

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ 02

Câu 41: Cho số phức z thỏa mãn $(2-i)z - (2+i)\bar{z} = 2i$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ bằng:

- A.** 1. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **D.** 2.

Lời giải:

Chọn B

Go! $z = x + yi$; $\bar{z} = x - yi$

$$(2-i)z - (2+i)\bar{z} = 2i \Leftrightarrow (2-i)(x+yi) - (2+i)(x-yi) = 2i$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2yi - xi + y - (2x - 2yi + xi + y) = 2i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2x - y = 0 \\ 2y - x + 2y - x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2x - 4y = -2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}}$$

Xét: $f(x) = \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \Rightarrow f'(x) = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{5}$

Để thấy hàm số nhỏ nhất tại $x = -\frac{1}{5} \Rightarrow |z|_{\min} = \sqrt{\frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

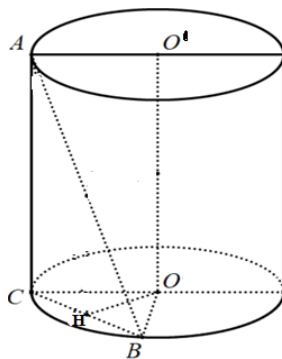
Câu 42: Cho hình trụ có tâm hai đường tròn đáy lần lượt là O và O' , bán kính đáy hình trụ bằng a . Trên đường tròn đáy (O) và (O') lần lượt lấy hai điểm A, B sao cho AB tạo với trục của hình trụ một

góc 30° và có khoảng cách đến trục của hình trụ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích khối chóp $O.O'AB$

- A. $\frac{2\pi a^3}{3}$. B. $\frac{a^3}{4}$. C. $\frac{3a^3}{4}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Kẻ đường sinh AC của hình trụ $\Rightarrow AC \parallel OO' \Rightarrow (AB, OO') = (AB, AC) = \angle BAC = 30^\circ$

$$OO' \parallel AC \subset (ABC) \Rightarrow OO' \parallel (ABC) \Rightarrow d(OO', AB) = d(OO', (ABC)) = d(O, (ABC))$$

$$\text{Kẻ } OH \perp BC \Rightarrow OH \perp (ABC) \Rightarrow d(O, (ABC)) = OH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \frac{a}{2} \Rightarrow BC = 2BH = a$$

$$\angle BAC = 30^\circ \Rightarrow AC = \frac{BC}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}a$$

$$\Rightarrow V_{O'.OAB} = V_{O'.OBC} = \frac{1}{3} S_{OBC} \cdot OO' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} OH \cdot BC \cdot OO' = \frac{a^3}{4}$$

Câu 43: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2023$ và $1 \leq y \leq 2023$ và $4^{x+1} + \log_2(y+3) = 2^{y+4} + \log_2(2x+1)$.

A. 2022

B. 1011

C. 4039

D. 4037

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } 4^{x+1} + \log_2(y+3) = 2^{y+4} + \log_2(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 2^{2x+1} - \log_2(2x+1) = 2 \cdot 2^{y+3} - \log_2(y+3).$$

Xét hàm số $f(u) = 2 \cdot 2^u - \log_2 u$ với $u \geq 1$.

Ta có $f'(u) = 2 \cdot 2^u \ln 2 - \frac{1}{u \ln 2} > 0, \forall u > 1$ nên hàm số $y = f(u)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

$$\text{Khi đó } f(2x+1) = f(y+3) \Leftrightarrow 2x+1 = y+3 \Leftrightarrow y = 2x-2$$

$$\text{Vì } 1 \leq y \leq 2023 \text{ nên } 1 \leq 2x-2 \leq 2023 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{2025}{2}$$

$$\text{Suy ra } x \in \{2; 3; \dots; 1012\}$$

Vậy có 1011 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f'(x) = 2xe^x, \forall x \in \mathbb{R};$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2f(x); y = f'(x)$ và trục tung bằng

A. $\frac{2e\sqrt{e} - 5}{2}$

B. $3 - e$

C. $3 - e^2$

D. $\frac{e\sqrt{e} - 5}{2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$f(x) + f'(x) = 2xe^x \Leftrightarrow e^x f(x) + e^x f'(x) = 2xe^{2x} \Leftrightarrow [e^x f(x)]' = 2xe^{2x}$$

nên $e^x f(x) = \int x d(e^{2x}) = xe^{2x} - \int e^{2x} dx = xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + C$

