

TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN
PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH
TRONG ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CÁC TỈNH, THÀNH PHỐ
NĂM HỌC 2010 - 2011

(Lê Phúc Lữ - tổng hợp và giới thiệu)

Bài 1.

1/ Giải phương trình $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = 1$.

2/ Giải phương trình với ẩn số thực $\sqrt{1-x} = \sqrt{6-x} - \sqrt{-5-2x}$

(Đề thi HSG tỉnh Vĩnh Long)

Bài 2. Giải phương trình $x^5 - x^4 - x^3 - 11x^2 + 25x - 14 = 0$

(Đề thi HSG tỉnh Đồng Nai)

Bài 3. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{2x} + \sqrt{2y} = 4 \\ \sqrt{2x+5} + \sqrt{2y+5} = 6 \end{cases}$$

(Đề HSG Bà Rịa Vũng Tàu)

Bài 4. Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \sqrt{x + \frac{1}{y}} + \sqrt{x + y - 3} = 3 \\ 2x + y + \frac{1}{y} = 8 \end{cases}$$

(Đề thi HSG Hải Phòng, bảng A)

Bài 5. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4x^2 + y^4 - 4xy^3 = 1 \\ 4x^2 + 2y^2 - 4xy = 2 \end{cases}$$

(Đề thi HSG tỉnh Lâm Đồng)

Bài 6. Giải hệ phương trình trên tập số thực
$$\begin{cases} x^4 + 5y = 6 \\ x^2y^2 + 5x = 6 \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển Đồng Nai)

Bài 7. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{3}{x^2 + y^2 - 1} + \frac{2y}{x} = 1 \\ x^2 + y^2 - \frac{2x}{y} = 4 \end{cases}$$

(Đề thi HSG Hà Tĩnh)

Bài 8. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+6} + x^2 = 7 - \sqrt{x-1}$

(Đề thi chọn đội tuyển Lâm Đồng)

Bài 9. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{x-y-1} = 1 \\ y^2 + x + 2y\sqrt{x} - y^2x = 0 \end{cases}$$

(Đề thi HSG tỉnh Quảng Bình)

Bài 10.

1/ Giải bất phương trình $(x^2 - 4x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0$.

2/ Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} xy + y^2 + x = 7y \\ \frac{x^2}{y} + x = 12 \end{cases}$$

(Đề thi HSG Điện Biên)

Bài 11. Giải hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x^6 + y^8 + z^{10} \leq 1 \\ x^{2007} + y^{2009} + z^{2011} \geq 1 \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển Bình Định)

Bài 12.

1/ Giải phương trình $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3-x}} = x - \frac{1}{2}$

2/ Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + \sqrt{x} = 2y \\ y^2 + \sqrt{y} = 2x \end{cases}$$

(Đề thi HSG tỉnh Bến Tre)

Bài 13.

1/ Giải phương trình $x^2 - 4x + 3 = \sqrt{x+5}$.

2/ Giải phương trình $x^3 + x^2 - 3x - 1 = 2\sqrt{x+2}$ trên $[-2, 2]$

(Đề thi HSG tỉnh Long An)

Bài 14. Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{x}}{y} + 2 \\ y(\sqrt{x^2+1}-1) = \sqrt{3x^2+3} \end{cases}$$

(Đề chọn đội tuyển trường Chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định).

Bài 15. Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 2x^2y + 3xy = 4x^2 + 9y \\ 7y + 6 = 2x^2 + 9x \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển Nha Trang, Khánh Hòa)

Bài 16.

1/ Giải phương trình $x + 2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2+8x-7} + 1$

2/ Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2\sqrt{2x+y} = 3 - 2x - y \\ \sqrt[3]{x+6} + \sqrt{1-y} = 4 \end{cases}$$

(Đề thi HSG tỉnh Vĩnh Phúc)

Bài 17. Giải phương trình sau $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = (x^3 + x)\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$

(Đề thi HSG tỉnh Hà Tĩnh)

Bài 18. Giải phương trình $2\sin 2x - 3\sqrt{2}\sin x + \sqrt{2}\cos x - 5 = 0$.

(Đề thi chọn đội tuyển trường THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi)

Bài 19.

1/ Giải phương trình $x + \sqrt{4-x^2} = 2 + x\sqrt{4-x^2}$.

2/ Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2y(x^2 - y^2) = 3x \\ x(x^2 + y^2) = 10y \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển THPT Chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa)

Bài 20. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+6} + x^2 = 7 - \sqrt{x-1}$.

(Đề thi HSG tỉnh Lâm Đồng)

Bài 21. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{5(x+y)}{x+y+6xy} + \frac{6(x+z)}{x+z+5xz} = 4 \\ \frac{6(z+y)}{z+y+4zy} + \frac{4(x+y)}{x+y+6xy} = 5 \\ \frac{4(x+z)}{x+z+5xz} + \frac{5(y+z)}{y+z+4yz} = 6 \end{cases}$$

(Đề chọn đội tuyển trường PTNK, TPHCM)

Bài 22.

1/ Giải phương trình $\sqrt{x} + 2\sqrt{y-1} + 3\sqrt{z-2} = \frac{1}{2}(x+y+z+11)$

2/ Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 2x = \frac{121}{9} - 27^{\frac{x}{2}} \\ x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

(Đề thi HSG tỉnh Quảng Nam)

Bài 23.

1/ Tìm tất cả các giá trị của a, b để phương trình $\frac{x^2 - 2ax + b}{bx^2 - 2ax + 1} = m$ có hai nghiệm phân biệt với mọi tham số m .

2/ Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y + xy^2 = -6x^2 \\ 1 + x^3y^3 = 19x^3 \end{cases}$$

(Đề thi HSG vòng tỉnh Bình Phước)

Bài 24.

1/ Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2010^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 2010^3 \end{cases}$$

2/ Giải phương trình $3^{2x^3-x+2} - 3^{x^3+2x} + x^3 - 3x + 2 = 0$

(Đề thi chọn đội tuyển Ninh Bình)

Bài 25.

1/ Giải bất phương trình sau
$$\begin{cases} 2x - y + \sqrt{x-1} \geq \sqrt{2(x-1) + 2(2x-y)^2} \\ y^2 + 4x\sqrt{x-1} - 17 = 0 \end{cases}$$

2/ Với n là số nguyên dương, giải phương trình $\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 8x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} = 0$.

(Đề thi HSG tỉnh Khánh Hòa)

Bài 26.

1/ Giải phương trình sau
$$\frac{\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x - 5 \sin x + (2 - \sqrt{3}) \cos x + 3 + \sqrt{3}}{2 \cos x + \sqrt{3}} = 1.$$

2/ Giải phương trình $\log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 8x + 5$

(Đề thi HSG tỉnh Thái Bình)

Bài 27.

1/ Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 1 + y^2 + xy = y \\ x + y - 2 = \frac{y}{1+x^2} \end{cases}$$

2/ Giải phương trình lượng giác
$$\frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{\tan x + \cot 2x}} = \sqrt{2} + 2 \sin 2x$$

(Đề thi HSG tỉnh Phú Thọ)

Bài 28. Giải phương trình $24x^2 - 60x + 36 - \frac{1}{\sqrt{5x-7}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0$

(Đề thi HSG tỉnh Quảng Ninh)

Bài 29. Giải phương trình $\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 2} + \sqrt{-3x^3 + x^2 + 2x - 1} = 2x^2 + 2x + 2$

(Đề thi chọn đội tuyển trường THPT Chuyên ĐHSP Hà Nội)

Bài 30. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (2x^2 - 3x + 4)(2y^2 - 3y + 4) = 18 \\ x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0 \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển trường THPT Chuyên ĐHSP Hà Nội)

Bài 31. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2(2x+1)^3 + 2x+1 = (2y-3)\sqrt{y-2} \\ \sqrt{4x+2} + \sqrt{2y+4} = 6 \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển trường THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai)

Bài 32. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4 + x^3y + 9y = y^3x + x^2y^2 + 9x \\ x(y^3 - x^3) = 7 \end{cases}$$

(Đề thi chọn HSG tỉnh Hưng Yên)

Bài 33. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2y^3 + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} - y \\ y = 2x^2 - 1 + 2xy\sqrt{1+x} \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển chuyên Nguyễn Du, Đắk Lắk)

Bài 34. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 35 \\ 2x^2 + 3y^2 = 4x - 9y \end{cases}$$

(Đề thi HSG tỉnh Yên Bái)

Bài 35. Giải phương trình $2\sqrt[3]{2x-1} = 27x^3 - 27x^2 + 13x - 2$

(Đề thi HSG Hải Phòng, bảng A1)

Bài 36. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = 2(x^2 + y^2) \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{2y} = y^2 - x^2 \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển Quảng Ninh)

Bài 37. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 = 3x - 12y + 50 \\ y^3 = 12y + 3z - 2 \\ z^3 = 27x + 27z \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển trường THPT Phan Chu Trinh, Đà Nẵng)

Bài 38. Giải phương trình
$$\sqrt[3]{\frac{x^9 - 9x^2 + 1}{3}} = 2x + 1$$

(Đề thi chọn đội tuyển Phú Yên)

Bài 39.

1/ Giải phương trình sau $x - 1 + \sqrt{x+1} + \sqrt{2-x} = x^2 + \sqrt{2}$

2/ Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} y^3 + y = x^3 + 3x^2 + 4x + 2 \\ \sqrt{1-x^2} - \sqrt{y} = \sqrt{2-y} - 1 \end{cases}$$

(Đề thi HSG tỉnh Nghệ An)

Bài 40.

1/ Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 8y^3 - 4xy^2 = 1 \\ 2x^4 + 8y^4 - 2x - y = 0 \end{cases}$$

2/ Chứng minh phương trình sau có đúng một nghiệm $(\sqrt{x+1})^{2011} - 2(\sqrt{x+1})^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 2.$

(Đề dự bị thi HSG tỉnh Nghệ An)

Bài 41. Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x + 3y = x^3 - 12 \\ -y + 4z = y^3 - 6 \\ 9z + 2x = z^3 + 32 \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển KHTN, vòng 1)

Bài 42. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} e^{y^2 - x^2} = \frac{x^2 + 1}{y^2 + 1} \\ 3\log_2(x + 2y + 6) = 2\log_2(x + y + 2) + 1 \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển trường THPT Cao Lãnh, Đồng Tháp)

Bài 43. Giải phương trình sau $\frac{\sqrt{x^2 - x + 2}}{1 + \sqrt{-x^2 + x + 2}} - \frac{\sqrt{x^2 + x}}{1 + \sqrt{-x^2 - x + 4}} = x^2 - 1$

(Đề thi HSG tỉnh Bình Phước)

Bài 44.

1/ Giải phương trình $\sqrt[3]{3x + 4} = x^3 + 3x^2 + x - 2$

2/ Tìm số nghiệm của phương trình

$$(4022x^{2011} + 4018x^{2009} + 2x)^4 - 2(4022x^{2011} + 4018x^{2009} + 2x)^2 + \cos^2 2x = 0$$

(Đề thi chọn đội tuyển Chuyên Nguyễn Du)

Bài 45. Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} (2-x)(1-2x)(2+y)(1+2y) = 4\sqrt{10z+1} \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + 2yz + x^2y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển Hà Tĩnh)

Bài 46.

1/ Giải phương trình sau $2010^x(\sqrt{x^2 + 1} - x) = 1.$

2/ Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^4 - 4x + 2^{xy-2x+4} = 5 \\ 2^x + x^3 = y^3 + 2^y \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển trường THPT Sào Nam, tỉnh Quảng Nam)

Bài 47. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^{11} + xy^{10} = y^{22} + y^{12} \\ 7y^4 + 13x + 8 = 2y^4\sqrt[3]{x(3x^2 + 3y^2 - 1)} \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển TP.HCM)

Bài 48. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2009x + 2010y = (x - y)^2 \\ 2010y + 2011z = (y - z)^2 \\ 2011z + 2009x = (z - x)^2 \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển chuyên Quang Trung, Bình Phước)

Bài 49. Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{5} \\ 4x^2 + 3x - \frac{57}{25} = -y(3x+1) \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển Nghệ An)

Bài 50. Cho các tham số dương a, b, c . Tìm nghiệm dương của hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} x + y + z = a + b + c \\ 4xyz - a^2x - b^2y - c^2z = abc \end{cases}$$

(Đề kiểm tra đội tuyển Ninh Bình)

Bài 51. Giải hệ phương trình sau trên tập hợp số thực
$$\begin{cases} x + \frac{3x-y}{x^2+y^2} = 3 \\ y - \frac{x+3y}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển Chuyên Vĩnh Phúc, tỉnh Vĩnh Phúc)

Bài 52. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^4 - 2x = y^4 - y \\ (x^2 - y^2)^3 = 3 \end{cases}$$

(Đề kiểm tra đội dự tuyển trường THPT Chuyên ĐHSP Hà Nội)

Bài 53. Giải phương trình $2x^2 \cdot \sin x + x \cdot \cos x + \sqrt[3]{2x+1} = x^3 - x^5 + x + 1$

(Đề thi chọn đội tuyển Hà Nội)

Bài 54. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y+3)^2 = -(y+3)(x+z-2) \\ x^2 + 5x + 9z - 7y - 15 = -3yz \\ 8x^2 + 18y^2 + 18xy + 18yz = -84x - 72y - 24z - 176 \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển ĐHSP Hà Nội, ngày 2)

Bài 55.

Tìm x, y, z thỏa mãn hệ
$$\begin{cases} 2z(x+y) + 1 = x^2 - y^2 \\ y^2 + z^2 = 1 + 2xy + 2zx - 2yz \\ y(3x^2 - 1) = -2x(x^2 + 1) \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển trường ĐH KHTN Hà Nội, vòng 3)

LỜI GIẢI CHI TIẾT VÀ NHẬN XÉT

Bài 1.

1/ Giải phương trình $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = 1$.

2/ Giải phương trình với ẩn số thực $\sqrt{1-x} = \sqrt{6-x} - \sqrt{-5-2x}$

(Đề thi HSG tỉnh Vĩnh Long)

Lời giải.

1/ Điều kiện $x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2} = 1 \Leftrightarrow |\sqrt{x-1}-1| + |\sqrt{x-1}-2| = 1 \quad (*)$$

-Nếu $\sqrt{x-1} < 1$ thì $(*) \Leftrightarrow -(\sqrt{x-1}-1) - (\sqrt{x-1}-2) = 1 \Leftrightarrow 3-2\sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 1$, loại.

-Nếu $1 \leq \sqrt{x-1} \leq 2 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 5$ thì $(*) \Leftrightarrow (\sqrt{x-1}-1) - (\sqrt{x-1}-2) = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$, luôn đúng.

-Nếu $\sqrt{x-1} > 2$ thì $(*) \Leftrightarrow (\sqrt{x-1}-1) + (\sqrt{x-1}-2) = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}-3 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2$, loại.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là mọi x thuộc $[2; 5]$.

2/ Điều kiện $x \leq \frac{-5}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{-5-2x} = \sqrt{6-x}$$

$$\Leftrightarrow (1-x) + (-5-2x) + 2\sqrt{(1-x)(-5-2x)} = 6-x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(-5-2x)} = x+5 \Leftrightarrow (1-x)(-5-2x) = x^2+10x+25$$

$$\Leftrightarrow x^2-7x-30=0 \Leftrightarrow x=-3 \vee x=10$$

Thử lại, ta thấy chỉ có $x = -3$ là thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = -3$.

Nhận xét. Các dạng toán phương trình vô tỉ này khá cơ bản và quen thuộc, chúng hoàn toàn có thể giải bằng cách bình phương để khử căn mà không cần lo ngại về tính giải được của phương trình hay không. Để đơn giản trong việc xét điều kiện, ta có thể giải xong rồi thử lại cũng được.

Bài 2. Giải phương trình $x^5 - x^4 - x^3 - 11x^2 + 25x - 14 = 0$

(Đề thi HSG tỉnh Đồng Nai)

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x^5 - 2x^4) + (x^4 - 2x^3) + (x^3 - 2x^2) + (-9x^2 + 18x) + (7x - 14) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^4 + x^3 + x^2 - 9x + 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^4 + x^3 + x^2 - 9x + 7 = 0 \end{cases}$$

Phương trình thứ hai ở trên có thể viết lại là

$$(x^4 + x^3 + x^2 - 9x + 6) + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^4 - x^3 + 2x^3 - 2x^2 + 3x^2 - 3x - 6x + 6) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x^2 + 3x + 6) + 1 = 0$$

Do $(x-1)^2(x^2 + 3x + 6) + 1 > 0, \forall x$ nên phương trình này vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 2$.

Nhận xét. Đây là một phương trình đa thức thông thường, có nghiệm là $x = 2$ nên việc phân tích thành nhân tử khá đơn giản; cái khó là biết đánh giá phương trình còn lại và có nên tiếp tục tìm cách giải nó hay không hay tìm cách chứng minh nó vô nghiệm. Trường hợp đề bài cho phân tích thành các đa thức không có nghiệm đơn giản, bài toán trở nên khó khăn hơn rất nhiều; thậm chí là ngay cả với những đa thức bậc bốn. Chẳng hạn như khi giải phương trình $2x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 16x - 3 = 0$, nếu tính toán trên giấy thì không phải dễ dàng mà có được phân tích $(2x^2 - 5x + 1)(x^2 + x - 3) = 0$ để giải từng phương trình tích.

Bài 3. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{2x} + \sqrt{2y} = 4 \\ \sqrt{2x+5} + \sqrt{2y+5} = 6 \end{cases}$$

(Đề HSG Bà Rịa Vũng Tàu)

Lời giải.

