

ĐỀ 61

Câu 1. (6 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = x(1+2\sqrt{1-x^2})$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^{2021} + xy^{2020} = y^{4042} + y^{2022} \\ 7y^4 - 13x + 8 = 2y^4 \sqrt[3]{x(3y^2 - 3x^2 + 1)} \end{cases}$$

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Cho đa giác đều 21 đỉnh. Gọi Ω là tập tất cả các tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 21 đỉnh của đa giác đều này. Chọn ngẫu nhiên một tam giác thuộc tập Ω . Tính xác suất để tam giác được chọn là tam giác nhọn.

b) Chứng minh rằng với mọi $m \neq 2$ hàm số $f(x) = \left| \frac{x^2 + mx - 1}{x^2 + 2x + 3} \right|$ có đúng 4 cực trị.

Câu 3. (5,0 điểm)

a) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $ABC = 60^\circ$. Cạnh $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và vuông góc với đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng 45° . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

b) Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 2. Trên đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm M sao cho $AM = x, (x > 0)$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của C lên AB, MB . Đường thẳng qua hai điểm E và F cắt d tại N . Xác định x để khối tứ diện $BCMN$ có thể tích nhỏ nhất.

Câu 4.(3 điểm)

Trong mặt phẳng (P) cho góc $xOy = 90^\circ$ và tia Oz thỏa mãn $xOz = 30^\circ; zOy = 60^\circ$. Trên tia Oz lấy điểm I sao cho $OI = 2a$. Trên đường thẳng d đi qua O và vuông góc với (P) lấy điểm S sao cho $OS = a$. Mặt phẳng (Q) thay đổi đi qua SI và cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại A, B (A khác O và B khác O).

a) Tính góc giữa (P) và (Q) khi I là trung điểm của AB .

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.OAB$.

Câu 5. (2 điểm)

Giám đốc một rạp chiếu phim đang phân vân trong việc xác định mức giá vé xem phim tại rạp của ông. Theo những ghi chép của mình, ông ta xác định được rằng: nếu giá vé xem phim là 70 ngàn đồng/người thì trung bình có 1000 người đến xem. Nhưng nếu tăng thêm mỗi 5 ngàn/người (hay vé?) thì sẽ mất 100 khách hàng hoặc giảm đi mỗi 5 ngàn/người (vé) thì sẽ có thêm 100 khách hàng trong số trung bình. Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 10 ngàn đồng lợi nhuận cho rạp trong các dịch vụ đi kèm. Hãy giúp Giám đốc rạp phim này xác định xem cần tính giá vé là bao nhiêu để rạp phim có thu nhập lớn nhất.

.....HẾT.....

ĐÁP ÁN

Câu 1: (4 điểm)

1) Giải phương trình $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = x(1+2\sqrt{1-x^2})$

Lời giải

Xét $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} = x(1+2\sqrt{1-x^2}) \quad (1).$

Điều kiện: $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1.$

Khi đó, $(1) \Leftrightarrow 1+\sqrt{1-x^2} = x^2(1+2\sqrt{1-x^2})^2 \Leftrightarrow 1+\sqrt{1-x^2} = x^2(1+4\sqrt{1-x^2}+4(1-x^2)).$

Đặt $u = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \begin{cases} u \in [0;1] \\ u^2 = 1-x^2 \\ x^2 = 1-u^2 \end{cases}$. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} 1+u &= (1-u^2)(1+4u+4u^2) \\ \Rightarrow (1-u)(1+u)(2u+1)^2 - (1+u) &= 0 \\ \Rightarrow (1+u)[(2u+1)^2(1-u)-1] &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u+1=0 \\ 4u^3-3u=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-1 \notin [0;1] \\ u=0 \\ u=-\frac{\sqrt{3}}{2} \notin [0;1] \\ u=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

□ Khi $u=0$ thì $\sqrt{1-x^2}=0 \Leftrightarrow x=\pm 1.$

□ Khi $u=\frac{\sqrt{3}}{2}$ thì $\sqrt{1-x^2}=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}.$

Đối chiếu điều kiện ta có $x=1, x=\frac{1}{2}$ thỏa mãn.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\frac{1}{2}; 1\right\}.$

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^{2021} + xy^{2020} = y^{4042} + y^{2022} \\ 7y^4 - 13x + 8 = 2y^4 \sqrt[3]{x(3y^2 - 3x^2 + 1)} \end{cases}$

Lời giải

$$x^{2021} + xy^{2020} = y^{4042} + y^{2022}$$

+ Nếu $y = 0 \Rightarrow x = 0$ không là nghiệm của hệ.