Mặt khác $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ suy ra $e^{\frac{1}{2}} f\left(\frac{1}{2}\right) = C \Leftrightarrow C = 0$

Do đó $f(x) = xe^x - \frac{1}{2}e^x$

Phương trình hoành độ giao điểm của $y = 2f(x) = 2xe^x - e^x$ và $y = f'(x) = xe^x + \frac{1}{2}e^x$ là $2xe^x - e^x = xe^x + \frac{1}{2}e^x \Leftrightarrow xe^x = \frac{3}{2}e^x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2f(x)$; $y = f'(x)$ và trục tung bằng

$$S = \int_0^{\frac{3}{2}} |2f(x) - f'(x)| dx = \left| \int_0^{\frac{3}{2}} \left(x - \frac{3}{2}\right) e^x dx \right| = \left| \int_0^{\frac{3}{2}} \left(x - \frac{3}{2}\right) d(e^x) \right|$$

$$= \left| \left(x - \frac{3}{2}\right) e^x \Big|_0^{\frac{3}{2}} - \int_0^{\frac{3}{2}} e^x dx \right| = \left| \left(x - \frac{3}{2}\right) e^x \Big|_0^{\frac{3}{2}} - e^x \Big|_0^{\frac{3}{2}} \right| = -\frac{5}{2} + e^{\frac{3}{2}}.$$

Câu 45: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 8$ và điểm $M\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$. Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B phân biệt. Tính diện tích lớn nhất của tam giác OAB .

A. $2\sqrt{2}$.

B. $2\sqrt{7}$.

C. 4.

D. $\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: mặt cầu (S) có tâm $O(0; 0; 0)$ và $R = 2\sqrt{2}$.

$OM = 1 < R \Rightarrow$ điểm M nằm trong mặt cầu (S) .

Gọi $h = d(O, d) \leq OM = 1$, khi đó ta có: $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}h \cdot AB = \frac{1}{2}h \cdot 2\sqrt{OA^2 - h^2} = \sqrt{8h - h^3}$

Xét hàm $f(x) = \sqrt{8x - x^3} \quad \forall x \in [0; 1]$

$S_{\Delta OAB}$ đạt giá trị lớn nhất là $\max_{[0; 1]} f(x) = \sqrt{7} \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow OM \perp d$

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang vuông tại đỉnh A và D . Biết độ dài $AB = 4a, AD = 3a, CD = 5a$ và tam giác SBC đều và góc giữa mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

A. $\frac{27\sqrt{10}a^3}{4}$.

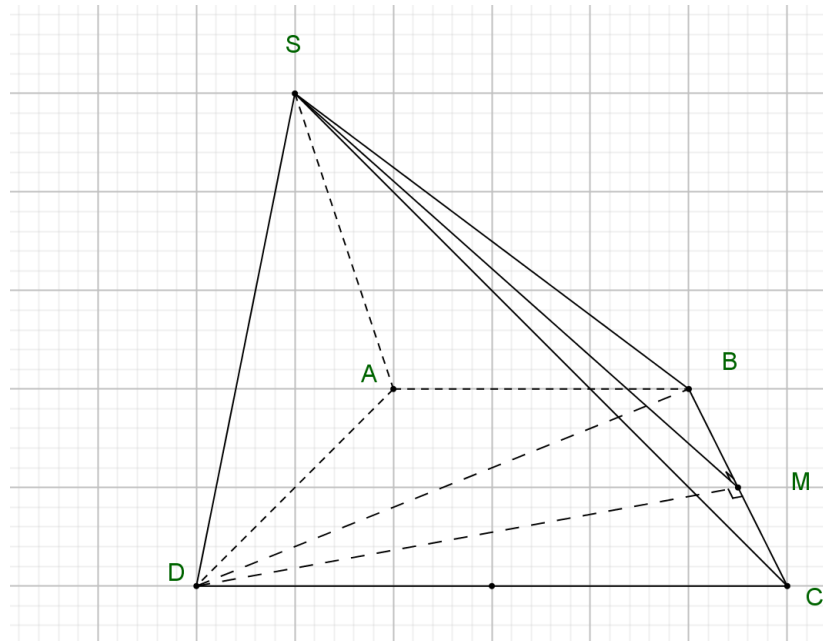
B. $\frac{27a^3}{4}$.