Điều kiện: $x, y \geq 0$. Cộng từng vế hai phương trình của hệ, ta có:

$$(\sqrt{2x+5} + \sqrt{2x}) + (\sqrt{2y+5} + \sqrt{2y}) = 10$$

Trừ phương trình thứ hai cho phương trình thứ nhất, vế theo vế, ta được:

$$(\sqrt{2x+5}-\sqrt{2x})+(\sqrt{2y+5}-\sqrt{2y})=2 \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x}}+\frac{2}{\sqrt{2y+5}+\sqrt{2y}}=2$$

Đặt $a = \sqrt{2x+5} + \sqrt{2x} > 0, b = \sqrt{2y+5} + \sqrt{2y} > 0$. Ta có hệ sau:

$$\begin{cases} a+b=10 \\ \frac{5}{a}+\frac{5}{b}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=10-a \\ \frac{5}{a}+\frac{5}{10-a}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=10-a \\ 50=20a-2a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=5 \end{cases}$$

Xét phương trình

$$\sqrt{2x+5}+\sqrt{2x}=5 \Rightarrow 2x+5=(5-\sqrt{2x})^2 \Leftrightarrow 2x+5=25+2x-10\sqrt{2x} \Leftrightarrow \sqrt{2x}=2 \Leftrightarrow x=2.$$

Tương tự, ta cũng có $y=2$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x, y) = (2, 2)$.

Nhận xét. Ngoài cách giải tận dụng tính chất của các căn thức, ta cũng có thể đặt ẩn phụ rồi biến đổi; trong phương trình thứ hai, các số hạng tự do có thể khác nhau mà lời giải vẫn được tiến hành tương tự. Chẳng hạn, giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \sqrt{2x}+\sqrt{2y}=6 \\ \sqrt{2x+5}+\sqrt{2y+9}=8 \end{cases}$$

Bài 4. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} \sqrt{x+\frac{1}{y}}+\sqrt{x+y-3}=3 \\ 2x+y+\frac{1}{y}=8 \end{cases}$$

(Đề thi HSG Hải Phòng, bảng A)

Lời giải.

Điều kiện $y \neq 0, x+\frac{1}{y} \geq 0, x+y \geq 3$.

Đặt $a = \sqrt{x+\frac{1}{y}}, b = \sqrt{x+y-3}, a, b \geq 0$. Hệ đã cho viết lại là $\begin{cases} a+b=3 \\ a^2+b^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2, b=1 \\ a=1, b=2 \end{cases}$

-Với $a=2, b=1$, ta có

$$\sqrt{x+\frac{1}{y}}=2, \sqrt{x+y-3}=1 \Leftrightarrow x+\frac{1}{y}=4, x+y=4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{4-x}=4 \\ y=4-x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{4-x}=4 \\ y=4-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-8x+15=0, x \neq 4 \\ y=4-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3, y=1 \\ x=5, y=-1 \end{cases}$$

-Với $a=1, b=2$, ta có

$$\sqrt{x+\frac{1}{y}}=1, \sqrt{x+y-3}=2 \Leftrightarrow x+\frac{1}{y}=1, x+y=7 \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{7-x}=1 \\ y=7-x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-8x+6=0, x \neq 7 \\ y=7-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-\sqrt{10}, y=3+\sqrt{10} \\ x=4+\sqrt{10}, y=3-\sqrt{10} \end{cases}$$

Thử lại, ta thấy tất cả đều thỏa.

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm là

$$(x, y) = (3, 1), (5, -1), (4 - \sqrt{10}, 3 + \sqrt{10}), (4 + \sqrt{10}, 3 - \sqrt{10}).$$

Nhận xét. Dạng hệ phương trình giải bằng cách đặt ẩn phụ này thường gặp ở nhiều kì thi, từ ĐH-CD đến thi HSG cấp tỉnh và khu vực. Chúng ta sẽ còn thấy nó xuất hiện nhiều ở các đề thi của các tỉnh được nêu dưới đây.

Bài 5. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4x^2 + y^4 - 4xy^3 = 1 \\ 4x^2 + 2y^2 - 4xy = 2 \end{cases}$$

(Đề thi HSG tỉnh Lâm Đồng)

Lời giải.

Lấy phương trình thứ nhất trừ phương trình thứ hai, về theo về, ta được:

$$y^4 - 2y^2 - 4xy^3 + 4xy + 1 = 0 \Leftrightarrow (y^2 - 1)^2 - 4xy(y^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (y^2 - 1)(y^2 - 1 - 4xy) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 1 \vee y = -1 \vee y^2 - 1 - 4xy = 0$$

-Nếu $y = 1$, thay vào phương trình đầu tiên, ta được:

$$4x^2 + 1 - 4x = 1 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1.$$

Thử lại, ta thấy cả hai nghiệm đều thỏa mãn.

-Nếu $y = -1$, thay vào phương trình đầu tiên, ta được:

$$4x^2 + 1 + 4x = 1 \Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1.$$

Thử lại, ta thấy cả hai nghiệm đều thỏa mãn.

-Nếu $y^2 - 1 + 4xy = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1-y^2}{4y}$ (dễ thấy trong trường hợp này $y \neq 0$), thay vào phương trình

đầu tiên, ta được:

$$4\left(\frac{1-y^2}{4y}\right)^2 + y^4 - 4\left(\frac{1-y^2}{4y}\right)y^3 = 1 \Leftrightarrow (1-y^2)^2 + 4y^4 - 4(1-y^2) = 4 \Leftrightarrow (y^2-1)(5y^2+7) = 0.$$

Suy ra $y = \pm 1, x = 0$ và hai nghiệm này đã nêu ở trên.

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt là $(x, y) = (1, 1), (0, 1), (-1, -1), (0, -1)$.

Nhận xét. Đây là một dạng hệ phương trình đa thức khá khó, rõ ràng nếu ở phương trình thứ hai, người ta chia hai vế cho 2 thì khó có thể tự nhận biết giá trị này mà nhân vào rồi trừ từng vế như trên. Việc phát hiện ra giá trị 2 để nhân vào có thể dùng cách đặt tham số phụ rồi lựa chọn.

Bài 6. Giải hệ phương trình trên tập số thực
$$\begin{cases} x^4 + 5y = 6 \\ x^2y^2 + 5x = 6 \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển Đồng Nai)

Lời giải.

Trừ từng vế hai phương trình của hệ, ta được

$$x^4 - x^2y^2 + 5(y-x) = 0 \Leftrightarrow (x-y)[x^2(x+y)-5] = 0 \Leftrightarrow x = y \vee x^2(x+y) = 5$$

-Nếu $x = y$, từ phương trình thứ nhất ta có

$$x^4 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x + 3)(x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1, \text{ tương ứng với } y = -2 \vee y = 1.$$

Thử lại thấy thỏa, ta có hai nghiệm $(x, y) = (-2, -2), (1, 1)$.

-Nếu $x^2(x+y) = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{x^2} - x$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được

$$x^4 + 5\left(\frac{5}{x^2} - x\right) = 6 \Leftrightarrow x^6 - 5x^3 - 6x^2 + 25 = 0$$

Đồng thời, từ hệ đã cho ta cũng có $5x = 6 - x^2y^2 \leq 6 \Rightarrow x \leq \frac{6}{5}$.

Do đó $5x^3 + 4x^2 \leq 5 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{216+96}{25} = \frac{312}{25} < 25 \Rightarrow x^6 - 5x^3 - 6x^2 + 25 > 0$.

Suy ra trong trường hợp này, hệ vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là $(x, y) = (-2, -2), (1, 1)$.

Bài 7. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{3}{x^2 + y^2 - 1} + \frac{2y}{x} = 1 \\ x^2 + y^2 - \frac{2x}{y} = 4 \end{cases}$$

(Đề thi HSG Hà Tĩnh)

Lời giải.

Điều kiện: $xy \neq 0, x^2 + y^2 \neq 1$. Đặt $a = x^2 + y^2 - 1, b = \frac{x}{y}, ab \neq 0$.

Hệ đã cho trở thành
$$\begin{cases} \frac{3}{a} + \frac{2}{b} = 1 \\ a - 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2b+3} + \frac{2}{b} = 1 \\ a = 2b+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 2b - 3 = 0 \\ a = 2b+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1, a = 1 \\ b = 3, a = 9 \end{cases}$$

-Với $a = 1, b = -1$, ta có $x^2 + y^2 = 2, x = -y$, ta tìm được hai nghiệm là $(x, y) = (1, -1), (-1, 1)$.

-Với $a = 9, b = 3$, ta có $x^2 + y^2 = 10, x = 3y$, ta tìm được hai nghiệm là $(x, y) = (3, 1), (-3, -1)$.

Thử lại, ta đều thấy thỏa mãn.

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm phân biệt là $(x, y) = (1, -1), (-1, 1), (3, 1), (-3, -1)$.

Bài 8. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+6} + x^2 = 7 - \sqrt{x-1}$

(Đề thi chọn đội tuyển Lâm Đồng)

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$.

Ta có

$$\begin{aligned}
 & (\sqrt[3]{x+6}-2) + (x^2-4) + (\sqrt{x-1}-1) = 0 \\
 & \Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt[3]{(x+6)^2} + 2\sqrt[3]{x+6} + 4} + (x-2)(x+2) + \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} = 0 \\
 & \Leftrightarrow (x-2) \left[\frac{1}{\sqrt[3]{(x+6)^2} + 2\sqrt[3]{x+6} + 4} + x+2 + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} \right] = 0 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{(x+6)^2} + 2\sqrt[3]{x+6} + 4} + x+2 + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Dễ thấy phương trình thứ hai vô nghiệm vì vế trái luôn dương nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 2$.

Nhận xét. Cách đơn giản hơn dành cho bài này là chứng minh hàm đồng biến, tuy nhiên, cần chú ý xét $x \neq 1$ trước khi đạo hàm.

Bài 9. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{x-y-1} = 1 \\ y^2 + x + 2y\sqrt{x} - y^2x = 0 \end{cases}$$

(Đề thi HSG tỉnh Quảng Bình)

Lời giải.

Điều kiện $x, x-y-1 \geq 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x} &= \sqrt{x-y-1} + 1 \Leftrightarrow x = x-y-1 + 2\sqrt{x-y-1} + 1 \Leftrightarrow y = 2\sqrt{x-y-1} \\
 &\Leftrightarrow y^2 = 4(x-y-1) \Leftrightarrow (y+2)^2 = 4x \Leftrightarrow y+2 = 2\sqrt{x}
 \end{aligned}$$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$y^2 + x + 2y\sqrt{x} - y^2x = 0 \Leftrightarrow (y + \sqrt{x})^2 = xy^2 \Leftrightarrow y + \sqrt{x} = y\sqrt{x}$$

Ta có hệ mới là
$$\begin{cases} y+2=2\sqrt{x} \\ y+\sqrt{x}=y\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+2=2\sqrt{x} \\ 2y+(y+2)=y(y+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+2=2\sqrt{x} \\ y^2-y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=\frac{1}{4} \\ y=2 \\ x=4 \end{cases}$$

So sánh với điều kiện ban đầu, ta thấy cả hai nghiệm trên đều thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x, y) = (\frac{1}{4}, -1), (2, 4)$.

Bài 10.

1/ Giải bất phương trình $(x^2 - 4x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0$.

2/ Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} xy + y^2 + x = 7y \\ \frac{x^2}{y} + x = 12 \end{cases}$$

(Đề thi HSG Điện Biên)

Lời giải.

1/ Điều kiện $2x^2 - 3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{-1}{2} \vee x \geq 2$. Ta có

$$(x^2 - 4x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x \geq 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \vee x \leq 0 \\ x = \frac{-1}{2} \vee x = 2 \end{cases}$$

Kết hợp các điều kiện trên, ta có $x = 2 \vee x \leq \frac{-1}{2} \vee x \geq 4$.

Vậy bất phương trình trên có nghiệm là $x \in (-\infty, \frac{-1}{2}] \cup \{2\} \cup [4, +\infty)$.

2/ Điều kiện $y \neq 0$. Hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} x + y + \frac{x}{y} = 7 \\ (x + y)\frac{x}{y} = 12 \end{cases}$$

Đặt $u = x + y, v = \frac{x}{y}$, ta có hệ
$$\begin{cases} u + v = 7 \\ uv = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3, v = 4 \\ u = 4, v = 3 \end{cases}$$

-Với $u = 3, v = 4$, ta có $x + y = 4, \frac{x}{y} = 3 \Leftrightarrow x = 3, y = 1$, thỏa điều kiện.

-Với $u = 4, v = 3$, ta có $x + y = 3, \frac{x}{y} = 4 \Leftrightarrow x = \frac{12}{5}, y = \frac{3}{5}$, thỏa điều kiện.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là $(x, y) = (3, 1), (\frac{12}{5}, \frac{3}{5})$.

Bài 11. Giải hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x^6 + y^8 + z^{10} \leq 1 \\ x^{2007} + y^{2009} + z^{2011} \geq 1 \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển Bình Định)

Lời giải.

Từ bất phương trình thứ nhất của hệ, ta có $-1 \leq x, y, z \leq 1$.

Từ hai bất phương trình của hệ, ta có

$$x^{2007} + y^{2009} + z^{2011} \geq x^6 + y^8 + z^{10} \Leftrightarrow x^6(1 - x^{2001}) + y^8(1 - y^{2001}) + z^{10}(1 - z^{2001}) \leq 0$$

Từ điều kiện $-1 \leq x, y, z \leq 1$, ta dễ dàng thấy rằng $x^6(1 - x^{2001}), y^8(1 - y^{2001}), z^{10}(1 - z^{2001}) \geq 0$.

Do đó, phải có đẳng thức xảy ra, tức là

$$x^6(1 - x^{2001}) = y^8(1 - y^{2001}) = z^{10}(1 - z^{2001}) = 0 \Leftrightarrow x, y, z = 1 \vee x, y, z = 0.$$

Kết hợp với điều kiện $x^6 + y^8 + z^{10} \leq 1$, ta thấy hệ bất phương trình đã cho có các nghiệm là

$$(x, y, z) = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1).$$

Bài 12.

1/ Giải phương trình
$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3-x}} = x - \frac{1}{2}$$

2/ Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + \sqrt{x} = 2y \\ y^2 + \sqrt{y} = 2x \end{cases}$$

(Đề thi HSG tỉnh Bến Tre)

Lời giải.

1/ Điều kiện $x+1, 3-x \geq 0, x+1 \neq 3-x \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3, x \neq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}} - 1 = (x+1) - (3-x) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3-x}} = (\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x})(\sqrt{x+1} - \sqrt{3-x})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 0 \\ (\sqrt{x+1} - \sqrt{3-x})^2 = 1 \end{cases}$$

Dễ thấy phương trình thứ nhất vô nghiệm nên ta chỉ xét

$$(\sqrt{x+1} - \sqrt{3-x})^2 = 1 \Leftrightarrow (x+1) + (3-x) - 2\sqrt{(x+1)(3-x)} = 1 \Leftrightarrow 3 = 2\sqrt{(x+1)(3-x)}$$

$$\Leftrightarrow 9 = 4(x+1)(3-x) \Leftrightarrow 4x^2 - 8x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{2}$.

2/ Điều kiện $x, y \geq 0$. Dễ thấy nếu $x = 0$ thì $y = 0$ và ngược lại nên hệ có nghiệm $(x, y) = (0, 0)$.

Ta xét $x, y > 0$. Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + \sqrt{t}}{2}, t > 0$, ta thấy $f'(t) = t + \frac{1}{4\sqrt{t}} > 0, \forall t > 0$ nên đây là hàm đồng biến.

Hệ đã cho được viết lại là $\begin{cases} x = f(y) \\ y = f(x) \end{cases}$. Suy ra $x = y$, thay vào hệ đã cho, ta có

$$x^2 + \sqrt{x} = 2x \Leftrightarrow x\sqrt{x} + 1 = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Tương ứng với hai giá trị này, ta cũng có $\begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có ba nghiệm là $(x, y) = (0, 0), (1, 1), (\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2})$.

Nhận xét. Bài phương trình thứ nhất nếu không có biến đổi phù hợp mà đặt ẩn phụ thì lời giải sẽ khá dài dòng và rắc rối, chúng ta cần chú ý tận dụng những tính chất của căn thức, lượng liên hợp để khai thác đặc điểm riêng của bài toán.

Bài 13.

1/ Giải phương trình $x^2 - 4x + 3 = \sqrt{x+5}$.

2/ Giải phương trình $x^3 + x^2 - 3x - 1 = 2\sqrt{x+2}$ trên $[-2, 2]$

(Đề thi HSG tỉnh Long An)

Lời giải.

1/ Điều kiện $x \geq -5$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x^2 - 4x + 3)^2 = x + 5 \Leftrightarrow (x - 4)(x^3 - 4x^2 + 6x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x^3 - 4x^2 + 6x - 1 = 0 \end{cases}$$

Ta xét phương trình $x^3 - 4x^2 + 6x - 1 = 0$ (*)

Hàm số $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 1$ có $f'(x) = 3x^2 - 8x + 6 > 0$ nên là đồng biến; hơn nữa, $f(0).f(1) = (-1).2 < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có đúng một nghiệm thuộc $(0, 1)$.

Ta sẽ giải phương trình (*) bằng phương pháp Cardano.

Đặt $x = y + \frac{4}{3}$, ta có (*) $\Leftrightarrow y^3 + \frac{2}{3}y + \frac{61}{27} = 0$. Đặt $y = u + v$, ta có

$$(u^3 + v^3 + \frac{61}{27}) + (3uv + \frac{2}{3})(u + v) = 0.$$

Chọn u và v sao cho
$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -\frac{61}{27} \\ uv = -\frac{2}{9} \end{cases}.$$

Giải hệ phương trình này, ta chọn nghiệm $u = \sqrt[3]{\frac{1}{54}(-61 + 3\sqrt{417})}$, $v = \frac{2}{9u}$.

Từ đó, ta tìm được nghiệm của phương trình (*) là

$$x = x_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{54}(-61 + 3\sqrt{417})} - \frac{2}{9\sqrt[3]{\frac{1}{54}(-61 + 3\sqrt{417})}} + \frac{4}{3} \approx 0.189464$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 4, x = x_0$.