+ Nếu $y \neq 0$ ta được phương trình $\left(\frac{x}{y}\right)^{2021} + \frac{x}{y} = y^{2021} + y$.

Đặt $f(t) = t^{2021} + t \Rightarrow f'(t) = 2021t^{2020} + 1 > 0$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f'(t) > 0 \\ f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{y} = y \Rightarrow x = y^2 \Rightarrow x > 0. \end{cases}$$

Thay $y^2 = x$ vào phương trình $7y^4 - 13x + 8 = 2y^4 \sqrt[3]{x(3y^2 - 3x^2 + 1)}$ ta được

$$7x^2 - 13x + 8 = 2x^3 \sqrt[3]{x(3x - 3x^2 + 1)}.$$

+ $x = 0$ không là nghiệm của phương trình

+ $x \neq 0$ chia cả 2 vế cho x^2 ta có phương trình $7 - 13\frac{1}{x} + \frac{8}{x^2} = 2x\sqrt[3]{\frac{3}{x} - 3 + \frac{1}{x^2}}$

Đặt $t = \frac{1}{x} (t > 0)$ ta có phương trình:

$$7t - 13t^2 + 8t^3 = 2\sqrt[3]{3t - 3 + t^2} \Leftrightarrow (2t - 1)^3 + 2(2t - 1) = t^2 + 3t - 3 + 2\sqrt[3]{3t - 3 + t^2}$$

Đặt $g(u) = u^3 + 2u \Rightarrow g'(u) = 3u^2 + 2 > 0$.

$$\begin{cases} g'(u) > 0 \\ g(2t - 1) = f(\sqrt[3]{t^2 + 3t - 3}) \Rightarrow 2t - 1 = \sqrt[3]{t^2 + 3t - 3} \end{cases}$$

Ta có $\Leftrightarrow 8t^3 - 12t^2 + 6t - 1 = t^2 + 3t - 3 \Leftrightarrow 8t^3 - 13t^2 + 3t + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (t - 1)(8t^2 - 5t - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{5 + \sqrt{89}}{16} \\ t = \frac{5 - \sqrt{89}}{16} (\text{loại}) \end{cases}$$

+ $t = 1$ ta được $x = 1$ khi đó $y = \pm 1$

+ $t = \frac{5 + \sqrt{89}}{16}$ ta được $x = \frac{-5 + \sqrt{89}}{4}$ khi đó $y = \pm \frac{\sqrt{-5 + \sqrt{89}}}{2}$.

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm là

$$(x; y) = (1; 1), (x; y) = (1; -1), (x; y) = \left(\frac{-5 + \sqrt{89}}{4}; \frac{\sqrt{-5 + \sqrt{89}}}{2}\right), (x; y) = \left(\frac{-5 + \sqrt{89}}{4}; -\frac{\sqrt{-5 + \sqrt{89}}}{2}\right)$$

Câu 2. Chứng minh rằng với mọi $m \neq 2$ hàm số $f(x) = \left| \frac{x^2 + mx - 1}{x^2 + 2x + 3} \right|$ có đúng 4 cực trị.

Lời giải

Cách 1. Đặt $g(x) = \frac{x^2 + mx - 1}{x^2 + 2x + 3} \Rightarrow y = |g(x)| \Rightarrow y' = \frac{g(x).g'(x)}{|g(x)|}$.

Số điểm cực trị của hàm số $y = |g(x)|$ là số nghiệm của phương trình: $g(x).g'(x) = 0$.

Xét $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + mx - 1 = 0$.

Ta thấy $ac = -1 < 0, \forall m \Rightarrow g(x) = 0$ luôn có 2 nghiệm bội lẻ (1).

Xét $g'(x) = 0$.