C. $\frac{27\sqrt{10}a^3}{8}$!

D. $\frac{27a^3}{8}$.

Lời giải

Chọn C

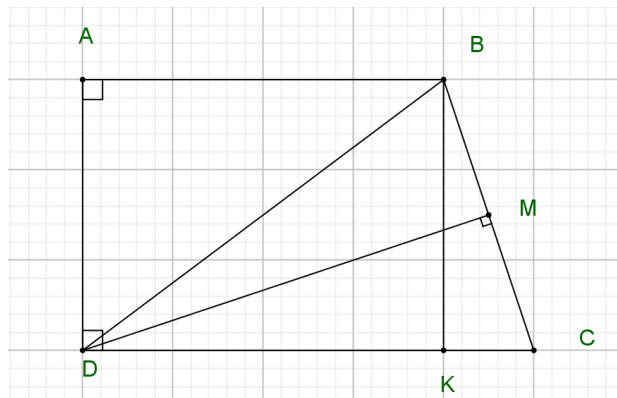


Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow SM \perp BC$ (1) (Do tam giác SBC đều).

Ta có $DB = DC = 5a \Rightarrow DM \perp BC$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $BC \perp (SDM)$.

Ta có $((SBC), (ABCD)) = \angle SMD = 60^\circ$.



Gọi V là thể tích khối chóp $S.ABCD$.

$$\left\{ \begin{array}{l} dt(\Delta ABD) = 6a^2 \\ dt(\Delta BDC) = \frac{15}{2}a^2 \end{array} \Rightarrow \frac{dt(\Delta ABD)}{dt(\Delta CBD)} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{V_{S.ABD}}{V_{S.CBD}} = \frac{4}{5} \Rightarrow V_{S.ABD} = \frac{4}{9}V.$$

$$S.ABCD \Rightarrow V = V_{S.ABD} + V_{S.BCD} = \frac{4}{9}V + 2V_{S.DBM} \Rightarrow V = \frac{18}{5}V_{B.SMD}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} BC = \sqrt{10}a \Rightarrow SM = \frac{a\sqrt{30}}{2} \\ DM = \frac{3\sqrt{10}}{2} \end{array} \Rightarrow dt(SDM) = \frac{1}{2}MD.MS.\sin 60^\circ = \frac{45a^2}{8}.$$

Ta có

Ta có $V_{B.SMD} = \frac{1}{3} BM.d(\Delta SMD) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{45a^2}{8} = \frac{15}{16} a^3 \sqrt{10} \Rightarrow V = \frac{18}{5} \cdot \frac{15}{16} a^3 \sqrt{10} = \frac{27a^3 \sqrt{10}}{8}$.

- Câu 47:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{2}$ và $\Delta': \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{2}$. Mặt phẳng $(P): 2x + my + nz + p = 0$ ($m, n, p \in \mathbb{R}$) chứa đường thẳng Δ tạo với đường thẳng Δ' một góc lớn nhất. Khi đó tích của m, n, p bằng:
- A. 60 B. -30 C. -20 D. 30.

Lời giải

Chọn C

Dễ thấy rằng Δ và Δ' cùng đi qua điểm $A(3;3;2) \Rightarrow A(3;3;2) \in (P)$.

Trên Δ' lấy H sao cho H không trùng với A .

Gọi H', H'' lần lượt là hình chiếu của H trên Δ và (P) .

Khi đó $d(H, (P)) \leq d(H, \Delta) \Leftrightarrow HH'' \leq HH' \Leftrightarrow \frac{HH''}{HA} \leq \frac{HH'}{HA} \Leftrightarrow \sin(\Delta', (P)) \leq \sin(\Delta', \Delta)$
 $\Rightarrow (\Delta', (P)) \leq (\Delta', \Delta)$. Đẳng thức xảy ra khi $H' \equiv H''$ hay Δ là hình chiếu của Δ' trên (P) .

Khi đó $n_{(P)} = \left[\begin{matrix} \vec{u}_\Delta, \left[\vec{u}_\Delta, \vec{u}_{\Delta'} \right] \end{matrix} \right] = (-8; 20; -16) = -4(2; -5; 4) \Rightarrow (P): 2x - 5y + 4z + 1 = 0$

- Câu 48:** Trên tập hợp số phức, xét phương trình bậc hai $z^2 - 2(2m-3)z + m^2 = 0 = 0$ (với m là số thực).
 Tính tổng tất cả các giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $2(z_1|z_2| + z_2|z_1|) = |z_1 z_2|$.