2/ Điều kiện $x \geq -2$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x^3 + x^2 - 3x - 1)^2 = 4(x + 2) \Leftrightarrow (x + 1)(x^5 + x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 9x - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^5 + x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 9x - 7 = 0 \end{cases}$$

Phương trình $x^5 + x^4 - 6x^3 - 2x^2 + 9x - 7 = 0$ có đúng một nghiệm thuộc $[-2, 2]$ và nó có giá trị gần đúng là $x = x_0 \approx 1.916086228$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là $x = -1, x = x_0$.

Nhận xét. Rõ ràng phương trình bậc ba ở trên phải giải trực tiếp bằng công thức tổng quát, điều này ít khi xuất hiện ở các kì thi HSG. Đối với phương trình thứ hai, việc xét $x \in [-2, 2]$ nêu trong đề bài có thể gợi ý dùng lượng giác; tuy nhiên, cách đặt $x = 2 \cos \alpha$ chưa có kết quả, mong các bạn tìm hiểu thêm. Một bài tương tự xuất hiện trong kì thi HSG ĐBSCL như sau

Giải phương trình $32x^5 + 32x^4 - 16x^3 - 16x^2 + 2x + 1 = 0$.

Phương trình này được giải bằng cách đặt ẩn phụ $y = 2x$ rồi bình phương lên, nhân vào hai vế cho $y - 2$ để đưa về phương trình quen thuộc $y^3 - 3y = \sqrt{y + 2}$.

Bài toán như thế này khá đánh đố và phức tạp!

Bài 14. Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{x}}{y} + 2 \\ y(\sqrt{x^2 + 1} - 1) = \sqrt{3x^2 + 3} \end{cases}$$

(Đề chọn đội tuyển trường Chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định).

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x > 0, y \neq 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{x}}{y} + 2 \Leftrightarrow y\sqrt{x} + y^2 = 2x\sqrt{x} + 2xy \Leftrightarrow y^2 + y(\sqrt{x} - 2x) - 2x\sqrt{x} = 0$$

Xem đây là phương trình bậc hai theo biến y , ta có

$$\Delta_x = (\sqrt{x} - 2x)^2 + 8x\sqrt{x} = x + 4x\sqrt{x} + 4x^2 = (\sqrt{x} + 2x)^2 > 0.$$

Do đó, phương trình này có hai nghiệm là

$$y_1 = \frac{(2x - \sqrt{x}) - (\sqrt{x} + 2x)}{2} = -\sqrt{x}, y_2 = \frac{(2x - \sqrt{x}) + (\sqrt{x} + 2x)}{2} = 2x, .$$

Xét hai trường hợp

-Nếu $y = -\sqrt{x}$, thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được:

$$-\sqrt{x}(\sqrt{x^2 + 1} - 1) = \sqrt{3x^2 + 3}.$$

Dễ thấy: $-\sqrt{x}(\sqrt{x^2 + 1} - 1) < 0 < \sqrt{3x^2 + 3}$ nên phương trình này vô nghiệm.

-Nếu $y = 2x$, thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được:

$$2x(\sqrt{x^2 + 1} - 1) = \sqrt{3x^2 + 3} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} \cdot (2x - \sqrt{3}) = 2x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = \frac{2x}{2x - \sqrt{3}} \quad (*)$$

(dễ thấy $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ không thỏa mãn đẳng thức nên chỉ xét $x \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$ và phép biến đổi trên là phù

hợp). Xét hai hàm số: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, x > 0$ và $g(x) = \frac{2x}{2x - \sqrt{3}}, x > 0$.

Ta có: $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0$ nên là hàm đồng biến, $g'(x) = \frac{-2\sqrt{3}}{(2x - \sqrt{3})^2} < 0$ nên là hàm nghịch biến.

Suy ra phương trình (*) có không quá một nghiệm.

Nhắm thấy $x = \sqrt{3}$ thỏa mãn (*) nên đây cũng chính là nghiệm duy nhất của (*).

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $(x, y) = (\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$.

Nhận xét. Quan hệ của x và y được che giấu ngay trong phương trình đầu tiên, nếu nhận thấy điều đó thì các bước tiếp theo sẽ rất dễ nhận biết. Bài này tính toán tuy rườm rà nhưng hướng giải rất rõ ràng nên không quá khó.

Bài 15. Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} 2x^2y + 3xy = 4x^2 + 9y \\ 7y + 6 = 2x^2 + 9x \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển Nha Trang, Khánh Hòa)

Lời giải.

Từ phương trình thứ nhất, ta có $y = \frac{4x^2}{2x^2 + 3x - 9}$, từ phương trình thứ hai, ta có $y = \frac{2x^2 + 9x - 6}{7}$.

Suy ra

$$\frac{4x^2}{2x^2 + 3x - 9} = \frac{2x^2 + 9x - 6}{7} \Leftrightarrow 28x^2 = (2x^2 + 9x - 6)(2x^2 + 3x - 9)$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)(2x - 1)(2x^2 + 9x - 27) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = \frac{1}{2} \vee x = \frac{-9 \pm 3\sqrt{33}}{4}$$

-Nếu $x = -2$, ta có $y = \frac{2x^2 + 9x - 6}{7} = \frac{-16}{7}$; nếu $x = \frac{1}{2}$, ta có $y = \frac{2x^2 + 9x - 6}{7} = \frac{-1}{7}$.

-Nếu $x = \frac{-9 \pm 3\sqrt{33}}{4}$ với $2x^2 + 9x = 27$ thì $y = \frac{2x^2 + 9x - 6}{7} = 3$.

Vậy hệ phương trình đã cho có bốn nghiệm là $(x, y) = (-2, \frac{-16}{7}), (\frac{1}{2}, \frac{-1}{7}), (\frac{-9 \pm 3\sqrt{33}}{4}, 3)$.

Nhận xét. Bài này có thể còn nhiều biến đổi đơn giản hơn nhưng rõ ràng cách rút y ra rồi thay vào một phương trình như trên là tự nhiên hơn cả.

Bài 16.

1/ Giải phương trình $x + 2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2 + 8x - 7} + 1$

2/ Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2\sqrt{2x+y} = 3 - 2x - y \\ \sqrt[3]{x+6} + \sqrt{1-y} = 4 \end{cases}$$

(Đề thi HSG tỉnh Vĩnh Phúc)

Lời giải.

1/ Điều kiện $1 \leq x \leq 7$. Đặt $a = \sqrt{7-x}, b = \sqrt{x+1}, a, b \geq 0 \Rightarrow ab = \sqrt{-x^2 + 8x - 7}$.

Phương trình đã cho trở thành $b^2 + 2a = 2b + ab \Leftrightarrow (a-b)(b-2) = 0 \Leftrightarrow a = b \vee b = 2$.

-Nếu $a = b$ thì $\sqrt{7-x} = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow 7-x = x+1 \Leftrightarrow x = 3$, thỏa điều kiện đề bài.

-Nếu $b = 2$ thì $\sqrt{x+1} = 2 \Leftrightarrow x = 3$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 3$.

2/ Điều kiện $2x + y \geq 0, y \leq 1$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$(2x + y) + 2\sqrt{2x + y} - 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x + y} = 1 \vee \sqrt{2x + y} = -3 \Leftrightarrow 2x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - 2x.$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được $\sqrt[3]{x+6} + \sqrt{2x} = 4$.

Dễ thấy vế trái tăng theo biến x nên phương trình trên có không quá một nghiệm. Ta thấy $x = 2$ thỏa mãn, suy ra $x = 2, y = -3$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $(x, y) = (2, -3)$.

Bài 17. Giải phương trình sau $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = (x^3 + x)\sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$

(Đề thi HSG tỉnh Hà Tĩnh)

Lời giải.

Điều kiện $x \in (-\infty, -1] \cup (0, 1]$.

Nếu $x < -1$ thì $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = (x^2 + x)^2 + (x-1)^2 > 0, x^3 + x = x(x^2 + 1) < 0$ nên phương trình trên không có nghiệm thỏa $x < -1$.

Đồng thời $x = 1$ không là nghiệm của phương trình nên ta chỉ xét $x \in (0, 1)$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x^2 + 1) - 2x(1 - x^2) = (x^2 + 1)\sqrt{x(1 - x^2)} \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x(1 - x^2)}} - \frac{2\sqrt{x(1 - x^2)}}{x^2 + 1} = 1$$

Đặt $t = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x(1 - x^2)}} > 0$, phương trình trên trở thành $t - \frac{2}{t} = 1 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ (do $t > 0$).

Khi đó

$$\frac{x^2+1}{\sqrt{x(1-x^2)}} = 2 \Leftrightarrow (x^2+1)^2 = 4x(1-x^2) \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 - 4x + 4x^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$$

So sánh với điều kiện đã nêu, ta thấy phương trình trên có nghiệm duy nhất là $x = -1 + \sqrt{2}$.

Bài 18. Giải phương trình $2\sin 2x - 3\sqrt{2}\sin x + \sqrt{2}\cos x - 5 = 0$.

(Đề thi chọn đội tuyển trường THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi)

Lời giải.

Đặt $a = \sin x, b = \cos x \Rightarrow -1 \leq a, b \leq 1$. Từ phương trình đã cho, ta có hệ sau:

$$\begin{cases} 4ab - 3\sqrt{2}a + \sqrt{2}b - 5 = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

Ta có:

$$4ab - 3\sqrt{2}a + \sqrt{2}b - 5 = 0 \Leftrightarrow -4ab + 3\sqrt{2}a - \sqrt{2}b + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (-4ab + 2\sqrt{2}a - 2\sqrt{2}b + 3) + (\sqrt{2}a + \sqrt{2}b + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow [2(a-b)^2 - 2\sqrt{2}(a-b) + 1] + \sqrt{2}(a+b+\sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}a - \sqrt{2}b - 1)^2 + \sqrt{2}(a-b+\sqrt{2}) = 0$$

Mặt khác: $a^2 + b^2 = 1$ nên $|a+b| \leq \sqrt{2(a^2+b^2)} = \sqrt{2} \Rightarrow a+b+\sqrt{2} \geq 0$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \frac{-\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Do đó, từ (*), suy ra: } \begin{cases} (\sqrt{2}a - \sqrt{2}b - 1)^2 = 0 \\ \sqrt{2}(a+b+\sqrt{2}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}a - \sqrt{2}b - 1 = 0 \\ a = b = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Dễ thấy hệ này vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Nhận xét. Đây là dạng phương trình lượng giác giải bằng cách đánh giá quen thuộc. Ngoài cách đặt ẩn phụ đưa về đại số hoàn toàn như trên, ta có thể biến đổi trực tiếp trên phương trình ban đầu, tuy nhiên điều đó dễ làm chúng ta lạc sang các hướng thuần túy lượng giác hơn và việc giải bài toán này gặp nhiều khó khăn hơn.

Bài này chính là đề thi Olympic 30-4 năm 2000, lớp 10 do trường Lê Hồng Phong TP.HCM đề nghị. Lời giải chính thức cũng giống như ở trên nhưng đề nguyên $a = \sin x, b = \cos x$.

Bài 19.

1/ Giải phương trình $x + \sqrt{4 - x^2} = 2 + x\sqrt{4 - x^2}$.

2/ Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2y(x^2 - y^2) = 3x \\ x(x^2 + y^2) = 10y \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển THPT Chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa)

Lời giải.

1/ Điều kiện $-2 \leq x \leq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(x - 2) = (x - 1)\sqrt{4 - x^2} \Rightarrow (x - 2)^2 = (x - 1)^2(4 - x^2) \Leftrightarrow x(x - 2)(x^2 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = \pm\sqrt{2}$$

Thử lại ta thấy thỏa.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm là $x = 0, x = 2, x = \pm\sqrt{2}$.

2/ Ta thấy nếu $x = 0$ thì $y = 0$ và ngược lại nên hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x, y) = (0, 0)$.

Xét trường hợp $xy \neq 0$.

Chia từng vế phương trình thứ nhất cho phương trình thứ hai, ta được

$$\frac{2y(x^2 - y^2)}{x(x^2 + y^2)} = \frac{3x}{10y} \Leftrightarrow 20y^2(x^2 - y^2) = 3x^2(x^2 + y^2) \Leftrightarrow 3x^4 - 17x^2y^2 + 20y^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4y^2)(3x^2 - 5y^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4y^2, x^2 = \frac{5}{3}y^2$$

-Nếu $x^2 = 4y^2$, hệ đã cho trở thành
$$\begin{cases} 2y \cdot 3y^2 = 3x \\ x \cdot 5y^2 = 10y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^3 = x \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^3 = x \\ 2y^4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

-Nếu $x^2 = \frac{5}{3}y^2$, hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} 2y \cdot \frac{2}{3}y^2 = 3x \\ x \cdot \frac{8}{3}y^2 = 10y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^3 = 9x \\ 4xy = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^3 = 9x \\ 16y^4 = 135 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{15}{2\sqrt[4]{135}} \\ y = \pm \frac{\sqrt[4]{135}}{2} \end{cases}.$$

Vậy hệ đã cho có 5 nghiệm là $(x, y) = (0, 0), (2, 1), (-2, -1), (\frac{15}{2\sqrt[4]{135}}, \frac{\sqrt[4]{135}}{2}), (-\frac{15}{2\sqrt[4]{135}}, -\frac{\sqrt[4]{135}}{2})$.

Bài 20. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+6} + x^2 = 7 - \sqrt{x-1}$.

(Đề thi HSG tỉnh Lâm Đồng)

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$.

Dễ thấy $x = 1$ không là nghiệm của phương trình nên ta chỉ xét $x > 1$.

Ta có $\sqrt[3]{x+6} + x^2 = 7 - \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+6} + x^2 + \sqrt{x-1} = 7$ (*)

Xét hàm số $f(t) = \sqrt[3]{t+6} + t^2 + \sqrt{t-1}, t > 1 \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(t+6)^2}} + 2t + \frac{1}{2\sqrt{t-1}} > 0, \forall t > 1$. Do đó

hàm này đồng biến. Từ đó suy ra phương trình (*) ở trên có không quá một nghiệm; mặt khác $f(2) = 7$ nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 2$.

Bài 21. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{5(x+y)}{x+y+6xy} + \frac{6(x+z)}{x+z+5xz} = 4 \\ \frac{6(z+y)}{z+y+4zy} + \frac{4(x+y)}{x+y+6xy} = 5 \\ \frac{4(x+z)}{x+z+5xz} + \frac{5(y+z)}{y+z+4yz} = 6 \end{cases}$$

(Đề chọn đội tuyển trường PTNK, TPHCM)

Lời giải.

Đặt $a = \frac{x+y}{x+y+6xy}, b = \frac{y+z}{y+z+4yz}, c = \frac{z+x}{z+x+5zx}$. Hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} 5a+6c=4 \\ 6b+4a=5 \\ 4c+5b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\frac{4-5a}{6} \\ 4a+6b=5 \\ 5b+4\left(\frac{4-5a}{6}\right)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{8} \\ b=\frac{3}{4} \\ c=\frac{9}{16} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} \frac{x+y}{x+y+6xy}=\frac{1}{8} \\ \frac{y+z}{y+z+4yz}=\frac{3}{4} \\ \frac{z+x}{z+x+5zx}=\frac{9}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7(x+y)=6xy \\ y+z=12yz \\ 7(z+x)=45zx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{6}{7} \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=12 \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{45}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}=\frac{-33}{14} \\ \frac{1}{y}=\frac{45}{14} \\ \frac{1}{z}=\frac{123}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-14}{33} \\ y=\frac{14}{45} \\ z=\frac{14}{124} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(x, y, z) = \left(\frac{-14}{33}, \frac{14}{45}, \frac{14}{123}\right)$.

Nhận xét. Bài này có hình thức khá phức tạp và các hệ số xem ra rất khác nhau; tuy nhiên, nếu quan sát kĩ, chúng ta sẽ dễ dàng tìm ra các ẩn phụ cần thiết để làm đơn giản hóa bài toán.

Bài 22.

1/ Giải phương trình $\sqrt{x} + 2\sqrt{y-1} + 3\sqrt{z-2} = \frac{1}{2}(x+y+z+11)$

2/ Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 2x = \frac{121}{9} - 27^{\frac{x}{2}} \\ x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

(Đề thi HSG tỉnh Quảng Nam)

Lời giải.

1/ Điều kiện $x \geq 0, y \geq 1, z \geq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{x} + 4\sqrt{y-1} + 6\sqrt{z-2} = x + y + z + 11$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 + (\sqrt{y-1}-2)^2 + (\sqrt{z-2}-3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-1 = \sqrt{y-1}-2 = \sqrt{z-2}-3 = 0 \Leftrightarrow x=1, y=5, z=11$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $(x, y, z) = (1, 5, 11)$.

2/ Phương trình thứ hai của hệ tương đương với $y^2 + (x-4)y + x^2 - 3x + 4 = 0$.

Đây là phương trình bậc hai theo biến y nên cần có điều kiện

$$\Delta = (x-4)^2 - 4(x^2 - 3x + 4) = -3x^2 + 4x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{4}{3}.$$

$$\text{Do đó } x^2 + 2x + 27^{\frac{x}{2}} \leq \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{4}{3} + 27^{\frac{2}{3}} = \frac{16}{9} + \frac{24}{9} + 9 = \frac{121}{9}$$

Từ bất đẳng thức trên và phương trình thứ nhất của hệ, ta suy ra $x = \frac{4}{3}$.

$$\text{Do đó } y^2 + \left(\frac{4}{3} - 4\right)y + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right) + 4 = 0 \Leftrightarrow y^2 - \frac{8}{3}y + \frac{16}{9} = 0 \Leftrightarrow \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $x = y = \frac{4}{3}$.

Bài 23.

1/ Tìm tất cả các giá trị của a, b để phương trình $\frac{x^2 - 2ax + b}{bx^2 - 2ax + 1} = m$ có hai nghiệm phân biệt với mọi tham số m .

$$2/ \text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} y + xy^2 = -6x^2 \\ 1 + x^3y^3 = 19x^3 \end{cases}$$

(Đề thi HSG vòng tỉnh Bình Phước)

Lời giải.

