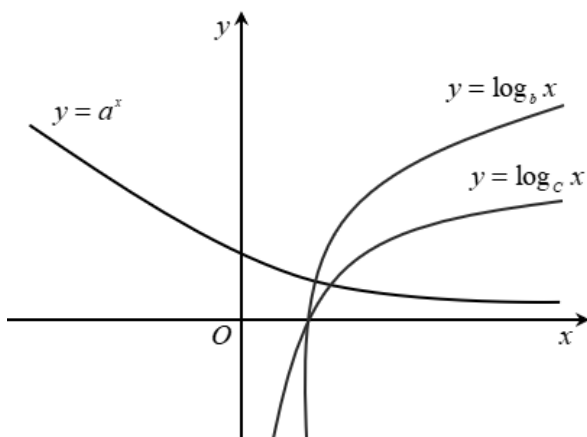


KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ II – MÔN TOÁN 11 – KNTT – NĂM HỌC 2023 – 2024
ĐỀ SỐ 04 – THỜI GIAN LÀM BÀI 90 PHÚT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12.
 Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1.** Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 1)^{-3}$.
 A. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. B. $(1; +\infty)$. C. $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. D. $(-\infty; -1)$.
- Câu 2.** Giả sử a, b và α là các số thực tùy ý ($a > 0, b > 0$). Mệnh đề nào sau đây đúng?
 A. $(ab)^\alpha = a^\alpha + b^\alpha$. B. $(a+b)^\alpha = a^\alpha + b^\alpha$. C. $(ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$. D. $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = a^\alpha \cdot b^{\frac{1}{\alpha}}$.
- Câu 3.** Cho khối lăng trụ có diện tích đáy bằng a^2 và khoảng cách giữa hai đáy bằng $3a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.
 A. $V = \frac{3}{2}a^3$. B. $V = 3a^3$. C. $V = a^3$. D. $V = 9a^3$.
- Câu 4.** Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^2 + \log_4 a$ bằng
 A. $\frac{3}{2}\log_2 a$. B. $\frac{5}{2}\log_2 a$. C. $\log_2 a$. D. $\frac{1}{2}\log_2 a$.
- Câu 5.** Một khối chóp tứ giác đều có chiều cao bằng 6 và cạnh đáy bằng 2. Thể tích của khối chóp đó bằng
 A. 12. B. 8. C. 24. D. 6.
- Câu 6.** Cho các hàm số $y = a^x, y = \log_b x, y = \log_c x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn khẳng định **đúng**?



- A. $b > c > a$. B. $b > a > c$. C. $a > b > c$ D. $c > b > a$.
- Câu 7.** Nghiệm của phương trình $\log_3 x = \frac{1}{3}$ là
 A. $x = 27$. B. $x = \sqrt[3]{3}$. C. $x = \frac{1}{3}$. D. $x = \frac{1}{27}$.
- Câu 8.** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2+x^2} > 16$ là
 A. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. B. $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.
 C. $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. D. $(-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$.
- Câu 9.** Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) , trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?
 A. Nếu $b \perp (P)$ thì $b // a$. B. Nếu $b // (P)$ thì $b \perp a$.
 C. Nếu $b // a$ thì $b \perp (P)$. D. Nếu $b \perp a$ thì $b // (P)$.

- Câu 10.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?
- A. $BD \perp (SAC)$. B. $SA \perp (ABC)$. C. $CD \perp (SBC)$. D. $BC \perp (SAB)$.
- Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là
- A. $a\sqrt{3}$. B. $a\sqrt{2}$. C. $2a$. D. a .
- Câu 12.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Biết $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là
- A. $\frac{3a^3}{4}$. B. $\frac{a^3}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

- Câu 13.** Cho phương trình $\log_3(3^x - 1) \cdot \log_{27}(3^{x+2} - 9) = m$ với m là tham số. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.
- a) Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq 0$.
- b) Khi $m = 1$ phương trình có một nghiệm là $x = \log_3 2$.
- c) Đặt $\log_3(3^x - 1) = t$. Khi đó phương trình đã cho trở thành $t^2 + 2t - 3m = 0$.
- d) Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m > -\frac{1}{3}$.
- Câu 14.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C . Tam giác SAB vuông cân tại S và $BSC = 60^\circ$; $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh SB, SA , φ là góc giữa đường thẳng AB và CM .
- a) Độ dài đoạn thẳng AB bằng $a\sqrt{3}$
- b) Tam giác SBC là tam giác đều
- c) Đường thẳng MN song song với đường thẳng AB và $(AB, CM) = (MN, CM)$
- d) Cosin góc tạo bởi hai đường thẳng AB và CM bằng $\frac{\sqrt{6}}{8}$
- Câu 15.** Ông X gửi vào ngân hàng số tiền 300 triệu đồng theo hình thức lãi kép với lãi suất 6%/năm. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.
- a) Số tiền lãi ông X nhận được ở năm đầu tiên là 6 triệu đồng.
- b) Công thức tính số tiền ông X nhận được cả gốc và lãi sau n năm gửi tiền là $T_n = 300000000 \cdot (1 + 6\%)^n$ đồng.
- c) Số tiền ông X nhận được sau 5 năm là nhiều hơn 410 triệu đồng.
- d) Nếu ông X muốn nhận được số tiền cả gốc lẫn lãi nhiều hơn 500 triệu đồng thì cần gửi ít nhất 9 năm.
- Câu 16.** Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có $AC = 4a$, hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) vuông góc với nhau. Gọi M, O, N lần lượt là trung điểm của AB, AC, CD , qua S dựng đường thẳng $Sx \parallel AB$.
- a) Đường thẳng Sx vuông góc với mặt phẳng (SMN) .
- b) Tứ giác $ABCD$ là một hình bình hành.
- c) Đoạn thẳng SO có độ dài bằng $a\sqrt{2}$.
- d) Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 17. Biết $4^x + 4^{-x} = 14$. Hãy tính giá trị của biểu thức $P = 2^x + 2^{-x}$.

