

Bài 1: (4 điểm)

a) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$$x + y + z = 2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 18 \quad \text{và} \quad xyz = -1. \quad \text{Tính giá trị của} \quad S = \frac{1}{xy + z - 1} + \frac{1}{yz + x - 1} + \frac{1}{zx + y - 1}.$$

b) Chứng minh rằng: Nếu $\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}} = a$ thì $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$

Bài 2: (6 điểm) Giải phương trình

a) $4(2x^2 + 1) + 3(x^2 - 2x)\sqrt{2x - 1} = 2(x^3 + 5x)$

b) $\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} - (x - 4)\sqrt{x - 7} - 3x + 28 = 0$

c) $\frac{1}{\sqrt{2x - 1}} + \frac{1}{\sqrt{2x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x + 1}} + \frac{1}{\sqrt{3x - 1}}$

Bài 3: (2 điểm) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{9}{xyz} = 1$$

Bài 4: (7 điểm) Cho đường tròn tâm O và đường thẳng (d) cắt đường tròn tâm O tại hai điểm

B, C ((d) không đi qua O). Trên tia đối của tia BC lấy điểm A (A nằm ngoài đường tròn tâm

O). Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O tại M và N . Gọi I là trung điểm

của BC , AO cắt MN tại H và cắt đường tròn tại các điểm P và Q (P nằm giữa A và O), BC

cắt MN tại K .

a) Chứng minh $AK \cdot AI = AM^2 = AB \cdot AC$

b) Chứng minh bốn điểm B, H, O, C cùng nằm trên một đường tròn

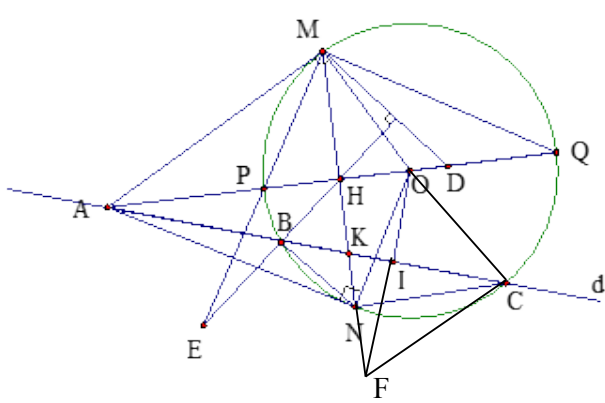
c) Gọi D là trung điểm HQ , từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E . Chứng minh P là trung điểm ME .

Bài 5: (1 điểm) Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b^3 + ab} + \frac{b}{c^3 + bc} + \frac{c}{a^3 + ca} \geq \frac{3}{2}$.

ĐÁP ÁN – BIỂU ĐIỂM

Bài	Ý	Nội dung đáp án	Điểm
1	a	Ta có $xy + z - 1 = xy - x - y + 1 = (x - 1)(y - 1)$ Tương tự $yz + x - 1 = (y - 1)(z - 1)$ và $zx + y - 1 = (z - 1)(x - 1)$ Suy ra $S = \frac{1}{(x-1)(y-1)} + \frac{1}{(y-1)(z-1)} + \frac{1}{(z-1)(x-1)} = \frac{x+y+z-3}{(x-1)(y-1)(z-1)}$ $= \frac{-1}{xyz - (xy + yz + zx) + (x + y + z) - 1} = \frac{1}{xy + yz + zx}$ Ta có $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \Rightarrow xy + yz + zx = -7$ Suy ra $S = -\frac{1}{7}$	2
	b	Đặt $\begin{cases} \sqrt[3]{x} = \sqrt{b} > 0 \\ \sqrt[3]{y} = \sqrt{c} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = b^3 \\ y^2 = c^3 \end{cases}$ Ta có: $\sqrt{b^3 + b^2c} + \sqrt{c^3 + bc^2} = a$ Bình phương hai vế được: $b^3 + b^2c + c^3 + bc^2 + 2\sqrt{b^2c^2(b+c)^2} = a^2$ Biến đổi ta được: $(b+c)^3 = a^2$ $\Rightarrow \sqrt[3]{a^2} = b+c$ hay $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}$ (đpcm)	2
2	a	a) $4(2x^2 + 1) + 3(x^2 - 2x)\sqrt{2x - 1} = 2(x^3 + 5x)$ Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$ Phương trình đã cho được viết lại như sau: $2x^3 - 8x^2 + 10x - 4 - 3x(x - 2)\sqrt{2x - 1} = 0$ $\Leftrightarrow (x - 2)(2x^2 - 4x + 2) - 3x(x - 2)\sqrt{2x - 1} = 0$ $\Leftrightarrow (x - 2) \left[(2x^2 - 4x + 2) - 3x\sqrt{2x - 1} \right] = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ (2x^2 - 4x + 2) - 3x\sqrt{2x - 1} = 0 \end{cases}$ Xét phương trình: $2x^2 - 4x + 2 - 3x\sqrt{2x - 1} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 - 3\sqrt{x^2(2x - 1)} = 0$. Tương đương $2x^2 - 2(2x - 1) - 3\sqrt{x^2(2x - 1)} = 0$ Chia cho $x^2 > 0$	2