1/ Trước hết, ta sẽ tìm nghiệm chung, nếu có, của hai phương trình bậc hai sau:

$x^2 - 2ax + b = 0$ và $bx^2 - 2ax + 1 = 0$. Giả sử x_0 là nghiệm chung đó, ta có:

$x_0^2 - 2ax_0 + b = 0$ và $bx_0^2 - 2ax_0 + 1 = 0$. Trừ từng vế hai phương trình này, ta được:

$$(1-b)(x_0^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow b = 1 \vee x_0 = \pm 1.$$

- Nếu $b = 1$ thì phương trình đã cho trở thành $\frac{x^2 - 2ax + 1}{x^2 - 2ax + 1} = m \Leftrightarrow 1 = m, x^2 - 2ax + 1 \neq 0$. Dễ thấy

nếu $m \neq 1$ thì phương trình này vô nghiệm, nếu $m = 1$ thì phương trình này có vô số nghiệm, không thỏa mãn đề bài.

-Nếu $b \neq 1$ thì $x_0 = \pm 1$, tương ứng với $1 - 2a + b = 0$ hoặc $1 + 2a + b = 0$.

Do đó, khi $1 - 2a + b = 0$ hoặc $1 + 2a + b = 0$ thì tương ứng hai phương trình đã cho có nghiệm chung là $x_0 = 1$ và $x_0 = -1$.

Phương trình ban đầu tương đương với $\frac{x^2 - 2ax + b}{bx^2 - 2ax + 1} = m \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2ax + b - m(bx^2 - 2ax + 1)}{bx^2 - 2ax + 1} = 0$

hay $(1 - bm)x^2 - 2(a - am)x + b - m = 0$ (*) và $bx^2 - 2ax + 1 = 0$.

Ta thấy rằng phương trình (*) có không quá hai nghiệm nên muốn phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt với mọi m thì hai phương trình $x^2 - 2ax + b = 0$ và $bx^2 - 2ax + 1 = 0$ không có nghiệm chung, đồng thời phương trình (*) phải có đúng hai nghiệm phân biệt, tức là

$$\begin{cases} 1 - 2a + b \neq 0, 1 + 2a + b \neq 0 \\ 1 - bm \neq 0, \forall m \\ (a - am)^2 - (1 - bm)(b - m) > 0, \forall m \end{cases}$$

Từ điều kiện thứ hai, ta thấy $b = 0$, khi đó, hệ điều kiện trên trở thành

$$\begin{aligned} \begin{cases} 1 - 2a \neq 0, 1 + 2a \neq 0 \\ (a - am)^2 + m > 0, \forall m \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq \pm \frac{1}{2} \\ a^2 m^2 - (2a^2 - 1)m + a^2 > 0, \forall m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq \pm \frac{1}{2} \\ (2a^2 - 1)^2 - 4a^4 < 0, a \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq \pm \frac{1}{2}, a \neq 0 \\ -4a^2 + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > \frac{1}{2} \vee a < -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vậy các giá trị a, b thỏa mãn đề bài là $a > \frac{1}{2} \vee a < -\frac{1}{2}$ và $b = 0$.

2/ Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y + xy^2 = -6x^2 \\ 1 + x^3y^3 = 19x^3 \end{cases}$$

Ta thấy $y = 0$ không là nghiệm của hệ phương trình nên ta chỉ xét $y \neq 0$, ta có biến đổi sau

$$\begin{cases} \frac{1}{y} + x = -6\left(\frac{x}{y}\right)^2 \\ \frac{1}{y^3} + x^3 = 19\left(\frac{x}{y}\right)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} + x = -6\left(\frac{x}{y}\right)^2 \\ \left(x + \frac{1}{y}\right)^3 - \frac{3x}{y}\left(x + \frac{1}{y}\right) = 19\left(\frac{x}{y}\right)^3 \end{cases}$$

Thay $\frac{1}{y} + x = -6\left(\frac{x}{y}\right)^2$ vào phương trình thứ hai, ta được

$$-216\left(\frac{x}{y}\right)^6 + 18\left(\frac{x}{y}\right)^3 = 19\left(\frac{x}{y}\right)^3 \Leftrightarrow -216\left(\frac{x}{y}\right)^6 = \left(\frac{x}{y}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = 0 \vee \frac{x}{y} = \frac{-1}{6}.$$

-Nếu $\frac{x}{y} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, thay vào hệ đã cho, ta thấy không thỏa mãn.

-Nếu $y = -6x$, thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được

$$-6x + 36x^3 = -6x^2 \Leftrightarrow 6x^3 + x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(3x-1)(2x+1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = -\frac{1}{2}.$$

Với $x = \frac{1}{3}$, ta có $y = -6x = -2$; với $x = -\frac{1}{2}$, ta có $y = -6x = 3$.

Thử lại đều thấy thỏa.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm phân biệt là $(x, y) = \left(\frac{1}{3}, -2\right), \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$.

Nhận xét. Ở bài 1, bước tìm nghiệm chung của hai phương trình để làm đơn giản hóa việc xét điều kiện của nghiệm xem có thỏa mãn phương trình hay không, vì rõ ràng

$$\frac{f(x)}{g(x)} = m \Leftrightarrow \frac{f(x) - mg(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - mg(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases} \text{ nên nếu } x \text{ là nghiệm của phương trình đã}$$

cho mà lại không thỏa mãn điều kiện xác định của mẫu thì nó là nghiệm chung của $f(x), g(x)$ (ở đây là xét với mọi m nên có cả những giá trị m khác 0). Bài 2 xuất hiện khá nhiều trong các tài liệu luyện thi ĐH và việc tìm ra cách chia như thế cũng khá là mò mẫm, chúng ta có thể rút y từ phương trình ở dưới để thay lên rồi đánh giá phương trình một ẩn x thu được.

Bài 24.

1/ Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2010^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 2010^3 \end{cases}$$

2/ Giải phương trình: $3^{2x^3-x+2} - 3^{x^3+2x} + x^3 - 3x + 2 = 0$

(Đề thi chọn đội tuyển Ninh Bình)

Lời giải.

1/ Từ phương trình thứ nhất của hệ, ta có $|x|, |y|, |z| \leq 2010$.

Suy ra $x^3 + y^3 + z^3 \leq |x^3| + |y^3| + |z^3| \leq 2010(x^2 + y^2 + z^2) = 2010^3$.

Từ phương trình thứ hai suy ra đẳng thức phải xảy ra, tức là

$$\begin{cases} x^2(2010-x)=0 \\ y^2(2010-y)=0 \\ z^2(2010-z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \vee x=2010 \\ y=0 \vee y=2010 \\ z=0 \vee z=2010 \end{cases}$$

Kết hợp với phương trình thứ nhất, ta thấy hệ đã cho có ba nghiệm phân biệt là

$$(x, y, z) = (2010, 0, 0), (0, 2010, 0), (0, 0, 2010).$$

2/ Phương trình đã cho tương đương với

$$3^{2x^3-x+2} + 2x^3 - x + 2 = 3^{x^3+2x} + x^3 + 2x$$

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t, t \in \mathbb{R}$, ta có $f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0, \forall t$ nên đây là hàm đồng biến.

Phương trình trên chính là
$$\begin{aligned} f(2x^3 - x + 2) = f(x^3 + 2x) &\Leftrightarrow 2x^3 - x + 2 = x^3 + 2x \\ &\Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -2, x = 1$.

Bài 25.

1/ Giải bất phương trình sau
$$\begin{cases} 2x - y + \sqrt{x-1} \geq \sqrt{2(x-1) + 2(2x-y)^2} \\ y^2 + 4x\sqrt{x-1} - 17 = 0 \end{cases}$$

2/ Với n là số nguyên dương, giải phương trình
$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 8x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} = 0.$$

(Đề thi HSG tỉnh Khánh Hòa)

Lời giải.

1/ Điều kiện $x \geq 1$. Bình phương hai vế của bất phương trình thứ nhất của hệ, ta có

$$\begin{aligned} (2x-y)^2 + x-1 + 2(2x-y)\sqrt{x-1} &\geq 2(x-1) + 2(2x-y)^2 \\ \Leftrightarrow (2x-y)^2 + x-1 - 2(2x-y)\sqrt{x-1} &\leq 0 \Leftrightarrow (2x-y-\sqrt{x-1})^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow 2x-y-\sqrt{x-1} &= 0 \Leftrightarrow y = 2x-\sqrt{x-1} \end{aligned}$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$(2x - \sqrt{x-1})^2 + 4x\sqrt{x-1} - 17 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + (x-1) - 4x\sqrt{x-1} + 4x\sqrt{x-1} - 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{-9}{4}$$

Ta thấy chỉ có $x = 2$ là thỏa mãn, khi đó, tương ứng ta có $y = 3$.

Vậy hệ bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(x, y) = (2, 3)$.

2/ Điều kiện $2^i x \neq k2\pi, i = 1, 2, 3, \dots, n; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq k \frac{\pi}{2^i}, i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Trước tiên, ta sẽ rút gọn về trái của phương trình đã cho.

Ta có biến đổi sau $\cot a - \cot 2a = \frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\cos 2a}{\sin 2a} = \frac{2\cos^2 a - \cos 2a}{\sin 2a} = \frac{1}{\sin 2a}$.

Do đó

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 8x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sin 2^i x} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (\cot 2^{i-1} x - \cot 2^i x) = 0 \Leftrightarrow \cot 2^n x = \cot x$$

$$\Leftrightarrow 2^n x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2^n - 1}, k \in \mathbb{Z}$$

Dễ thấy nghiệm này thỏa mãn điều kiện ban đầu.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{k\pi}{2^n - 1}, k \in \mathbb{Z}$.

Bài 26.

1/ Giải phương trình sau $\frac{\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x - 5 \sin x + (2 - \sqrt{3}) \cos x + 3 + \sqrt{3}}{2 \cos x + \sqrt{3}} = 1$.

2/ Giải phương trình $\log_3 \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 8x + 5$

(Đề thi HSG tỉnh Thái Bình)

Lời giải.

1/ Điều kiện $\cos x \neq \frac{-\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \neq \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x - 5 \sin x + (2 - \sqrt{3}) \cos x + 3 + \sqrt{3} = 2 \cos x + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x - 5 \sin x - \sqrt{3} \cos x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3} \sin x \cdot \cos x - 1 + 2 \sin^2 x - 5 \sin x - \sqrt{3} \cos x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x + \sin x (2\sqrt{3} \cos x - 5) - \sqrt{3} \cos x + 2 = 0$$

Đặt $t = \sin x, |t| \leq 1$. Ta có $\Leftrightarrow 2t^2 + t(2\sqrt{3} \cos x - 5) - \sqrt{3} \cos x + 2 = 0$ (*)

Đây là phương trình bậc hai biến t có

$$\Delta = (2\sqrt{3} \cos x - 5)^2 - 8(-\sqrt{3} \cos x + 2) = 12 \cos^2 x - 12\sqrt{3} \cos x + 9 = (2\sqrt{3} \cos x - 3)^2$$

Do đó, phương trình (*) có hai nghiệm là

$$t = \frac{-(2\sqrt{3} \cos x - 5) + (2\sqrt{3} \cos x - 3)}{4} = \frac{1}{2} \vee t = \frac{-(2\sqrt{3} \cos x - 5) - (2\sqrt{3} \cos x - 3)}{4} = -\sqrt{3} \cos x + 2$$

-Nếu $t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ (thỏa mãn).

-Nếu $t = -\sqrt{3} \cos x + 2 \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{3}) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình đã cho có ba họ nghiệm là $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2/ Điều kiện $2x - 1 > 0, x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}, x \neq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\log_3 \frac{2x-1}{3(x-1)^2} = 3x^2 - 8x + 4 \Leftrightarrow \log_3 (2x-1) - \log_3 3(x-1)^2 = 3(x-1)^2 - (2x-1)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (2x-1) + (2x-1) = \log_3 3(x-1)^2 + 3(x-1)^2$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t, t > 0$, ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$ nên đây là hàm đồng biến.

Phương trình trên chính là

$$f(2x-1) = f(3(x-1)^2) \Leftrightarrow 2x-1 = 3(x-1)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \vee x = 2.$$

Ta thấy hai nghiệm này đều thỏa mãn nên phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \frac{2}{3}, x = 2$.

Nhận xét. Ở bài phương trình lượng giác, đến lúc rút gọn được thành một phương trình chỉ chứa $\sin x, \cos x$; ta thường dùng cách đặt ẩn phụ như trên để đại số hóa việc giải bài toán, không phải dễ dàng để có thể tìm ra cách phân tích nhân tử như trên, nhất là những bài toán dài dòng hơn. Nếu đặt $t = \sin x$ không thành công, ta hoàn toàn có thể chuyển sang $t = \cos x$ để thử vì chẳng hạn, như bài toán ở trên, nếu đặt $t = \cos x$ thì lời giải sẽ không còn dễ dàng nữa.

Trong đề thi ĐH khối B năm 2010 cũng có một bài tương tự, giải phương trình sau

$\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x - \cos x + 1 = 0$. Bằng việc áp dụng công thức nhân đôi để đưa phương trình về dạng $f(\sin x, \cos x) = 0$, ta tiến hành đặt ẩn phụ $t = \sin x$ để phân tích thành nhân tử, lời giải khá rõ ràng và tự nhiên.

Các bạn thử giải thêm bài toán sau

$$4\sin^3 x + \sin x \cdot \cos x(7\sin x + 3\cos x) + (\sin 2x + \cos 2x) - 5(\sin x + \cos x) + 2\cos^2 x = 0.$$

Bài 27.

$$1/ \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^2 + 1 + y^2 + xy = y \\ x + y - 2 = \frac{y}{1+x^2} \end{cases}.$$

$$2/ \text{ Giải phương trình lượng giác } \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{\tan x + \cot 2x}} = \sqrt{2} + 2\sin 2x$$

(Đề thi HSG tỉnh Phú Thọ)

Lời giải.

1/ Ta thấy hệ phương trình này không có nghiệm thỏa $y = 0$ nên ta chỉ xét $y \neq 0$, khi đó, phương trình thứ nhất của hệ tương đương với $\frac{x^2 + 1}{y} + x + y = 1$.

Đặt $u = \frac{x^2+1}{y}$, $v = x+y$. Ta có hệ

$$\begin{cases} a+b=4 \\ b-2=\frac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ 2-a=\frac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ 2a-a^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ (a-1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ a=1 \end{cases}$$

Ta được
$$\begin{cases} \frac{x^2+1}{y}=1 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=3-x \\ y=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2=0 \\ y=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ x=-2 \\ y=5 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x, y) = (1, 2), (-2, 5)$.

2/ Điều kiện

$$\cos x \neq 0, \sin 2x \neq 0, \tan x + \cot 2x > 0 \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos x \neq 0, \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} > 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cdot \cos x \neq 0, \frac{2\sin^2 x + 1 - 2\sin^2 x}{\sin 2x} > 0 \Leftrightarrow \sin x \cos x > 0$$

$$\Leftrightarrow x \in (k2\pi, \frac{\pi}{2} + k2\pi) \cup (-\pi + k2\pi, -\frac{\pi}{2} + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$$

Ta biến đổi phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{\frac{1}{\sin 2x}}} = 1 + \sqrt{2} \sin 2x \Leftrightarrow (\sqrt{2}+1)\sqrt{\sin 2x} = 1 + \sqrt{2} \sin 2x$$

Đặt $t = \sqrt{\sin 2x}$, $0 < t \leq 1$. Phương trình trên chính là

$$(\sqrt{2}+1)t = 1 + \sqrt{2}t^2 \Leftrightarrow (t-1)(\sqrt{2}t-1) = 0 \Leftrightarrow t=1 \vee t = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (thỏa điều kiện).}$$

-Nếu $t=1 \Leftrightarrow \sin 2x=1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

-Nếu $t = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

So sánh với điều kiện ban đầu, ta thấy phương trình đã cho có ba họ nghiệm là

$$x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, x = \frac{\pi}{12} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Bài 28. Giải phương trình: $24x^2 - 60x + 36 - \frac{1}{\sqrt{5x-7}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0$

(Đề thi HSG tỉnh Quảng Ninh)

Lời giải.

Điều kiện: $x > \frac{7}{5}$. Xét hàm số $f(t) = t^2 - \frac{1}{\sqrt{t-1}}, t > 1$. Ta có:

$$f'(t) = 2t + \frac{1}{2(t-1)\sqrt{t-1}} > 0, \forall t > 1 \text{ nên hàm này đồng biến.}$$

Do $x > \frac{7}{5} > 1$ và $5x - 6 > 5 \cdot \frac{7}{5} - 6 = 1$ nên phương trình đã cho tương đương với

$$(5x-6)^2 - \frac{1}{\sqrt{5x-7}} = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow f(5x-6) = f(x) \Leftrightarrow 5x-6 = x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Thử lại ta thấy thỏa điều kiện đề bài.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = \frac{3}{2}$.

Bài 29. Giải phương trình $\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 2} + \sqrt{-3x^3 + x^2 + 2x - 1} = 2x^2 + 2x + 2$

(Đề thi chọn đội tuyển trường THPT Chuyên ĐHSP Hà Nội)

Lời giải.