$\Leftrightarrow (2x + m)(x^2 + 2x + 3) - (2x + 2)(x^2 + mx - 1) = 0 \Leftrightarrow (2 - m)x^2 + 8x + 3m + 2 = 0$

Do $\begin{cases} m \neq 2 \\ \Delta' = 16 - (2 - m)(3m + 2) = 3m^2 - 4m + 12 = 3\left(m - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{32}{3} > 0 \end{cases}$

nên $g'(x) = 0$ cũng có 2 nghiệm bội lẻ (2).

Từ (1) và (2) ta có hàm số $y = \left| \frac{x^2 + mx - 1}{x^2 + 2x + 3} \right|$ có đúng 4 điểm cực trị (ĐPCM)

Cách 2. Đặt $g(x) = \frac{x^2 + mx - 1}{x^2 + 2x + 3} \Rightarrow y = |g(x)| \Rightarrow y' = \frac{g(x).g'(x)}{|g(x)|}$.

Số điểm cực trị của hàm số $y = |g(x)|$ là số nghiệm của phương trình: $g(x).g'(x) = 0$

Xét $g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + mx - 1 = 0$.

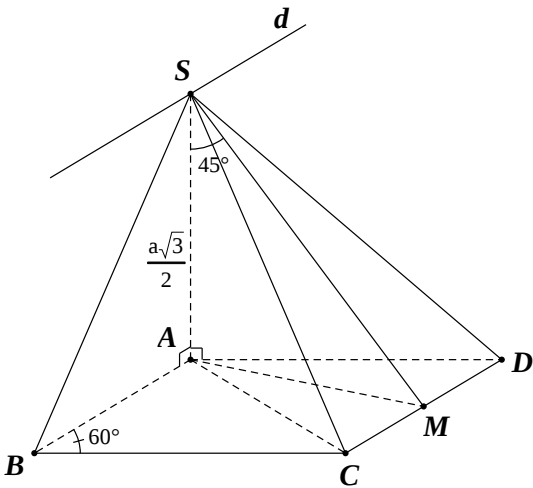
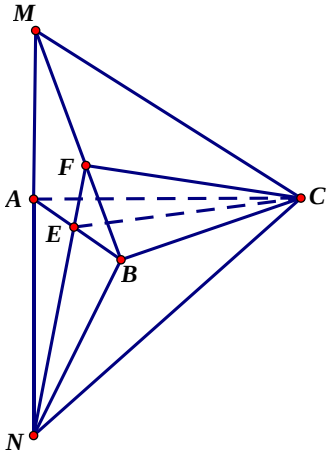
Ta thấy $ac = -1 < 0, \forall m \Rightarrow g(x) = 0$ luôn có 2 nghiệm bội lẻ (1).

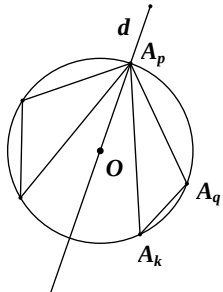
Nhận xét: $g'(x)$ cũng bậc 2, nếu $g'(x)$ không đổi dấu thì $g(x) = 0$ chỉ có tối đa 1 nghiệm. (loại)

Do đó: $g'(x)$ phải đổi dấu, tức là $g'(x)$ phải có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số luôn có đúng 4 cực trị.

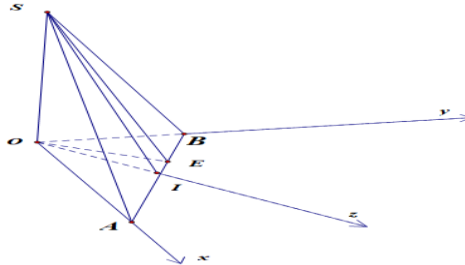
Câu 3 (5,0đ)	a) (2,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $ABC = 60^\circ$. Cạnh $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và vuông góc với đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng 45°. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.	
-------------------------------	--	--