A. $\frac{12}{7}$ B. $\frac{185}{63}$ C. 0 D. $\frac{11}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\Delta' = (2m-3)^2 - m^2 = 3m^2 - 12m + 9$; $z_1 + z_2 = 2(2m-3)$; $z_1 z_2 = m^2$

TH1: Nếu $\Delta' = 3m^2 - 12m + 9 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}$ thì $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$.

$$2(z_1|z_2| + z_2|z_1|) = |z_1 z_2| \Rightarrow 4[2(z_1 z_2)^2 + 2(z_1 z_2)|z_1 z_2|] = (z_1 z_2)^2 \Rightarrow 8(m^4 + m^4) = m^4 \Leftrightarrow m = 0$$

Không thỏa mãn điều kiện.

TH2: Nếu $\Delta' = 3m^2 - 12m + 9 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3$ thì z_1, z_2 là hai nghiệm phức và ta có:

$$\sqrt{z_1 z_2} = |z_1| = |z_2| = \sqrt{m^2} = m$$

$$2(z_1|z_2| + z_2|z_1|) = |z_1z_2| \Leftrightarrow 2|z_1|(z_1 + z_2) = |z_1z_2| \Rightarrow 2m \cdot 2(2m - 3) = m^2 \Leftrightarrow m = \frac{12}{7} (t/m)$$

Câu 49: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha): x - 2y - 2z + 5 = 0$. Tìm điểm A trên d sao cho khoảng cách từ A đến mặt phẳng (α) bằng 3.

- A. $A(0; 0; -1)$ B. $A(-2; 1; -2)$ C. $A(2; -1; 0)$ D. $A(4; -2; -1)$

Lời giải

Chọn C

Phương trình tham số của đường thẳng d :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

$$A \in d \Rightarrow A(2t; -t; -1+t)$$

$$d(A, (\alpha)) = 3 \Leftrightarrow \frac{|2t - 2(-t) - 2(-1+t) + 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = 3 \Leftrightarrow |2t + 7| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -8 \end{cases}$$

Với

$$t = 1 \Rightarrow A(2; -1; 0)$$

Với $t = -8 \Rightarrow A(-16; 8; -9)$. Đáp án đúng là C với $t = 1$.

Câu 50: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2023; 2023)$ để hàm số $y = |8^x - 3(m+2)4^x + 3m(m+4)2^x|$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$?

- A. 2022 B. 2020 C. 4039 D. 4037

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = 8^x - 3(m+2)4^x + 3m(m+4)2^x$

Đặt $t = 2^x$. Với $x \in (-\infty; 2) \Rightarrow t \in (0; 4)$

$$\Rightarrow f(t) = t^3 - 3(m+2)t^2 + 3m(m+4)t$$

$$\Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 6(m+2)t + 3m(m+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = m \\ t = m+4 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	m	$m+4$	$+\infty$	
$f'(t)$	+	0	-	0	+

TH 1: $0 < 4 \leq m < m+4$.

Hàm số $y = |f(t)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$ khi:

$$\begin{cases} f(t) \geq 0 \\ f'(t) \geq 0 \end{cases} \forall t \in (0; 4) \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) \geq 0 \forall t \in (0; 4) \\ m \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m+4) \geq 0 \\ m \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 4$$

TH 2: $m \leq 0 < 4 < m+4$

Hàm số $y = |f(t)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$ khi:

$$\begin{cases} f(t) \leq 0 \\ f'(t) \leq 0 \end{cases} \forall t \in (0; 4) \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) \leq 0 \forall t \in (0; 4) \\ 0 \leq m \leq m+4 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m+4) \leq 0 \\ 0 \leq m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$$

TH 3: $m+4 \leq 0$

Hàm số $y = |f(t)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$ khi:

$$\begin{cases} f(t) \geq 0 \\ f'(t) \geq 0 \end{cases} \forall t \in (0; 4) \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) \geq 0 \forall t \in (0; 4) \\ m+4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m+4) \leq 0 \\ m \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ m = 0 \\ m \geq 4 \end{cases}$$

Từ 3 trường hợp và $m \in (-2023; 2023)$ nên có 4039 giá trị nguyên của m .

❗ HẾT ❗