Điều kiện xác định
$$\begin{cases} 3x^3 + 2x^2 + 2 \geq 0 \\ -3x^3 + x^2 + 2x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Theo bất đẳng thức AM – GM thì

$$\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 2} = 1 \cdot \sqrt{3x^3 + 2x^2 + 2} \leq \frac{1 + (3x^3 + 2x^2 + 2)}{2} = \frac{3x^3 + 2x^2 + 3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 2} = 1 \Leftrightarrow x = -1$.

$$\sqrt{-3x^3 + x^2 + 2x - 1} = 1 \cdot \sqrt{-3x^3 + x^2 + 2x - 1} \leq \frac{1 + (-3x^3 + x^2 + 2x - 1)}{2} = \frac{-3x^3 + x^2 + 2x}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{-3x^3 + x^2 + 2x - 1} = 1 \Leftrightarrow x = -1$.

$$\Rightarrow \sqrt{3x^3 + 2x^2 + 2} + \sqrt{-3x^3 + x^2 + 2x - 1} \leq \frac{3x^3 + 2x^2 + 3}{2} + \frac{-3x^3 + x^2 + 2x}{2} = \frac{3x^2 + 2x + 3}{2}$$

$$\frac{3x^2 + 2x + 3}{2} \leq \frac{(3x^2 + 2x + 3) + (x + 1)^2}{2} = 2x^2 + 2x + 2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Do đó, ta luôn có $\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 2} + \sqrt{-3x^3 + x^2 + 2x - 1} \leq 2x^2 + 2x + 2$.

Đẳng thức phải xảy ra, tức là $x = -1$. Thử lại thấy thỏa.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = -1$.

Nhận xét. Bài này không quá khó và chỉ áp dụng các đánh giá rất quen thuộc của BĐT. Tuy nhiên, để xác định được hướng đi này cũng không phải đơn giản; thông thường sau khi nhẩm ra được nghiệm là $x = -1$ và đứng trước một phương trình vô tỉ có chứa căn thế này, ta hay dùng cách nhân lượng liên hợp; thế nhưng, cách đó rồi cũng sẽ đi vào bế tắc cùng những tính toán phức tạp.

Bài 30. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (2x^2 - 3x + 4)(2y^2 - 3y + 4) = 18 \\ x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0 \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển trường THPT Chuyên ĐHSP Hà Nội)

Lời giải.

Xét đẳng thức $x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0$ (*)

Ta xem (*) là phương trình bậc hai theo biến x , viết lại là $x^2 + x(y - 7) + y^2 - 6y + 14 = 0$.

Phương trình này có nghiệm khi

$$\Delta_y = (y-7)^2 - 4(y^2 - 6y + 14) \geq 0 \Leftrightarrow -3y^2 + 10y - 7 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq \frac{7}{3}.$$

Hoàn toàn tương tự, xem (*) là phương trình bậc hai theo biến y , viết lại là $y^2 - y(x-6) + (x^2 - 7x + 14) = 0$.

Phương trình này có nghiệm khi

$$\Delta_x = (x-6)^2 - 4(x^2 - 7x + 14) \geq 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 16x - 20 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq \frac{10}{3}.$$

Ta xét hàm số $f(t) = 2t^2 - 3t + 4, t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{4} < 1$.

Suy ra, trên $[1, +\infty)$, hàm số này đồng biến. Ta được

$$f(x) \geq f(2) = 6, f(y) \geq f(1) = 3 \Rightarrow f(x) \cdot f(y) \geq 3 \cdot 6 = 18.$$

Từ phương trình thứ nhất của hệ thì ta thấy đẳng thức phải xảy ra, tức là $x = 2, y = 1$.

Thay hai giá trị này vào (*), ta thấy không thỏa.

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Nhận xét. Ý tưởng giải của bài này không khó và cũng khá quen thuộc khi chỉ cần tìm miền xác định của biến thông qua việc tính Delta của một phương trình bậc hai; tuy trong lời giải trên có khảo sát hàm số nhưng thực ra các kết quả đó có thể chứng minh bằng bất đẳng thức đại số thuần túy nên công cụ giải chính của bài này là đại số. Và do đó việc hai biểu thức của x và y ở phương trình đầu của hệ giống nhau có thể dẫn đến đánh giá sai hướng mà dùng giải tích, xét hàm số để khai thác phương trình đầu tiên trong khi điều đó không đem lại kết quả gì. Các hệ số được chọn ra số rất đẹp chính là ưu điểm nổi bật của bài toán này.

Bài 31. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2(2x+1)^3 + 2x+1 = (2y-3)\sqrt{y-2} \\ \sqrt{4x+2} + \sqrt{2y+4} = 6 \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển trường THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai)

Lời giải.

Điều kiện xác định: $x \geq \frac{-1}{2}, y \geq 2$.

Xét hàm số: $f(t) = 2t^3 + t, t \in (0; +\infty)$.

Suy ra: $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0$ nên đây là hàm đồng biến.

Từ phương trình thứ nhất của hệ, ta có: $f(2x+1) = f(\sqrt{y-2}) \Leftrightarrow 2x+1 = \sqrt{y-2}$.

Thay vào phương trình thứ hai, ta được:

$$\sqrt[4]{4y-8} + \sqrt{2y+4} = 6 \quad (*)$$

Ta thấy hàm số: $g(y) = \sqrt[4]{4y-8} + \sqrt{2y+4} - 6, y \in (2, +\infty)$ có đạo hàm là:

$$g'(y) = \frac{1}{\sqrt[4]{(4y-8)^3}} + \frac{1}{\sqrt{2y+4}} > 0, \forall y \in (2, +\infty) \text{ nên đồng biến.}$$

Hơn nữa: $g(6) = \sqrt[4]{4 \cdot 6 - 8} + \sqrt{2 \cdot 6 + 4} - 6 = 0$ nên $(*)$ có đúng một nghiệm là $y = 6$.

Với $y = 6$, ta có $x = \frac{1}{2}$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $(x, y) = (\frac{1}{2}, 6)$.

Nhận xét. Dạng toán ứng dụng trực tiếp tính đơn điệu vào bài toán để đơn giản hóa biểu thức rất thường gặp. Hướng giải này có thể dễ dàng phát hiện ra từ phương trình thứ nhất của hệ, x và y nằm về mỗi vế của phương trình và quan sát kỹ hơn sẽ thấy sự tương ứng của các biểu thức và dẫn đến xét một hàm số như đã nêu ở trên. Ý tưởng bài này hoàn toàn giống với bài 5 đề thi ĐH môn toán khối A năm 2010.

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y - 3)\sqrt{5 - 2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = 7 \end{cases}.$$

$$\text{Bài 32. Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^4 + x^3y + 9y = y^3x + x^2y^2 + 9x \\ x(y^3 - x^3) = 7 \end{cases}$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}x^4 + x^3y + 9y &= y^3x + x^2y^2 + 9x \Leftrightarrow (x^4 - xy^3) + (x^3y - x^2y^2) - 9(x - y) = 0 \\ \Leftrightarrow (x - y)[x(x^2 + xy + y^2) + x^2y - 9] &= 0 \Leftrightarrow (x - y)[x(x + y)^2 - 9] = 0\end{aligned}$$

Từ phương trình thứ hai của hệ, ta thấy $x \neq y$ nên từ biến đổi trên, suy ra:

$$x(x + y)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x(x + y)^2 = 9 \quad (*)$$

$$\text{Ta có: } x(y^3 - x^3) = 7 \Leftrightarrow y^3 - x^3 = \frac{7}{x} \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{x^3 + \frac{7}{x}}.$$

$$\text{Thay vào } (*), \text{ ta được: } x\left(x + \sqrt[3]{x^3 + \frac{7}{x}}\right)^2 = 9.$$

Ta sẽ chứng minh rằng vế trái là một hàm đồng biến theo biến x . Thật vậy:

$$\begin{aligned}x\left(x + \sqrt[3]{x^3 + \frac{7}{x}}\right)^2 &= x\left(x^2 + 2x\sqrt[3]{x^3 + \frac{7}{x}} + \sqrt[3]{\left(x^3 + \frac{7}{x}\right)^2}\right) \\ &= x^3 + 2x^2\sqrt[3]{x^3 + \frac{7}{x}} + x\sqrt[3]{\left(x^3 + \frac{7}{x}\right)^2} = x^3 + 2x\sqrt[3]{x^6 + 7x^2} + \sqrt[3]{x(x^4 + 7)^2}\end{aligned}$$

Từ (*) suy ra $x > 0$ và trong biểu thức ở trên, các số mũ của biến x đều dương nên đây là hàm đồng biến; suy ra nó có không quá một nghiệm.

Thay trực tiếp $x = 1$ vào biểu thức, ta thấy thỏa.

Vậy hệ đã cho có đúng một nghiệm là: $(x, y) = (1, 2)$.

Nhận xét. Điểm đặc biệt của bài này là xử lý được hệ phương trình mới sau khi biến đổi, nếu như ta dùng cách đại số trực tiếp, phân tích ra được một nghiệm $x = 1$ thì phương trình bậc cao còn lại khó mà giải được. Cách lập luận theo tính đơn điệu của hàm số thế này vừa tránh được điều đó vừa làm cho lời giải nhẹ nhàng hơn.

Bài 33. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2y^3 + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} - y \\ y = 2x^2 - 1 + 2xy\sqrt{1+x} \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$. Đặt $a = \sqrt{1-x} \geq 0 \Rightarrow x = 1-a^2$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$2y^3 + 2(1-a^2)a = 3a - y \Leftrightarrow 2y^3 + y = 2a^3 + a$$

Dễ thấy hàm số $f(t) = 2t^3 + t, t \in \mathbb{R}$ có $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên đẳng thức trên được viết lại là $f(y) = f(a) \Leftrightarrow y = a \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x}$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$$

Đặt $x = \cos t, t \in [0, \pi]$, phương trình trên trở thành

$$\sqrt{1-\cos t} = 2\cos^2 t - 1 + 2\cos t\sqrt{1-\cos^2 t}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2\sin^2 \frac{t}{2}} = \cos 2t + \sin 2t \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin \frac{t}{2} = \sqrt{2} \sin(2t + \frac{\pi}{4})$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{t}{2} = \sin(2t + \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + \frac{\pi}{4} = \frac{t}{2} + k.2\pi \\ 2t + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{t}{2} + k.2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{\pi}{6} + k\frac{4\pi}{3} \\ t = \frac{3\pi}{10} + k\frac{4\pi}{5} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Do $t \in [0, \pi]$ nên từ hai họ phương trình trên, ta chỉ nhận giá trị $t = \frac{3\pi}{10}$.

$$\text{Khi đó } x = \cos \frac{3\pi}{10}, y = \sqrt{1-\cos \frac{3\pi}{10}} = \sqrt{2} \sin \frac{3\pi}{20}.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $(x, y) = (\cos \frac{3\pi}{10}, \sqrt{2} \sin \frac{3\pi}{20})$.

Bài 34. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 35 \\ 2x^2 + 3y^2 = 4x - 9y \end{cases}$$

Lời giải.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với $(6x^2 - 12x + 8) + (9y^2 + 12y + 27) = 35$

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được:

$$x^3 - y^3 = (6x^2 - 12x + 8) + (9y^2 + 12y + 27) \Leftrightarrow (x - 2)^3 = (y + 3)^3 \Leftrightarrow x = y + 5$$

Lại thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được:

$$2(y + 5)^2 + 3y^2 = 4(y + 5) - 9y \Leftrightarrow 5y^2 + 25y + 30 = 0 \Leftrightarrow (y + 2)(y + 3) = 0 \Leftrightarrow y = -2 \vee y = -3.$$

Với $y = -2$, ta có $x = 3$, với $y = -3$, ta có $x = 2$.

Thử lại ta thấy thỏa.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x, y) = (-2, 3), (-3, 2)$.

Nhận xét. Dạng toán dựa trên hằng đẳng thức này xuất hiện khá nhiều, chẳng hạn trong đề thi VMO 2010 vừa qua; nếu chúng ta thấy các biểu thức của x và y trong hệ phương trình chứa đầy đủ các bậc thì khả năng giải theo cách dùng hằng đẳng thức là rất cao.

Một bài toán tương tự, giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ x^2 + 2y^2 = x + 4y \end{cases}.$$

Bài 35. Giải phương trình $2\sqrt[3]{2x-1} = 27x^3 - 27x^2 + 13x - 2$

(Đề thi HSG Hải Phòng, bảng A1)

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $(3x - 1)^3 + 2(3x - 1) = (2x - 1) + 2\sqrt[3]{2x - 1}$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t, t \in \mathbb{R}$. Ta thấy $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên đây là hàm đồng biến.

Phương trình trên chính là

$$\begin{aligned} f(3x - 1) &= f(\sqrt[3]{2x - 1}) \Leftrightarrow 3x - 1 = \sqrt[3]{2x - 1} \Leftrightarrow (3x - 1)^3 = 2x - 1 \\ &\Leftrightarrow 27x^3 - 27x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow x(27x^2 - 27x + 7) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 0$.

Bài 36. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = 2(x^2 + y^2) \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{2y} = y^2 - x^2 \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển Quảng Ninh)

Lời giải.

Điều kiện $x, y \neq 0$. Cộng từng vế của hai phương trình, ta có $\frac{2}{x} = x^2 + 3y^2 \Leftrightarrow 2 = x^3 + 3xy^2$

Lấy phương trình thứ nhất trừ phương trình thứ hai, vế theo vế, ta được

$$\frac{1}{y} = 3x^2 + y^2 \Leftrightarrow 1 = 3x^2y + y^3$$

Do đó

$$\begin{cases} 2 = x^3 + 3xy^2 \\ 1 = y^3 + 3x^2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = x^3 + 3xy^2 + y^3 + 3x^2y \\ 1 = x^3 + 3xy^2 - y^3 - 3x^2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = (x+y)^3 \\ 1 = (x-y)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = \sqrt[3]{3} \\ x-y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt[3]{3}+1}{2} \\ y = \frac{\sqrt[3]{3}-1}{2} \end{cases}$$

Thử lại, ta thấy nghiệm này thỏa.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{\sqrt[3]{3}+1}{2}, y = \frac{\sqrt[3]{3}-1}{2}$.

Nhận xét. Dạng toán này cũng xuất phát từ việc khai triển các hằng đẳng thức, nhưng ở đây là dựa trên tính đối xứng để tìm ra sự bất đối xứng nhằm sáng tạo đề toán thú vị. Cách giải bài này theo hướng trên là quen thuộc và tốt hơn cả, một bài tương tự trong đề thi HSG của TPHCM là

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{2y} = 2(y^4 - x^4) \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = (3x^2 + y^2)(x^2 + 3y^2) \end{cases}$$

Bài này tạo ra từ khai triển nhị thức Newton bậc năm, nếu ta xét khai triển bậc bảy thì bài toán thu được sẽ rất ấn tượng.

Bài 37. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 = 3x - 12y + 50 \\ y^3 = 12y + 3z - 2 \\ z^3 = 27x + 27z \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển trường THPT Phan Chu Trinh, Đà Nẵng)

Lời giải.

Ta có

$$x^3 = 3x - 12y + 50 \Leftrightarrow 48 - 12y = x^3 - 3x - 2 \Leftrightarrow 12(4 - y) = (x - 2)(x + 1)^2 \quad (1)$$

$$y^3 = 12y + 3z - 2 \Leftrightarrow 3z - 18 = y^3 - 12y + 16 \Leftrightarrow 3(z - 6) = (y - 4)(y + 2)^2 \quad (2)$$

$$z^3 = 27x + 27z \Leftrightarrow 27x - 54 = z^3 - 27z - 54 \Leftrightarrow 27(x - 2) = (z - 6)(z + 3)^2 \quad (3)$$

-Nếu $x = -1$ thì $(x - 2)(x + 1)^2 = 0$, từ (1) suy ra $y = 4$ hay $(y - 4)(y + 2)^2 = 0$, từ (2) suy ra $z = 6$ hay $(z - 6)(z + 3)^2 = 0$, từ (3) suy ra $x = 2$, mâu thuẫn.

Do đó, $x = -1$ không thỏa mãn hệ, ta chỉ xét $x \neq -1 \Rightarrow (x + 1)^2 > 0$.

Chứng minh hoàn toàn tương tự, ta cũng có: $(y + 2)^2 > 0, (z + 3)^2 > 0$.

Từ (2) suy ra $y - 4, z - 6$ cùng dấu.

Từ (3) suy ra $x - 2, z - 6$ cùng dấu.

Từ đó, ta được: $x - 2, y - 4$ cùng dấu.

Hơn nữa, từ (1), ta thấy $x - 2, -(y - 4)$ cùng dấu, tức là: $0 \leq (x - 2)(y - 4) \leq 0$.

Do đó: $x = 2$ hoặc $y = 4$.

Từ các phương trình (1), (2), (3), dễ thấy cả hai trường hợp trên đều cho ta kết quả là:

$$x = 2, y = 4, z = 6.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $(x, y, z) = (2, 4, 6)$.

Nhận xét. Mấu chốt của bài toán là phải có được các phân tích (1), (2), (3) ở trên. Điều này chỉ có thể thực hiện được khi đã đoán được nghiệm của bài toán là $x = 2, y = 4, z = 6$ và có thể tác

giả bài toán cũng đã xuất phát từ các đẳng thức đó để biến đổi được đề như trên. Dạng này cũng đã từng xuất hiện trong đề thi HSG của TPHCM năm 2006 – 2007 với cách giải tương tự.

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + y = 3x + 4 \\ 2y^3 + z = 6y + 6 \\ 3z^3 + x = 9z + 8 \end{cases}$$

Bài 38. Giải phương trình
$$\sqrt[3]{\frac{x^9 - 9x^2 + 1}{3}} = 2x + 1$$

(Đề thi chọn đội tuyển Phú Yên)

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^9 + 9x^2 - 1 &= 3(2x + 1)^3 \Leftrightarrow x^9 + 9x^2 - 1 = 24x^3 + 36x^2 + 18x + 3 \\ \Leftrightarrow x^9 + 3x^3 &= (27x^3 + 27x^2 + 9x + 1) + 9x + 3 \Leftrightarrow x^9 + 3x^3 = (3x + 1)^3 + 3(3x + 1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t, t \in \mathbb{R}$, ta có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t$ nên đây là hàm đồng biến.