		0,25
	Giao tuyến của 2 mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng d đi qua S và song song với AB và CD	0,25
	$SA \perp AB \Rightarrow SA \perp d$ Tam giác ABC có $AB = BC$ và $\angle ABC = 60^\circ$ $\Rightarrow AC = BC = AD \Rightarrow \triangle SAC = \triangle SAD (c-g-c) \Rightarrow SC = SD \Rightarrow \triangle SCD$ cân tại S. Gọi M là trung điểm của CD suy ra $SM \perp CD$, mà $d \parallel CD$ suy ra $SM \perp d$.	0,5
	Vì $SA \perp d$ và $SM \perp d$ nên $((SAB), (SCD)) = \angle ASM = 45^\circ$. $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AM \Rightarrow \triangle SAM$ vuông cân tại A $\Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = BC = AC = a$	0,5
	Vậy, $V = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot BA \cdot BC \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^3}{4}$.	0,5
	b) (3,0 điểm). Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 2. Trên đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm M sao cho $AM = x, (x > 0)$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của C lên AB, MB. Đường thẳng qua hai điểm E và F cắt d tại N. Xác định x để khối tứ diện $BCM N$ có thể tích nhỏ nhất.	
		0,25

	Ta có $MA \perp (ABC) \Rightarrow MA \perp EC$, kết hợp $EC \perp AB \Rightarrow EC \perp MB$	0,25
	$\begin{cases} MB \perp FC \\ MB \perp EC \end{cases} \Rightarrow MB \perp EF.$	0,5
	Ta có $\triangle NAE \sim \triangle BAM \Rightarrow \frac{NA}{BA} = \frac{AE}{AM} \Rightarrow AM \cdot AN = AE \cdot BA = 2.$	0,5
	$V_{BCMN} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot (AM + AN) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^2 \sqrt{3}}{4} \cdot (AM + AN) \geq \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{AM \cdot AN} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$	0,5
	$V_{BCMN} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow AM = AN.$	0,5
	Vậy $\min V_{BCMN} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ khi $AM = AN = \sqrt{2}$ hay $x = \sqrt{2}.$	0,5
Câu 2a (2,0đ)	Cho đa giác đều 21 đỉnh. Gọi Ω là tập tất cả các tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 21 đỉnh của đa giác đều này. Chọn ngẫu nhiên một tam giác thuộc tập Ω. Tính xác suất để tam giác được chọn là tam giác nhọn.	
		
	Số phần tử của không gian mẫu $n(\Omega) = C_{21}^3$	0,25
	+ Tính số tam giác tù có 3 đỉnh là 3 trong 21 đỉnh của đa giác. Xét đỉnh A_p . Ta đếm số tam giác tù nhận A_p làm đỉnh của góc nhọn (với A_p là một trong các đỉnh của đa giác). Gọi d là đường thẳng đi qua A_p và tâm O của đường tròn ngoại tiếp đa giác đều. Ta thấy: Tam giác tù nhận A_p làm đỉnh của góc nhọn thì hai đỉnh còn lại phải cùng phía so với d .	0,5
	Số cách chọn 2 đỉnh cùng phía với d là $2C_{10}^2$ và có 21 cách chọn đỉnh A_p suy ra số tam giác tù là $2 \cdot 21C_{10}^2$. Do mỗi tam giác tù có hai góc nhọn nên số tam giác tù được đếm lặp 2 lần. Do đó số tam giác tù là: $21C_{10}^2$.	0,5

	+ Tính số tam giác vuông có 3 đỉnh là 3 trong 21 đỉnh của đa giác. Cạnh huyền của tam giác vuông là đường kính của đường tròn ngoại tiếp đa giác đều. Mà đa giác đều có lẻ đỉnh nên không tồn tại hai đỉnh của đa giác đối xứng nhau qua O. Vậy số tam giác vuông là 0.	0,5
	Số tam giác nhọn là: $C_{21}^3 - 21.C_{10}^2$. Vậy $P = \frac{C_{21}^3 - 21.C_{10}^2}{C_{21}^3}$.	0,25

Câu 4



Đặt $OA = x, OB = y (x, y > 0)$.

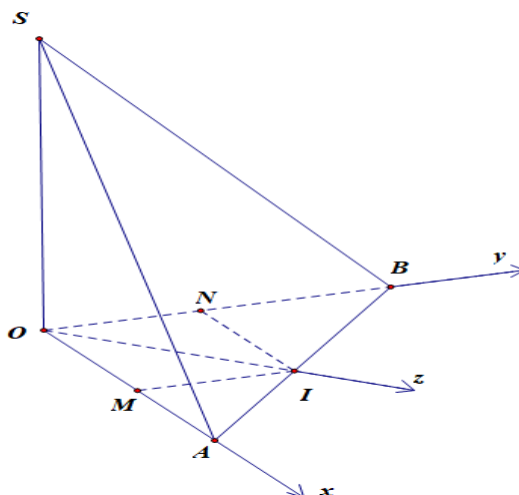
1) Khi I là trung điểm của AB suy ra $AB = 2AI = 2BI = 2OI = 4a$ nên $OAI = 30^\circ$, $OBI = 60^\circ$. Khi đó $x = 2a\sqrt{3}, y = 2a$ nên nếu gọi E là chân đường vuông góc hạ từ O xuống AB ta có góc giữa $(P), (Q)$ bằng góc SEO .