	Ta có: $2 - 2 \cdot \left(\frac{2x-1}{x^2} \right) - 3\sqrt{\frac{2x-1}{x^2}} = 0$. Đặt $t = \sqrt{\frac{2x-1}{x^2}} \geq 0$ phương trình mới là: $-2t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$ Với $t = \frac{1}{2}$ ta có: $\sqrt{\frac{2x-1}{x^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 2\sqrt{3} \\ x = 4 - 2\sqrt{3} \end{cases}$	
b	$\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} - (x-4)\sqrt{x-7} - 3x + 28 = 0$ Điều kiện: $x \geq 7$. Để đơn giản ta đặt $\sqrt[3]{x} = t \geq \sqrt[3]{7} \Rightarrow x = t^3$ Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 2t - (t^3 - 4)\sqrt{t^3 - 7} - 3t^3 + 28 = 0 \Leftrightarrow 3t^3 - t^2 + 2t - 28 + (t^3 - 4)\sqrt{t^3 - 7} = 0$ Nhằm được $t = 2$. Nên ta phân tích phương trình thành: $\Leftrightarrow 4t^3 - t^2 + 2t - 32 + (t^3 - 4)(\sqrt{t^3 - 7} - 1) = 0$ $\Leftrightarrow (t - 2) \left[(4t^2 + 7t + 16) + (t^3 - 4) \left(\frac{t^2 + 2t + 4}{\sqrt{t^3 - 7} + 1} \right) \right] = 0$ Để ý rằng $4t^2 + 7t + 16 > 0$ và $t^3 \geq 7$ nên ta có $(4t^2 + 7t + 16) + (t^3 - 4) \left(\frac{t^2 + 2t + 4}{\sqrt{t^3 - 7} + 1} \right) > 0$ Vì vậy phương trình có nghiệm duy nhất $t = 2 \Leftrightarrow x = 8$.	2
c	$\frac{1}{\sqrt{2x-1}} + \frac{1}{\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3x-1}}$ $\begin{cases} a = \sqrt{2x-1} \\ b = \sqrt{2x+1} \\ c = \sqrt{x+1} \\ d = \sqrt{3x-1} \end{cases}$ Điều kiện $x > \frac{1}{2}$. Đặt $(a, b, c, d > 0) \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ Từ đó ta có hệ: $\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \\ a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} cd(a+b) = ab(c+d) \\ a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^2 d^2 (a+b)^2 = a^2 b^2 (c+d)^2 \\ a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \end{cases}$ Suy ra: $c^2 d^2 (a^2 + b^2 + 2ab) = a^2 b^2 (c^2 + d^2 + 2cd)$ $\Leftrightarrow (a^2 + b^2)(a^2 b^2 - c^2 d^2) + 2abcd(ab - cd) = 0$ $\Leftrightarrow (ab - cd) \left[(a^2 + b^2)(ab + cd) + 2abcd \right] = 0$	2

		$\Leftrightarrow ab = cd \text{ (do } a, b, c, d > 0 \text{)}$ Với $ab = cd$, ta có: $\sqrt{2x-1} \cdot \sqrt{2x+1} = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{3x-1}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 1 = (x+1)(3x-1) \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$ Thử lại ta thấy, nghiệm của phương trình đã cho là $x = 2$.	
3		Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{9}{xyz} = 1$ Vai trò của x, y, z như nhau nên không làm mất tính tổng quát giả sử $1 \leq x \leq y \leq z \Rightarrow x^2 \leq xy \leq xz \leq yz \leq xyz$ $\Rightarrow 1 = \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{9}{xyz} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{9}{x^2}$ $\Leftrightarrow 1 \leq \frac{12}{x^2} \Rightarrow x^2 \leq 12 \Rightarrow x \in \{1, 2, 3\}$ Nếu $x = 1 \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{z} + \frac{9}{yz} = 1$ $\Rightarrow z + 1 + y + 9 = yz \Rightarrow yz - z - y + 1 = 11$ $(y-1)(z-1) = 11 \Rightarrow y = 2; z = 12 \text{ hoặc } z = 2; y = 12$ Nếu $x = 2 \Rightarrow \frac{1}{2y} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{2z} + \frac{9}{2yz} = 1$ $\Rightarrow (2y-1)(2z-1) = 23 \Rightarrow y = 1; z = 12 \text{ hoặc } y = 12; z = 1$ Nếu $x = 3 \Rightarrow (3y-1)(3z-1) = 37$ vô nghiệm Vậy $(x, y, z) = (1; 2, 12)$ và các hoán vị của nó	2
	a	 a, Chứng minh $AK \cdot AI = AM^2 = AB \cdot AC$	2