Phương trình trên được viết lại là $f(x^3) = f(3x + 1) \Leftrightarrow x^3 = 3x + 1. (*)$

Trước hết, ta xét các nghiệm thỏa mãn $-2 \leq x \leq 2$ của (*). Đặt $x = 2 \cos \varphi, \varphi \in [0, \pi]$, khi đó

$$(*) \Leftrightarrow 8 \cos^3 \varphi = 6 \cos \varphi + 1 \Leftrightarrow 2 \cos 3\varphi = 1 \Leftrightarrow \cos 3\varphi = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{9} + k \frac{2\pi}{3}.$$

Mà $\varphi \in [0, \pi]$ nên ta chỉ chọn 3 nghiệm của họ trên là $\varphi = \frac{\pi}{9}, \varphi = \frac{5\pi}{9}, \varphi = \frac{7\pi}{9}$, tương ứng, ta có

các nghiệm của (*) là $x = 2 \cos \frac{\pi}{9}, x = 2 \cos \frac{5\pi}{9}, x = 2 \cos \frac{7\pi}{9}$. Rõ ràng ba nghiệm này là phân biệt và (*) là phương trình bậc ba, có không quá ba nghiệm nên đây cũng chính là tất cả các nghiệm của nó.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = 2 \cos \frac{\pi}{9}, x = 2 \cos \frac{5\pi}{9}, x = 2 \cos \frac{7\pi}{9}$.

Bài 39.

1/ Giải phương trình sau $x-1+\sqrt{x+1}+\sqrt{2-x}=x^2+\sqrt{2}$

2/ Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} y^3+y=x^3+3x^2+4x+2 \\ \sqrt{1-x^2}-\sqrt{y}=\sqrt{2-y}-1 \end{cases}$$

(Đề thi HSG tỉnh Nghệ An)

Lời giải.

1/ Điều kiện $-1 \leq x \leq 2$. Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{2-x} > 0$, ta có

$$t^2 = 3 + 2\sqrt{-x^2 + x + 2} \Leftrightarrow \left(\frac{t^2-3}{2}\right)^2 = -x^2 + x + 2.$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} (\sqrt{x+1} + \sqrt{2-x}) + (-x^2 + x + 2) &= 3 + \sqrt{2} \Leftrightarrow t + \left(\frac{t^2-3}{2}\right)^2 = 3 + \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow t^4 - 6t^2 + 4t - (3 + 4\sqrt{2}) &= 0 \\ \Leftrightarrow t^4 - (1 + \sqrt{2})t^3 + (1 + \sqrt{2})t^3 - (3 + 2\sqrt{2})t^2 + (2\sqrt{2} - 3)t^2 - (1 - \sqrt{2})t + (5 - \sqrt{2})t - (3 + 4\sqrt{2}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (t - \sqrt{2} - 1)[t^3 + (1 + \sqrt{2})t^2 + (2\sqrt{2} - 3)t + (5 - \sqrt{2})] &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2} + 1 \\ t^3 + (1 + \sqrt{2})t^2 + (2\sqrt{2} - 3)t + (5 - \sqrt{2}) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Dễ thấy phương trình thứ hai không có nghiệm dương nên ta chỉ xét $t = \sqrt{2} + 1$. Khi đó

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2-x} = \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow 3 + 2\sqrt{-x^2 + x + 2} = 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1, \text{ thỏa.}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 0, x = 1$.

2/ Điều kiện $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với $y^3 + y = (x+1)^3 + (x+1)$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, t \in \mathbb{R}$, ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t$ nên đây là hàm đồng biến.

Phương trình trên được viết lại là $f(y) = f(x+1) \Leftrightarrow y = x+1$. Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được $\sqrt{1-x^2} - \sqrt{x+1} = \sqrt{1-x} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} - 1$ (*)

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} > 0 \Rightarrow t^2 = 2 + 2\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = \frac{t^2-2}{2}.$$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow \frac{t^2-2}{2} = t-1 \Leftrightarrow t^2-2t=0 \Leftrightarrow t=2.$$

Khi đó $\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} = 2 \Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{1-x^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$, thỏa điều kiện. Tương ứng với mỗi giá trị x , ta có $y = 0, y = 2$.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x, y) = (-1, 0), (1, 2)$.

Nhận xét. Ở bài 1, cách đặt ẩn phụ và phân tích như thế chỉ mang tính chất tham khảo vì nó khá thiếu tự nhiên. Ta hoàn toàn có thể khảo sát hàm số $f(x) = x - 1 + \sqrt{x+1} + \sqrt{2-x} - x^2 - \sqrt{2}$ trên $[-1, 2]$, tính đạo hàm cấp 2 để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có không quá hai nghiệm phân biệt rồi nhằm nghiệm hoặc ta cũng có thể dùng phương pháp nhân lượng liên hợp để giải quyết cũng khá thuận tiện.

Bài 40.

$$1/ \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^3 + 8y^3 - 4xy^2 = 1 \\ 2x^4 + 8y^4 - 2x - y = 0 \end{cases}$$

$$2/ \text{ Chứng minh phương trình sau có đúng một nghiệm } (\sqrt{x+1})^{2011} - 2(\sqrt{x+1})^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 2.$$

(Đề dự bị thi HSG tỉnh Nghệ An)

Lời giải.

$$1/ \text{ Đặt } 2y = t, \text{ hệ đã cho trở thành } \begin{cases} x^3 + t^3 - xt^2 = 1 \\ 4x^4 + t^4 - 4x - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 - 1 = x(t^2 - x^2) \\ 4x(x^3 - 1) + t(t^3 - 1) = 0 \end{cases}$$

Thay $t^3 - 1 = x(t^2 - x^2)$ từ phương trình thứ nhất vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$4x(x^3 - 1) + xt(t^2 - x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4(x^3 - 1) + t^3 - tx^2 = 0 \end{cases}$$

Dễ thấy $x = 0$ không là nghiệm của hệ nên ta chỉ xét $4(x^3 - 1) + t^3 - tx^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + t^3 - tx^2 = 4$.

Phương trình thứ nhất của hệ được viết lại là $4x^3 + 4t^3 - 4xt^2 = 4$. Do đó

$$4x^3 + 4t^3 - 4xt^2 = 4x^3 + t^3 - tx^2 \Leftrightarrow t^3 = tx^2 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \pm x.$$

Dễ thấy $t = 0$ không thỏa mãn hệ đã cho nên chỉ xét $t = \pm x$.

$$\text{-Nếu } t = x, \text{ ta có hệ } \begin{cases} x^3 + x^3 - x.x^2 = 1 \\ 4x^4 + x^4 - 4x - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 1 \\ 5x^4 - 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Khi đó $t = x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$, hệ đã cho có nghiệm $(x, y) = (1, \frac{1}{2})$.

$$\text{-Nếu } t = -x, \text{ ta có hệ } \begin{cases} x^3 - x^3 - x(-x)^2 = 1 \\ 4x^4 + (-x)^4 - 4x - (-x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = -1 \\ 5x^4 - 3x = 0 \end{cases}, \text{ hệ này vô nghiệm.}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(x, y) = (1, \frac{1}{2})$.

2/ Chứng minh phương trình sau có đúng một nghiệm $(\sqrt{x+1})^{2011} - 2(\sqrt{x+1})^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$.

Điều kiện $x \geq -1$. Phương trình đã cho tương đương với $(\sqrt{x+1})^{2011} - 2(\sqrt{x+1})^3 = (x+1)^3 + 1$.

Đặt $t = \sqrt{x+1} \geq 0$. Ta cần chứng minh phương trình $t^{2011} - 2t^3 = t^6 + 1$ có đúng một nghiệm dương.

Xét hàm số $f(t) = t^{2011} - t^6 - 2t^3 - 1, t \geq 0$. Ta có $f(0) = -1, \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$ và $f(t)$ liên tục trên $(0, +\infty)$ nên phương trình $f(t) = 0$ có ít nhất một nghiệm dương.

Ta có $t^{2011} - 2t^3 = t^6 + 1 \Leftrightarrow t^{2011} = (t^3 + 1)^2 \geq 0 \Rightarrow t \geq 0$, mà với $t \geq 0$, ta có $t^{2011} = (t^3 + 1)^2 \geq 1 \Rightarrow t \geq 1$.

Khi đó $f'(t) = 2011t^{2010} - 6t^5 - 6t^2 = 1999t^{2010} + 6(t^{2010} - t^5) + 6(t^{2010} - t^2) > 0$ nên đây là hàm đồng biến, tức là nó có không quá một nghiệm.

Kết hợp các điều này lại, ta thấy rằng phương trình $t^{2011} - 2t^3 = t^6 + 1$ có đúng một nghiệm dương, tức là phương trình đã cho có đúng một nghiệm. Ta có đpcm.

Nhận xét. Bài 2 tuy hình thức khá phức tạp nhưng qua phép đặt ẩn phụ đã đưa về một phương trình đa thức thông thường. Ý tưởng giải như trên đã từng xuất hiện trong Bộ đề tuyển sinh của Bộ GD – ĐT, đó là bài toán sau

Chứng minh phương trình $x^5 = x^2 + 2x + 1$ có đúng một nghiệm.

Bài 41. Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x + 3y = x^3 - 12 \\ -y + 4z = y^3 - 6 \\ 9z + 2x = z^3 + 32 \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển ĐH KHTN Hà Nội, vòng 1)

Lời giải.

Hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} 3y + 6 = x^3 - x - 6 \\ 4z + 16 = y^3 + y + 10 \\ 2x - 4 = z^3 - 9z + 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(y + 2) = (x - 2)(x^2 + 2x + 3) \\ 4(z + 4) = (y + 2)(y^2 - 2y + 5) \\ 2(x - 2) = (z + 4)(z^2 - 4z + 7) \end{cases}$$

Nhân từng vế các phương trình của hệ, ta có

$$24(x - 2)(y + 2)(z + 4) = (x - 2)(y + 2)(z + 4) \left[(x^2 + 2x + 3)(y^2 - 2y + 5)(z^2 - 4z + 7) \right]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)(y + 2)(z + 4) = 0 \\ (x^2 + 2x + 3)(y^2 - 2y + 5)(z^2 - 4z + 7) = 24 \end{cases}$$

-Nếu $(x - 2)(y + 2)(z + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee y = -2 \vee z = -4$.

Ta thấy rằng nếu $x = 2$ thì theo phương trình thứ nhất, $y = -2$; theo phương trình thứ hai, $z = -4$ và hệ đã cho có nghiệm $(x, y, z) = (2, -2, -4)$.

Tương tự nếu $y = -2$ hoặc $z = -4$.

-Nếu $(x^2 + 2x + 3)(y^2 - 2y + 5)(z^2 - 4z + 7) = 24 \Leftrightarrow \left[(x + 1)^2 + 2 \right] \left[(y - 1)^2 + 4 \right] \left[(z - 2)^2 + 3 \right] = 24$

Ta thấy rằng $\left[(x + 1)^2 + 2 \right] \left[(y - 1)^2 + 4 \right] \left[(z - 2)^2 + 3 \right] \geq 2.3.4 = 24$ nên đẳng thức phải xảy ra, tức là $x = -1, y = 1, z = 2$.

Thử lại, ta thấy bộ này không thỏa mãn hệ đã cho.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(x, y, z) = (2, -2, -4)$.

Nhận xét. Bài này cũng có dạng tương tự như một bài đã đề cập ở trên và nói chung thì dạng này khá quen thuộc; tuy nhiên, điểm mới của bài này là không phải nhận được nghiệm $(x, y, z) = (2, -2, -4)$ thông qua các bất đẳng thức so sánh với nghiệm nữa mà là qua việc chứng minh bộ nghiệm đó qua việc chứng minh nó là duy nhất với việc dùng các tam thức bậc hai.

Bài 42. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} e^{y^2-x^2} = \frac{x^2+1}{y^2+1} \\ 3\log_2(x+2y+6) = 2\log_2(x+y+2)+1 \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển trường THPT Cao Lãnh, Đồng Tháp)

Lời giải.

Điều kiện xác định
$$\begin{cases} x+2y+6 > 0 \\ x+y+2 > 0 \end{cases}$$

Xét hàm số: $f(t) = e^t(t+1), t \in [0, +\infty)$. Ta có $f'(t) = e^t(t+1) + e^t = e^t(t+2) > 0$ nên đây là hàm đồng biến. Do đó

$$e^{y^2-x^2} = \frac{x^2+1}{y^2+1} \Leftrightarrow e^{x^2}(x^2+1) = e^{y^2}(y^2+1) \Leftrightarrow f(x^2) = f(y^2) \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = \pm y.$$

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$3\log_2(x+2y+6) = 2\log_2(x+y+2)+1$$

$$\Leftrightarrow \log_2[(x+2y+6)^3] = \log_2[2(x+y+2)^2] \Leftrightarrow (x+2y+6)^3 = 2(x+y+2)^2 \quad (*)$$

Xét hai trường hợp

-Nếu $x = y$ thì thay vào (*), ta được $(3x+6)^3 = 2(2x+2)^2$.

Theo điều kiện ban đầu thì $2x+2 > 0 \Rightarrow 2x+4 > 2x+2 > 0$.

Hơn nữa: $(3x+6)^3 - 2(2x+4)^2 = (x+2)^2(27x+46) > 0 \Rightarrow (3x+6)^3 > 2(2x+4)^2$.

Do đó: $(3x+6)^3 > 2(2x+4)^2 > 2(2x+2)^2$ nên phương trình này vô nghiệm.

-Nếu $x = -y$, thay vào (*), ta được $(-x+6)^3 = 2(2)^2 \Leftrightarrow (6-x)^3 = 8 \Leftrightarrow 6-x = 2 \Leftrightarrow x = 4$.

Suy ra: $y = -x = -4$. Thử lại thấy thỏa.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $(x, y) = (4, -4)$.

Nhận xét. Hệ dạng này rất quen thuộc với ý tưởng chính là dùng tính chất của hàm đơn điệu: $f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$. Ở bài trên cũng chú ý các đánh giá trong trường hợp $x = y$, bởi vì khi đó phương trình bậc ba thu được phải giải theo công thức tổng quát, điều thường bị tránh ở các kì

thi HSG; do đó, việc tìm một đánh giá thích hợp để chứng minh nghiệm của nó không thỏa đề bài là một điều khá tự nhiên.

Bài 43. Giải phương trình sau:
$$\frac{\sqrt{x^2 - x + 2}}{1 + \sqrt{-x^2 + x + 2}} - \frac{\sqrt{x^2 + x}}{1 + \sqrt{-x^2 - x + 4}} = x^2 - 1$$

(Đề thi HSG tỉnh Bình Phước)

Lời giải.

Điều kiện xác định $0 \leq x^2 - x + 2 \leq 4, 0 \leq x^2 + x \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{\sqrt{x^2 - x + 2}}{1 + \sqrt{4 - (x^2 - x + 2)}} - \frac{\sqrt{x^2 + x}}{1 + \sqrt{4 - (x^2 + x)}} = x^2 - 1$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{\sqrt{t}}{1 + \sqrt{4 - t}}, t \in [0, 4]$, ta có

$$f'(t) = \left(\frac{1 + \sqrt{4 - t}}{2\sqrt{t}} + \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{4 - t}} \right) \cdot \frac{1}{(1 + \sqrt{4 - t})^2} > 0, \forall t \in [0, 4] \text{ nên đây là hàm đồng biến.}$$

Phương trình trên chính là $f(x^2 - x + 2) - f(x^2 + x) - (x^2 - 1) = 0$ (*).

Ta xét hai trường hợp

-Nếu $1 < x \leq \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow x^2 - x + 2 < x^2 + x \Leftrightarrow f(x^2 - x + 2) < f(x^2 + x)$, đồng thời $x^2 - 1 > 0$,

khi đó $f(x^2 - x + 2) - f(x^2 + x) - (x^2 - 1) < 0$.

-Nếu $-1 < x < 1 \Rightarrow x^2 - x + 2 > x^2 + x \Leftrightarrow f(x^2 - x + 2) > f(x^2 + x)$, đồng thời $x^2 - 1 < 0$, khi đó $f(x^2 - x + 2) - f(x^2 + x) - (x^2 - 1) > 0$.

Thử trực tiếp thấy $x = 1$ thỏa mãn (*).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

Nhận xét. Việc phát hiện ra hàm số $f(t) = \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{4-t}}, t \in [0, 4]$ như trên không khó, có thể thấy ngay từ việc quan sát biểu thức và đặt điều kiện xác định; tuy nhiên, việc này cũng dễ khiến ta lầm tưởng đến việc xét hàm số nào đó mà không nghĩ ra cách đánh giá kiểu như trên.

Một bài toán có cùng cách đánh giá như trên là $e^x + (x^3 - x) \ln(x^2 + 1) = e^{\sqrt[3]{x}}$.

Các bạn thử giải thêm bài toán sau $\frac{\sqrt{x^2 - x + 2}}{1 + \sqrt{-x^2 + x + 2}} - \frac{\sqrt{x^2 + x}}{1 + \sqrt{-x^2 - x + 4}} = x - 1$.

Bài 44.

1/ Giải phương trình $\sqrt[3]{3x+4} = x^3 + 3x^2 + x - 2$

2/ Tìm số nghiệm của phương trình

$$(4022x^{2011} + 4018x^{2009} + 2x)^4 - 2(4022x^{2011} + 4018x^{2009} + 2x)^2 + \cos^2 2x = 0$$

(Đề thi chọn đội tuyển Chuyên Nguyễn Du)

Lời giải.

1/ Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt[3]{3x+4} + 2x + 3 = (x+1)^3$

Đặt $y+1 = \sqrt[3]{3x+4}$. Ta có hệ phương trình $\begin{cases} (x+1)^3 = 2x + y + 4 \\ (y+1)^3 = 3x + 4 \end{cases}$

Trừ hai phương trình của hệ, vế theo vế, ta được

$$(x-y)[(x-1)^2 + (x-1)(y-1) + (y-1)^2] = y-x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ (x-1)^2 + (x-1)(y-1) + (y-1)^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y$$

Suy ra $x+1 = \sqrt[3]{3x+4} \Leftrightarrow (x+1)^3 = 3x+4 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 = 4 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-2$.

Thử lại ta thấy thỏa.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là $x=1, x=-2$.