$$\text{Lại có } OE = \frac{OA \cdot OB}{AB} = a\sqrt{3} \text{ suy ra } \tan SEO = \frac{SO}{OE} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow SEO = 30^\circ.$$

2) M, N lần lượt là hình chiếu của I lên Ox, Oy suy ra $OM = a\sqrt{3}, ON = a$ và do đó $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \frac{a\sqrt{3}}{x}\overrightarrow{OA} + \frac{a}{y}\overrightarrow{OB}$. Vì A, I, B thẳng hàng nên ta có

$$\frac{a\sqrt{3}}{x} + \frac{a}{y} = 1 \geq 2a\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{xy}} \Leftrightarrow xy \geq 4\sqrt{3}a^2 \text{ và dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} x = 2a\sqrt{3} \\ y = 2a \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } V_{S.OAB} = \frac{1}{6}axy \geq \frac{2\sqrt{3}a^3}{3}. \text{ Vậy thể tích khối chóp } S.OAB \text{ nhỏ nhất } V_{\min} = \frac{2\sqrt{3}a^3}{3}.$$



Câu 5. Lời giải

Gọi giá vé sau khi điều chỉnh là $70 + 5x$ (ngàn đồng), điều kiện ($x > -14$).

(với $|x|$ là số lượt điều chỉnh tăng ($x > 0$) hoặc giảm ($x < 0$) 5 ngàn đồng trên một vé)

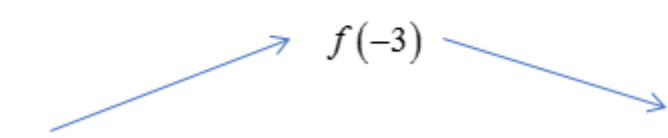
Số khách trung bình tới rạp sau khi điều chỉnh giá vé là: $1000 - 100x$.

Tổng thu nhập sau khi điều chỉnh giá vé:

$$f(x) = (70 + 5x + 10)(1000 - 100x) = (80 + 5x)(1000 - 100x) = -500x^2 - 3000x + 80000.$$

$$f'(x) = -1000x - 3000; f'(x) = 0 \Leftrightarrow -1000x - 3000 = 0 \Leftrightarrow x = -3.$$

Bảng biến thiên:

x	-14	-3	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0 $-$
$f(x)$			

Từ bảng biến thiên suy ra $\max_{(-14; +\infty)} f(x) = f(-3)$.

Vậy giá vé cần áp dụng là: $70 + 5x = 70 + 5(-3) = 55$ ngàn đồng.

Cách đánh giá dùng bất Cusi:

$$\begin{aligned} f(x) &= (70 + 5x + 10)(1000 - 100x) = (80 + 5x)(1000 - 100x) \\ &= 500(16 + x)(10 - x) \leq 500 \left(\frac{16 + x + 10 - x}{2} \right)^2 = 500 \cdot 13^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \max_{(-14; +\infty)} f(x) = 84.500 \Leftrightarrow x = -3$$

Lời giải của PB2:

Gọi x là giá vé sau điều chỉnh.

Suy ra số khách đến xem sau khi điều chỉnh giá vé là $1000 + 20(70 - x) = 2400 - 20x$.

Tổng thu nhập sau khi điều chỉnh vé là $(x + 10)(2400 - 20x) = -20x^2 + 2200x + 24000$

Xét $f(x) = -20x^2 + 2200x + 24000$. Vì $f(x)$ là tam thức bậc hai có hệ số cao nhất âm nên ta có $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 55$.

Vậy giá vé sau điều chỉnh là 55 ngàn đồng thì thu nhập sẽ lớn nhất.