		* Ta có AM, AN là hai tiếp tuyến của (O) cắt nhau tại A nên OA là tia phân giác của góc $\widehat{MON}$. Mà $\triangle OMN$ cân tại O nên $OA \perp MN$. Ta có $\triangle AMO$ vuông tại M có đường cao MH nên suy ra $AH \cdot AO = AM^2$. Ta có $\triangle AHK$ đồng dạng với $\triangle AIO$ (vì $\widehat{AHK} = \widehat{AIO} = 90^\circ$ và $\widehat{HAI}$ chung) nên $AK \cdot AI = AH \cdot AO$. Vậy $AK \cdot AI = AM^2$. (đpcm)	
	b	b, Chứng minh bốn điểm B, H, O, C cùng nằm trên một đường tròn Gọi F là giao điểm của MN với OI $\left. \begin{array}{l} \triangle OHF \sim \triangle OIA (gg) \Rightarrow \begin{cases} OI \cdot OF = HO \cdot OA \\ OH \cdot OA = OM^2 = OC^2 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow OI \cdot OF = OC^2$ $\Rightarrow \triangle OIC \sim \triangle OCF \Rightarrow \widehat{OCF} = \widehat{OIC} = 90^\circ$ Cmtt ta có $\widehat{OBF} = 90^\circ$ mà $\widehat{OHF} = 90^\circ$ Vậy bốn điểm B, C O, H thuộc đường tròn đường kính OF	2
	c	c, Gọi D là trung điểm HQ, từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E. Chứng minh P là trung điểm ME. Ta có M thuộc đường tròn (O) nên $\widehat{PMQ} = 90^\circ$. Xét $\triangle MHE$ và $\triangle QDM$ có $\widehat{MEH} = \widehat{MQD}$ (cùng phụ với $\widehat{BMP}$), $\widehat{EMH} = \widehat{MQD}$ (cùng phụ với $\widehat{MPO}$). Suy ra $\triangle MHE \sim \triangle QDM$. Do đó ta được $\frac{ME}{MQ} = \frac{MH}{DQ}$. Tương tự ta có $\triangle PMH \sim \triangle MQH \Rightarrow \frac{MP}{MQ} = \frac{MH}{HQ} = \frac{MH}{2DQ} \Rightarrow \frac{MP}{MQ} = \frac{1}{2} \frac{ME}{MQ}$ Suy ra $ME = 2MP$. Vậy P là trung điểm ME. (đpcm).	3
5		$a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b^3 + ab} + \frac{b}{c^3 + bc} + \frac{c}{a^3 + ca} \geq \frac{3}{2}$ Giải: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $\frac{a}{b^3 + ab} = \frac{1}{b} - \frac{b}{a + b^2} \geq \frac{1}{b} - \frac{b}{2\sqrt{ab^2}} = \frac{1}{b} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \geq \frac{1}{b} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + 1 \right)$ Tương tự: $\frac{b}{c^3 + bc} \geq \frac{1}{c} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} + 1 \right); \frac{c}{a^3 + ca} \geq \frac{1}{a} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c} + 1 \right)$	1

Cộng ba bất đẳng thức này lại về theo vế, ta được:

$$\frac{a}{b^3+ab} + \frac{b}{c^3+bc} + \frac{c}{a^3+ca} \geq \frac{3}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - \frac{3}{4} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$$

Bài toán được quy về chứng minh:

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} + a \right) + \left(\frac{1}{b} + b \right) + \left(\frac{1}{c} + c \right) \geq 3 + a + b + c = 6$$

. Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng vì theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\frac{1}{a} + a \geq 2, \frac{1}{b} + b \geq 2; \frac{1}{c} + c \geq 2$$

Bài toán được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.