2/ Đặt $t = 4022x^{2011} + 4018x^{2009} + 2x$. Ta có

$$t^4 - 2t^2 + \cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow (t^2 - 1)^2 = \sin^2 2x \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 1 = \sin 2x \\ t^2 - 1 = -\sin 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = (\sin x + \cos x)^2 \\ t^2 = (\sin x - \cos x)^2 \end{cases}$$

Ta được bốn phương trình sau

$$t = \sin x + \cos x, t = -(\sin x + \cos x), t = \sin x - \cos x, t = -\sin x + \cos x.$$

Ta thấy hàm số $t(x) = 4022x^{2011} + 4018x^{2009} + 2x$ là lẻ nên chỉ cần xét các phương trình

$$t(x) = \sin x + \cos x, t(x) = \cos x - \sin x.$$

Ta có

$$t(x) = \sin x + \cos x \Leftrightarrow 4022x^{2011} + 4018x^{2009} + 2x = \sin x + \cos x.$$

Xét hàm số $g(x) = 4022x^{2011} + 4018x^{2009} + 2x - (\sin x + \cos x)$ có

$$g'(x) = 4022 \cdot 2011x^{2010} + 4018 \cdot 2009x^{2008} + 2 - (\cos x - \sin x) > 0 \text{ nên là hàm đồng biến.}$$

Hơn nữa $g(0) = -1, g(1) > 0 \Rightarrow g(0) \cdot g(1) < 0$, đồng thời $g(x)$ liên tục trên $(0,1)$ nên phương trình $g(x) = 0$ có đúng một nghiệm thuộc $(0,1)$, tức là phương trình $t(x) = \sin x + \cos x$ có đúng một nghiệm thực.

Tương tự, phương trình $t(x) = \cos x - \sin x$ cũng có đúng một nghiệm thực thuộc $(0,1)$.

Do đó, mỗi phương trình $t(x) = \cos x + \sin x$ và $t(x) = -\cos x + \sin x$ cũng có một nghiệm thực.

Vậy phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm thực.

Bài 45. Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} (2-x)(1-2x)(2+y)(1+2y) = 4\sqrt{10z+1} \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + 2yz + x^2y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển Hà Tĩnh)

Lời giải.

$$\text{Ta có } x^2 + y^2 + z^2 + 2xz + 2yz + x^2y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+y+z)^2 + (xy-1)^2 = 0 \text{ hay}$$

$$x+y+z=0, xy=1 \Rightarrow y=\frac{1}{x}, z=-(x+y)=-(x+\frac{1}{x}).$$

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được

$$\begin{aligned}
(2-x)(1-2x)\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right) &= 4\sqrt{1-10\left(x+\frac{1}{x}\right)} \\
\Leftrightarrow (2-x)(1-2x)\left(\frac{1+2x}{x}\right)\left(\frac{2+x}{x}\right) &= 4\sqrt{1-10\left(x+\frac{1}{x}\right)} \\
\Leftrightarrow \frac{(4-x^2)(1-4x^2)}{x^2} &= 4\sqrt{1-10\left(x+\frac{1}{x}\right)} \Leftrightarrow 4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-17 = 4\sqrt{1-10\left(x+\frac{1}{x}\right)}
\end{aligned}$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow |t| \geq 2$. Ta có $t^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$, thay vào phương trình trên, ta được

$$\begin{aligned}
4(t^2 - 2) - 17 &= 4\sqrt{1-10t} \Leftrightarrow 4t^2 - 25 = 4\sqrt{1-10t} \Rightarrow (4t^2 - 25)^2 - 16(1-10t) = 0 \\
\Leftrightarrow (4t^2 - 20t + 29)(2t + 3)(2t + 7) &= 0 \Rightarrow t = -\frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Với giá trị t này, ta có $x + \frac{1}{x} = -\frac{7}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 7x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{4}$.

-Với $x = \frac{-7 - \sqrt{33}}{4}$, ta tính được $y = \frac{-7 + \sqrt{33}}{4}, z = \frac{7}{2}$.

-Với $x = \frac{-7 + \sqrt{33}}{4}$, ta tính được $y = \frac{-7 - \sqrt{33}}{4}, z = \frac{7}{2}$.

Thử lại ta thấy thỏa.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm phân biệt là

$$(x, y, z) = \left(\frac{-7 + \sqrt{33}}{4}, \frac{-7 - \sqrt{33}}{4}, \frac{7}{2}\right), \left(\frac{-7 - \sqrt{33}}{4}, \frac{-7 + \sqrt{33}}{4}, \frac{7}{2}\right).$$

Nhận xét. Việc phát hiện ra hằng đẳng thức ở trên là không khó nhưng việc thay các giá trị vào và tìm ra cách đặt ẩn phụ thích hợp quả là không đơn giản, cần có cách biến đổi chính xác. Bài toán có hình thức và ý tưởng cũng khá thú vị.

Bài 46.

1/ Giải phương trình sau $2010^x(\sqrt{x^2+1}-x)=1$.

2/ Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^4 - 4x + 2^{xy-2x+4} = 5 \\ 2^x + x^3 = y^3 + 2^y \end{cases}$$

Lời giải.

1/ Phương trình đã cho tương đương với $2010^x = \sqrt{x^2 + 1} + x$.

Ta sẽ chứng minh phương trình này có nghiệm duy nhất là $x = 0$. Thật vậy

Xét hàm số $f(x) = 2010^x - (\sqrt{x^2 + 1} + x)$, ta có $f'(x) = 2010^x \cdot \ln 2010 - \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + 1\right)$

-Nếu $x \geq 0$ thì $f'(x) \geq \ln 2010 - \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} + 1\right) > 0$ nên đây là hàm đồng biến, mà $f(0) = 0$ nên

phương trình này có đúng một nghiệm $x = 0$ với $x \geq 0$.

-Nếu $x \leq -1$, ta có

$$f''(x) = 2010^x \cdot (\ln 2010)^2 - \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}, f'''(x) = 2010^x \cdot (\ln 2010)^3 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 1)^5}} > 0.$$

Suy ra $f''(x)$ là hàm đồng biến nên $f''(x) \leq f''(-1) = \frac{(\ln 2010)^2}{2010} - \frac{1}{2\sqrt{2}} < 0$ nên $f'(x)$ là hàm

ng nghịch biến, suy ra $f(x) < \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2010^x - (\sqrt{x^2 + 1} + x)] = 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm với $x \leq -1$.

-Nếu $-1 < x \leq -\frac{1}{2}$ thì $\sqrt{x^2 + 1} + x \geq \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 1} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, $2010^x \leq \frac{1}{\sqrt{2010}} < \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ nên trong trường hợp này phương trình vô nghiệm.

-Nếu $-\frac{1}{2} < x < 0$ thì $f'(x) = 2010^x \cdot \ln 2010 - \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + 1\right) > 0$ nên đây là hàm đồng biến, suy ra $f(x) < f(0) = 0$.

Tóm lại, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 0$.

2/ Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^4 - 4x + 2^{xy-2x+4} = 5 \\ 2^x + x^3 = y^3 + 2^y \end{cases}$$

Từ phương trình thứ hai của hệ và tính đồng biến của hàm số $f(t) = 2^t + t^3$, ta có $x = y$.

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được

$$x^4 - 4x + 2^{x^2 - 2x + 4} = 5 \Leftrightarrow 5 - x^4 + 4x = 2^{(x-1)^2 + 3} \geq 8 \Leftrightarrow x^4 - 4x + 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x^2 + 2x + 3) \leq 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Thử lại, ta thấy thỏa; tương ứng với giá trị x này, ta có $y = 1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(x, y) = (1, 1)$.

Bài 47. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^{11} + xy^{10} = y^{22} + y^{12} \\ 7y^4 + 13x + 8 = 2y^4 \sqrt[3]{x(3x^2 + 3y^2 - 1)} \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển TP.HCM)

Lời giải.

Ta thấy hệ này không có nghiệm thỏa $y = 0$ nên ta chỉ xét $y \neq 0$, khi đó ta có

$$x^{11} + xy^{10} = y^{22} + y^{12} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^{11} + \frac{x}{y} = y^{11} + y.$$

Xét hàm số $f(t) = t^{11} + t, t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = 11t^{10} + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên đây là hàm đồng biến.

Đẳng thức ở trên chính là $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{y} = y \Leftrightarrow x = y^2$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$7x^2 + 13x + 8 = 2x^2 \sqrt[3]{x(3x^2 + 3x - 1)} \Leftrightarrow \frac{7}{x} + \frac{13}{x^2} + \frac{8}{x^3} = 2\sqrt[3]{3 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}.$$

Đặt $t = \frac{1}{x} > 0$. Ta có

$$7t + 13t^2 + 8t^3 = 2\sqrt[3]{3 + 3t - t^2} \Leftrightarrow (2t + 1)^3 + 2(2t + 1) = (3 + 3t - t^2) + 2\sqrt[3]{3 + 3t - t^2}$$

Xét hàm số $f(a) = a^3 + 2a, a > 0 \Rightarrow f'(a) = 3a^2 + 2 > 0$ nên hàm này đồng biến. Phương trình trên chính là

$$f(2t + 1) = f(\sqrt[3]{3 + 3t - t^2}) \Leftrightarrow 2t + 1 = \sqrt[3]{3 + 3t - t^2} \Leftrightarrow (2t + 1)^3 = 3 + 3t - t^2 \Leftrightarrow (t + 1)(8t^2 + 5t + 2) = 0$$

Do $t > 0$ nên không có giá trị nào thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Nhận xét. Do phương trình thu được sau khi tìm ra quan hệ giữa x và y không có nghiệm dương nên ta có thể dùng bất đẳng thức để đánh giá thay vì dùng hàm số như trên.

Bài 48. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2009x + 2010y = (x - y)^2 \\ 2010y + 2011z = (y - z)^2 \\ 2011z + 2009x = (z - x)^2 \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển chuyên Quang Trung, Bình Phước)

Lời giải.

Đặt $2009 = a > 0$, ta xét hệ tổng quát hơn là

$$\begin{cases} ax + (a+1)y = (x - y)^2 \\ (a+1)y + (a+2)z = (y - z)^2 \quad (*) \\ (a+2)z + ax = (z - x)^2 \end{cases}$$

Ta tính được $ax = \frac{(x - y)^2 + (z - x)^2 - (y - z)^2}{2} = (x - y)(x - z)$

Tương tự $(a+1)y = (y - z)(y - x)$, $(a+2)z = (z - x)(z - y)$

Từ đây suy ra $ax \cdot (a+1)y \cdot (a+2)z = -[(x - y)(y - z)(z - x)]^2 \leq 0$

Mặt khác, từ (*) ta thấy rằng tổng của từng cặp trong ba giá trị $ax, (a+1)y, (a+2)z$ đều không âm, ta sẽ chứng minh rằng cả ba giá trị này đều không âm.

Thật vậy, giả sử $ax < 0 \Leftrightarrow x < 0$, từ phương trình thứ nhất và phương trình thứ ba của (*), suy ra $(a+1)y > 0, (a+2)z > 0 \Leftrightarrow y, z > 0$ hay $x - y, x - z < 0 \Rightarrow ax = (x - y)(x - z) > 0$, mâu thuẫn.

Do đó $ax \geq 0$. Tương tự, ta cũng có $(a+1)y, (a+2)z \geq 0$.

Nhưng tích của ba số này lại không âm nên ta phải có $ax = (a+1)y = (a+2)z \Leftrightarrow x = y = z = 0$.

Thử lại thấy thỏa. Vậy hệ đã cho có đúng một nghiệm là $x = y = z = 0$.

Nhận xét. Rõ ràng các hệ số ban đầu là chọn dựa theo thói quen “chọn hệ số trùng với năm cho đề” nên ta hoàn toàn có thể xét bài toán tổng quát để việc biến đổi thuận tiện hơn. Bài toán thực sự thú vị sau khi có $ax = (x - y)(x - z), (a+1)y = (y - z)(y - x), (a+2)z = (z - x)(z - y)$. Nếu không dùng bất đẳng thức để đánh giá mà cố gắng dùng các phép thế thì khó có thể thành công.

Bài 49. Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{5} \\ 4x^2 + 3x - \frac{57}{25} = -y(3x+1) \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển Nghệ An)

Lời giải.

Hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} 5(x^2 + y^2) = 1 \\ 4x^2 + 3x + 3xy + y = \frac{57}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2 + y^2) = \frac{10}{25} \\ 2x^2 - 2y^2 + 3x + 3xy + y = \frac{47}{25} \end{cases}$$

Ta thấy $2x^2 - 2y^2 + 3x + 3xy + y = \frac{47}{25} \Leftrightarrow (2x-y)(x+2y) + (2x-y) + (x+2y) = \frac{47}{25}$

Đặt $2x-y=a, 2x+y=b$, ta được

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ab + a + b = \frac{47}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 - 2ab = 1 \\ 2ab + 2(a+b) = \frac{94}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab = (a+b)^2 - 1 \\ (a+b+1)^2 = \frac{144}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = \frac{7}{5} \\ ab = \frac{12}{25} \\ a+b = \frac{-17}{25} \\ ab = \frac{132}{25} \end{cases}$$

Ta thấy hệ phương trình thứ hai vô nghiệm, hệ thứ nhất có hai nghiệm là

$(a, b) = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}), (a, b) = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$, tương ứng là $(x, y) = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5}), (\frac{11}{25}, \frac{2}{25})$.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là $(x, y) = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5}), (\frac{11}{25}, \frac{2}{25})$.

Nhận xét. Cách phân tích ở phương trình thứ hai quả thật rất khó thấy. Bài toán này thực chất xuất phát từ một hệ đối xứng thông thường, nhưng qua các phép thế và tách biểu thức, nó trở nên phức tạp và việc biến đổi ngược lại thường phải mò mẫm. Ta cũng có thể nhân phương trình thứ nhất với 25 và phương trình thứ hai với 200 rồi cộng lại, ta có $25(3x+y+1)^2 = 144$, các giá trị 25 và 50 này chọn bằng phương pháp hệ số bất định với mong muốn tìm ra một quan hệ đẹp giữa x và y, như bình phương ở trên chẳng hạn.

Bài 50. Cho các tham số dương a, b, c . Tìm nghiệm dương của hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} x + y + z = a + b + c \\ 4xyz - a^2x - b^2y - c^2z = abc \end{cases}$$

(Đề kiểm tra đội tuyển Ninh Bình)

Lời giải.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với $\frac{a^2}{yz} + \frac{b^2}{zx} + \frac{c^2}{xy} + \frac{abc}{xyz} = 4$.

Đặt $x_1 = \frac{a}{\sqrt{yz}}, y_1 = \frac{b}{\sqrt{zx}}, z_1 = \frac{c}{\sqrt{xy}}$, suy ra $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_1y_1z_1 = 4$ (*).

Dễ thấy $0 < x_1, y_1, z_1 < 2$ nên tồn tại các giá trị u, v thỏa $0 < u, v < \frac{\pi}{2}$ và $x_1 = 2 \sin u, y_1 = 2 \sin v$.

Thay vào (*), ta có $z_1^2 + 4z_1 \cdot \sin u \cdot \sin v + 4 \sin^2 u + 4 \sin^2 v - 4 = 0$.

Đây là phương trình bậc hai theo biến z_1 , ta có

$$\Delta' = (2 \sin u \cdot \sin v)^2 - (4 \sin^2 u + 4 \sin^2 v - 4) = 4(1 - \sin^2 u)(1 - \sin^2 v) = 4 \cos^2 u \cdot \cos^2 v > 0.$$

Suy ra phương trình này có hai nghiệm là $\Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = -2 \sin u \sin v - 2 \cos u \cos v > 0 \\ z_1 = -2 \sin u \sin v + 2 \cos u \cos v < 0 \end{cases}$

Do đó $a = 2\sqrt{yz} \cdot \sin u, b = 2\sqrt{zx} \cdot \sin v, c = 2\sqrt{xy}(\cos u \cos v - \sin u \sin v)$.

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta có

$$x + y + z = 2\sqrt{yz} \cdot \sin u + 2\sqrt{zx} \cdot \sin v + 2\sqrt{xy}(\cos u \cos v - \sin u \sin v)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} \cos v - \sqrt{y} \cos u)^2 + (\sqrt{x} \sin v + \sqrt{y} \sin u - \sqrt{z})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \cos v - \sqrt{y} \cos u = \sqrt{x} \sin v + \sqrt{y} \sin u - \sqrt{z} = 0$$

$$\text{Ta tính được } \sqrt{z} = \sqrt{x} \sin v + \sqrt{y} \sin u = \frac{b\sqrt{x}}{2\sqrt{zx}} + \frac{a\sqrt{y}}{2\sqrt{yz}} = \frac{a+b}{2\sqrt{z}} \Rightarrow z = \frac{a+b}{2}$$

Tương tự, ta cũng có $y = \frac{c+a}{2}, x = \frac{b+c}{2}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(x, y, z) = \left(\frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$.

Nhận xét. Đây là bài toán trong IMO Shortlist, đề bài và lời giải thực sự rất hay, là một kết hợp đẹp giữa đại số và lượng giác. Ta cũng có thể giải bằng biến đổi đại số nhờ cách đặt ẩn phụ

$$x = \frac{b+c}{2} - u, y = \frac{c+a}{2} - v, z = \frac{a+b}{2} - w \text{ và đánh giá bằng bất đẳng thức.}$$

Bài 51. Giải hệ phương trình sau trên tập hợp số thực
$$\begin{cases} x + \frac{3x-y}{x^2+y^2} = 3 \\ y - \frac{x+3y}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển Chuyên Vĩnh Phúc, tỉnh Vĩnh Phúc)

Lời giải.

Ta sẽ giải hệ phương trình này bằng số phức.

