 1$$

$$+) x \geq 1 \Rightarrow A = \frac{x+2}{x} = 1 + \frac{2}{x} \Rightarrow A \text{ lớn nhất} \Rightarrow \frac{2}{x} \text{ lớn nhất}$$

Vì x là số nguyên dương, nên $\frac{2}{x}$ lớn nhất $\Rightarrow x$ nhỏ nhất, tức là $x = 1$, khi đó $A = 3$
 Vậy giá trị lớn nhất của $A = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

Câu 11. (HSG 7 huyện Yên Lập, năm học 2017 - 2018)

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } A = |2x+2| + |2x-2013| \text{ với } x \text{ là số nguyên.}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = |2x+2| + |2x-2013| = |2x+2| + |2013-2x|$$

$$A \geq |2x+2+2013-2x| = 2015$$

Dấu "=" xảy ra khi $(2x+2)(2013-2x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$
 Vậy $\min A = 2015$ khi $x = -1$

Dạng 2.1 Bất đẳng thức về chứng minh tổng phân số tự nhiên

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện, năm học 2018 - 2019)

Cho biểu thức $M = \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+t} + \frac{z}{y+z+t} + \frac{t}{x+z+t}$ với x, y, z, t là các số tự nhiên khác 0. Chứng minh $M^{10} < 1025$

Lời giải

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+y+z} &< \frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y+t} < \frac{y}{x+y}, \frac{z}{y+z+t} < \frac{z}{z+t}, \frac{t}{x+z+t} < \frac{t}{z+t} \\ \Rightarrow M &< \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} \right) + \left(\frac{z}{z+t} + \frac{t}{z+t} \right) \Rightarrow M < 2 \\ \text{Có } M^{10} &< 2^{10} = 1024 < 1025 \Rightarrow M^{10} < 1025 \end{aligned}$$

Dạng 2.2 : Bất đẳng thức về chứng minh tổng lũy thừa

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Vạn Long, năm học 2018 - 2019)

Biết $x \in \mathbb{Q}$ và $0 < x < 1$. Chứng minh $x^n < x$ với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Lời giải

Xét $x^n - x = x(x^{n-1} - 1)$
 $0 < x < 1 \Rightarrow x^{n-1} - 1 < 0; x > 0 \Rightarrow x^n - x < 0$
 Suy ra điều phải chứng minh

Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Oai, trường THCS Hồng Dương 2017 - 2018)

Chứng minh: $\frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$

Lời giải

Đặt $A = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$, ta có:
 $*A < \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100}$

$$A < \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$A < \frac{1}{4} - \frac{1}{100} \Rightarrow A < \frac{1}{4}$$

$$*A > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{99.100} + \frac{1}{100.101} = \frac{1}{5} - \frac{1}{101} > \frac{1}{6}$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{6} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{4}$$

Dạng 2.3 Bất đẳng thức về chứng minh tích của một dãy

Dạng 3. Bất đẳng thức dạng chữ

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Yên Lập, năm học 2017 - 2018)

Cho ba số dương $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

Lời giải

Vì $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ nên:

$$(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab+1 \geq a+b \Leftrightarrow \frac{1}{ab+1} \leq \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{a+b} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c} \quad (2); \quad \frac{b}{ac+1} \leq \frac{b}{a+c} \quad (3)$$

$$\text{Do đó: } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \quad (4)$$

$$\text{Mà: } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5) suy ra: } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2.$$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>