Nhân phương trình thứ hai của hệ với i (đơn vị ảo $i^2 = -1$) rồi cộng với phương trình thứ nhất,

$$\text{ta có } x + yi + \frac{3x - y - xi - 3yi}{x^2 + y^2} = 3 \Leftrightarrow (x + yi) + \frac{3(x - yi)}{x^2 + y^2} - \frac{i(x - yi)}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\text{Đặt } z = x + yi \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}. \text{ Đẳng thức ở trên được viết lại là}$$

$$z + \frac{3-i}{z} = 0 \Leftrightarrow z^2 - 3z + 3 - i = 0 \Leftrightarrow z = \frac{3 \pm (1+2i)}{2} \Leftrightarrow z = 2 + i \vee z = 1 - i.$$

$$\text{-Nếu } z = 2 + i, \text{ suy ra } x + yi = 2 + i \Leftrightarrow x = 2, y = 1.$$

$$\text{-Nếu } z = 1 - i, \text{ suy ra } x + yi = 1 - i \Leftrightarrow x = 1, y = -1.$$

Thử lại ta thấy thỏa.

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là $(x, y) = (2, 1), (1, -1)$.

Nhận xét. Dạng toán này cũng khá phổ biến và đều chung ý tưởng là giải quyết bằng số phức.

$$\text{Các bài toán tương tự } \begin{cases} x - \frac{3x+10y}{x^2+y^2} = 1 \\ y + \frac{10x-3y}{x^2+y^2} = 2 \end{cases}, \begin{cases} x + \frac{x+2y}{x^2+y^2} = 2 \\ y + \frac{2x-y}{x^2+y^2} = 0 \end{cases} \quad (\text{Đề chọn đội tuyển Hà Nội 2007})$$

Trên thực tế, ta cũng có thể giải bằng cách dùng biến đổi đại số, nhân x và y thích hợp vào từng vế của các phương trình rồi trừ lại để thu được quan hệ đơn giản hơn giữa các biến này.

Bài 52. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^4 - 2x = y^4 - y \\ (x^2 - y^2)^3 = 3 \end{cases}$$

(Đề kiểm tra đội dự tuyển trường THPT Chuyên ĐHSP Hà Nội)

Lời giải.

Đặt $x + y = a, x - y = b, 3 = c^3$.

Từ phương trình thứ hai của hệ, ta có $(ab)^3 = c^3 \Leftrightarrow ab = c$.

Ta có $x = \frac{a+b}{2}, y = \frac{a-b}{2}$. Suy ra

$$x^4 - y^4 = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2) = ab \left[\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 \right] = \frac{ab}{2}(a^2 + b^2), \text{ hơn nữa:}$$

$$2x - y = (a + b) - \frac{(a - b)}{2} = \frac{a + 3b}{2} = \frac{a + c^3b}{2}$$

Do đó, phương trình thứ nhất của hệ đã cho tương đương với

$$\frac{ab}{2}(a^2 + b^2) = \frac{a + c^3b}{2} \Leftrightarrow c(a^2 + b^2) = a + c^3b$$

Ta có hệ mới là

$$\begin{cases} c(a^2 + b^2) = a + c^3b \\ ab = c \end{cases} \Rightarrow c(a^2 + \frac{c^2}{a^2}) = a + \frac{c^4}{a} \Leftrightarrow ca^4 + c^3 = a^3 + ac^4 \Leftrightarrow (ca - 1)(a^3 - c^3) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{c} \vee a = c.$$

Suy ra hệ này có hai nghiệm là $(a, b) = (c, 1); (\frac{1}{c}, c^2)$.

Xét hai trường hợp

- Nếu $a = c, b = 1$ thì $x = \frac{c+1}{2} = \frac{\sqrt[3]{3}+1}{2}, y = \frac{\sqrt[3]{3}-1}{2}$.

- Nếu $a = \frac{1}{c}, b = c^2$ thì $x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} + c^2 \right) = \frac{1+c^3}{2c} = \frac{2}{\sqrt[3]{3}}, y = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} - c^2 \right) = \frac{1-c^3}{2c} = \frac{-1}{\sqrt[3]{3}}$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là: $(x, y) = \left(\frac{\sqrt[3]{3}+1}{2}, \frac{\sqrt[3]{3}-1}{2} \right), \left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}}, \frac{-1}{\sqrt[3]{3}} \right)$.

Bình luận. Đây là một hệ phương trình rất đẹp, hình thức của nó dễ làm chúng ta bối rối khi không thể nhẩm được nghiệm nào cũng như tìm được một hàm số nào đó để khảo sát như ý tưởng thông thường. Lời giải thuần túy đại số và cách đặt ẩn phụ như đề bài cần phải chú ý, nó từng xuất hiện trong đề VMO 2005

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 6y - 17x \end{cases}$$

Một bài toán tương tự như trên cũng có lời giải rất thú vị $\begin{cases} x^4 - y^4 = \frac{3}{4y} - \frac{1}{2x} \\ (x^2 - y^2)^5 + 5 = 0 \end{cases}$

Bài 53. Giải phương trình $2x^2 \cdot \sin x + x \cdot \cos x + \sqrt[3]{2x+1} = x^3 - x^5 + x + 1$

(Đề thi chọn đội tuyển Hà Nội)

Lời giải.

Ta thấy phương trình không có nghiệm $x = -\frac{1}{2}$ nên ta chỉ xét $x \neq -\frac{1}{2}$.

Xét hàm số $f(x) = 2x^2 \cdot \sin x + x \cdot \cos x + \sqrt[3]{2x+1} + x^5 - x^3 - x - 1, x \neq -\frac{1}{2}$.

Ta có $f'(x) = 3x \cdot \sin x + (2x^2 + 1) \cos x + \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}} + 5x^4 - 3x^2 - 1$

Ta sẽ chứng minh đánh giá mạnh hơn là $3x \cdot \sin x + (2x^2 + 1) \cos x + 5x^4 - 3x^2 - 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} (*)$

Ta thấy biểu thức này không thay đổi khi thay x bởi $-x$ nên ta chỉ cần xét $x \geq 0$.

Ta cần chứng minh bất đẳng thức sau $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}, \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}, \forall x \geq 0$.

Xét hàm số $g(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}, x \geq 0$, ta có

$g'(x) = -\sin x + x, g''(x) = -\cos x + 1 \geq 0 \Rightarrow g'(x) = -\sin x + x \geq g'(0) = 0$. Do đó, $g(x)$ là hàm đồng biến trên $[0, +\infty)$, suy ra $g(x) \geq g(0) = 0 \Rightarrow \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \geq 0 \Rightarrow \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

Tương tự, ta cũng có $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$.

Từ hai đánh giá này, ta có

$$3x \cdot \sin x + (2x^2 + 1) \cos x + 5x^4 - 3x^2 - 1 \geq 3x(x - \frac{x^3}{6}) + (2x^2 + 1)(1 - \frac{x^2}{2}) + 5x^4 - 3x^2 - 1.$$

Hơn nữa, ta cũng có

$$3x(x - \frac{x^3}{6}) + (2x^2 + 1)(1 - \frac{x^2}{2}) + 5x^4 - 3x^2 - 1 = 3x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{3}{2}x^2 - x^4 + 1 + 5x^4 - 3x^2 - 1 = \frac{7x^4 + 3x^2}{2} \geq 0$$

nên $3x \cdot \sin x + (2x^2 + 1) \cos x + 5x^4 - 3x^2 - 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó (*) đúng hay $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(x)$ là hàm đồng biến nên phương trình đã cho có không quá một nghiệm. Mặt khác $f(0) = 0$ nên 0 là nghiệm của phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 0$.

Nhận xét. Điểm quan trọng nhất của bài toán là chứng minh $f'(x) > 0$, nhưng đó là một biểu thức vừa có chứa cả $\sin x, \cos x$ và căn thức, đồng thời số hạng tự do của hàm số lại âm nên thật sự rất khó dự đoán được phải làm gì trong trường hợp này. Việc bỏ đi biểu thức chứa căn ở trên rất quan trọng vì nó giúp ta có được một hàm số chẵn và chỉ cần xét biểu thức trên miền $[0, +\infty)$;

trên miền đó, ta còn có thêm hai đánh giá $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}, \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ nên bài toán đưa về chứng minh bất đẳng thức thông thường. Nếu không đưa các yếu tố lượng giác về đa thức thì phải tiếp tục đạo hàm và chưa chắc điều này đã khả thi. Bất đẳng thức (*) có thể làm mạnh thêm nữa là

$$3x \cdot \sin x + (2x^2 + 1) \cos x + \frac{3}{2}x^4 - \frac{9}{2}x^2 - 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 54. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y+3)^2 = -(y+3)(x+z-2) \\ x^2 + 5x + 9z - 7y - 15 = -3yz \\ 8x^2 + 18y^2 + 18xy + 18yz = -84x - 72y - 24z - 176 \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển ĐHSP Hà Nội, ngày 2)

Lời giải.

Đặt $a = x + 2, b = y + 3$.

Thay vào từng phương trình của hệ đã cho, ta được

$$(x+2)^2 + (y+3)^2 = -(y+3)(x+z-2) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = -b(a+z-4) \Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 + bz - 4b = 0,$$

$$x^2 + 5x + 9z - 7y - 15 = -3yz \Leftrightarrow a^2 + a - 7b + 3bz = 0$$

$$8x^2 + 18y^2 + 18xy + 18yz = -84x - 72y - 24z - 176$$

$$\Leftrightarrow 8a^2 - 2a + 18b^2 - 72b + 18ab + 18bz - 30z + 94 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8a^2 - 2a + 18(b^2 + ab + bz - 4b) - 30z + 94 = 0$$

Suy ra
$$\begin{cases} a^2 + ab + b^2 + bz - 4b = 0 \\ a^2 + a - 7b + 3bz = 0 \\ 8a^2 - 2a + 18(b^2 + ab + bz - 4b) - 30z + 94 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Từ phương trình thứ nhất và phương trình thứ ba, ta có

$$8a^2 - 2a - 18a^2 - 30z + 94 = 0 \Leftrightarrow 10a^2 + 2a + 30z - 94 = 0 \Leftrightarrow z = -\frac{5a^2 + a - 47}{15}.$$

Thay vào phương trình thứ hai, ta có

$$a^2 + a - 7b - b\left(\frac{5a^2 + a - 47}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{5a^2 + a - 12}{5}\right)b = a^2 + a \Leftrightarrow b = \frac{5(a^2 + a)}{5a^2 + a - 12}.$$

Nhân phương trình thứ nhất của hệ (*) với 3 rồi trừ cho phương trình thứ hai, ta được

$$2a^2 - a + 3ab + 3b^2 - 5b = 0$$

Thay $z = -\frac{5a^2 + a - 47}{15}$ và $b = \frac{5(a^2 + a)}{5a^2 + a - 12}$ vào phương trình này, ta có

$$\begin{aligned}
& 2a^2 - a + \frac{15a(a^2 + a)}{5a^2 + a - 12} + 3 \left[\frac{5(a^2 + a)}{5a^2 + a - 12} \right]^2 - \frac{25(a^2 + a)}{5a^2 + a - 12} = 0 \\
& \Leftrightarrow (2a^2 - a)(5a^2 + a - 12)^2 + [15a(a^2 + a) - 25(a^2 + a)](5a^2 + a - 12) + 75(a^2 + a)^2 = 0 \\
& \Leftrightarrow 50a^6 + 70a^5 - 208a^4 - 94a^3 + 482a^2 + 156a = 0 \\
& \Leftrightarrow a(a + 2)(5a^2 - 14a + 13)(5a^2 + 11a + 3) = 0 \\
& \Leftrightarrow a = 0 \vee a = -2 \vee a = \frac{-11 \pm \sqrt{61}}{10}
\end{aligned}$$

Tương ứng với các giá trị này, ta tìm được bốn nghiệm của hệ đã cho là

$$\begin{aligned}
(x, y, z) &= (-2, -3, \frac{47}{15}), (-4, \frac{-4}{3}, \frac{29}{15}), (-\frac{31 + \sqrt{61}}{10}, \frac{2\sqrt{61} - 28}{15}, \frac{13 - \sqrt{61}}{15}), \\
&(\frac{\sqrt{61} - 31}{10}, -\frac{2\sqrt{61} + 28}{15}, \frac{39 + \sqrt{61}}{15})
\end{aligned}$$

Nhận xét. Việc đặt ẩn phụ $a = x + 2, b = y + 3$ đã làm cho hệ đã cho đơn giản đi khá nhiều nhưng các liên hệ phức tạp giữa các biến thì vẫn còn. Bài toán ở đây có thể được giải theo một cách nhân các phương trình cho một đại lượng thích hợp rồi cộng lại nhưng rõ ràng điều này không phải dễ dàng thực hiện được. Việc dùng phép thế tuy phức tạp nhưng lại rất tự nhiên và cũng may mắn là phương trình cuối không có chứa căn gì nữa. Ở đây tính toán khá nặng và cũng không dễ dàng mà tự tin biến đổi biểu thức nhận được sau phép thế khi chưa chắc gì nó đã có nghiệm đẹp mà đánh giá.

Bài 55.

$$\text{Tìm } x, y, z \text{ thỏa mãn hệ } \begin{cases} 2z(x + y) + 1 = x^2 - y^2 \\ y^2 + z^2 = 1 + 2xy + 2zx - 2yz \\ y(3x^2 - 1) = -2x(x^2 + 1) \end{cases}$$

(Đề thi chọn đội tuyển trường ĐH KHTN Hà Nội, vòng 3)

Lời giải.

Từ phương trình thứ ba của hệ, ta có

$$y = \frac{-2x(x^2 + 1)}{(3x^2 - 1)} \Rightarrow x + y = \frac{(3x^3 - x) - 2x(x^2 + 1)}{(3x^2 - 1)} \Leftrightarrow x + y = \frac{x^3 - 3x}{3x^2 - 1}.$$

$$\text{Đặt } x = \tan \varphi, \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos \varphi \neq 0. \text{ Ta có } \tan \varphi + y = \frac{\tan^3 \varphi - 3 \tan \varphi}{3 \tan^2 \varphi - 1} \Leftrightarrow y = \tan 3\varphi - \tan \varphi.$$

Từ phương trình thứ nhất của hệ, ta có

$$\begin{aligned} z &= \frac{x^2 - y^2 - 1}{2(x+y)} = \frac{(2 \tan \varphi - \tan 3\varphi) \cdot \tan 3\varphi - 1}{2 \tan 3\varphi} = \frac{2 \tan \varphi \cdot \tan 3\varphi - \tan^2 3\varphi - 1}{2 \tan 3\varphi} \\ &= \tan \varphi - \frac{\tan 3\varphi + \cot 3\varphi}{2} = \tan \varphi - \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 3\varphi}{\cos 3\varphi} + \frac{\cos 3\varphi}{\sin 3\varphi} \right) = \tan \varphi - \frac{1}{\sin 6\varphi} \end{aligned}$$

Từ phương trình thứ hai của hệ, ta có

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2zx + 2yz &= 1 + x^2 \Leftrightarrow (y + z - x)^2 = 1 + x^2 \\ \Leftrightarrow (\tan 3\varphi - \tan \varphi + \tan \varphi - \frac{1}{\sin 6\varphi} - \tan \varphi)^2 &= 1 + \tan^2 \varphi \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\sin 3\varphi}{\cos 3\varphi} - \frac{1}{2 \sin 3\varphi \cos 3\varphi} - \tan \varphi \right)^2 &= \frac{1}{\cos^2 \varphi} \Leftrightarrow \left(\frac{2 \sin^2 3\varphi - 1}{2 \sin 3\varphi \cos 3\varphi} - \tan \varphi \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\cos 6\varphi}{\sin 6\varphi} + \tan \varphi \right)^2 &= \frac{1}{\cos^2 \varphi} \Leftrightarrow \left(\frac{\cos 6\varphi \cos \varphi + \sin 6\varphi \sin \varphi}{\sin 6\varphi \cos \varphi} \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\cos 5\varphi}{\sin 6\varphi \cos \varphi} \right)^2 &= \frac{1}{\cos^2 \varphi} \Leftrightarrow \cos 5\varphi \cos \varphi = \pm \sin 6\varphi \cos \varphi \Leftrightarrow \cos 5\varphi = \pm \cos \left(\frac{\pi}{2} - 6\varphi \right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 5\varphi = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 6\varphi \right) \\ \cos 5\varphi = \cos \left(\frac{\pi}{2} + 6\varphi \right) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 5\varphi = \pm \left(\frac{\pi}{2} - 6\varphi \right) + k2\pi \\ 5\varphi = \pm \left(\frac{\pi}{2} + 6\varphi \right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{22} + \frac{k2\pi}{11}, \varphi = \frac{\pi}{2} - k2\pi \\ \varphi = -\frac{\pi}{22} + \frac{k2\pi}{11}, \varphi = -\frac{\pi}{2} - k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Do $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ nên hai họ nghiệm $\varphi = \pm \frac{\pi}{22} - k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ không thỏa mãn.

Với hai họ nghiệm $\varphi = \pm \frac{\pi}{22} + \frac{k2\pi}{11}$, ta tìm được tất cả 10 giá trị φ thỏa mãn là

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{22}, \pm \frac{3\pi}{22}, \pm \frac{5\pi}{22}, \pm \frac{7\pi}{22}, \pm \frac{9\pi}{22}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm là

$$(x, y, z) = \left(\tan \varphi, \tan 3\varphi - \tan \varphi, \tan \varphi - \frac{1}{\sin 6\varphi} \right), \varphi = \pm \frac{\pi}{22}, \pm \frac{3\pi}{22}, \pm \frac{5\pi}{22}, \pm \frac{7\pi}{22}, \pm \frac{9\pi}{22}.$$

Nhận xét. Cách dùng lượng giác ở đây có lẽ là con đường duy nhất để giải bài này bởi vì với các nghiệm như trên thì không thể có cách đại số nào mà tìm ra được. Ý tưởng quan trọng nhất này xuất phát từ biểu thức của $x + y$ hoàn toàn giống hệ số của khai triển $\tan 3\varphi$. Do đó, bài này tuy biến đổi phức tạp nhưng ý tưởng cũng khá tự nhiên!