Đáp án:.....

Câu 18. Cho a, b là các số thực dương và a khác 1, thỏa mãn $\log_{a^3} \frac{a^5}{\sqrt[4]{b}} = 2$. Giá trị của biểu thức $\log_a b$ bằng bao nhiêu?

Đáp án:.....

Câu 19. Sau một tháng thi công, công trình xây dựng lớp học từ thiện cho học sinh vùng cao đã thực hiện được một khối lượng công việc. Nếu tiếp tục với tiến độ như vậy thì dự kiến sau đúng 23 tháng nữa công trình sẽ hoàn thành. Để sớm hoàn thành công trình và kịp thời đưa vào sử dụng, đơn vị xây dựng quyết định từ tháng thứ hai tăng 4% khối lượng công việc so với tháng kề trước. Hỏi công trình sẽ hoàn thành ở tháng thứ mấy sau khi khởi công?

Đáp án:.....

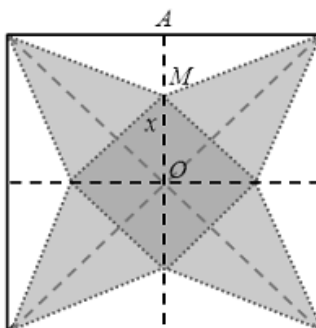
Câu 20. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B có $AC = a\sqrt{3}$, cạnh bên $AA' = 3a$. Tính góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) .

Đáp án:.....

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = 1$, $BC = \sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC .

Đáp án:.....

Câu 22. Cắt một miếng giấy hình vuông như hình bên và xếp thành hình một hình chóp tứ giác đều. Biết các cạnh hình vuông bằng 20 cm, $OM = x$ (cm). Tìm x để hình chóp đều ấy có thể tích lớn nhất (đơn vị: cm)



Đáp án:.....

-----HẾT-----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I.

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Chọn	C	C	B	B	B	D	B	D	D	C	D	B

PHẦN II.

Câu 13	Câu 14	Câu 15	Câu 16
a) S	a) S	a) S	a) Đ
b) S	b) Đ	b) Đ	b) S
c) Đ	c) Đ	c) S	c) Đ
d) Đ	d) S	d) Đ	d) S

PHẦN III.

Câu	17	18	19	20	21	22
Chọn	4	-4	18	60	1	8

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12.

Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Tìm tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 1)^{-3}$.

- A. $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. B. $(1; +\infty)$. C. $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. D. $(-\infty; -1)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Câu 2. Giả sử a , b và α là các số thực tùy ý ($a > 0$, $b > 0$). Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $(ab)^\alpha = a^\alpha + b^\alpha$. B. $(a+b)^\alpha = a^\alpha + b^\alpha$. C. $(ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$. D. $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = a^\alpha \cdot b^{\frac{1}{\alpha}}$.

Lời giải

Chọn C

Công thức đúng: $(ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha$.

Câu 3. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy bằng a^2 và khoảng cách giữa hai đáy bằng $3a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- A. $V = \frac{3}{2}a^3$. B. $V = 3a^3$. C. $V = a^3$. D. $V = 9a^3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có chiều cao lăng trụ $h = 3a$.

Thể tích của khối lăng trụ $V = Bh = 3a^3$.

Câu 4. Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^2 + \log_4 a$ bằng

- A. $\frac{3}{2}\log_2 a$. B. $\frac{5}{2}\log_2 a$. C. $\log_2 a$. D. $\frac{1}{2}\log_2 a$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_2 a^2 + \log_4 a = 2\log_2 a + \frac{1}{2}\log_2 a = \frac{5}{2}\log_2 a$.

Câu 5. Một khối chóp tứ giác đều có chiều cao bằng 6 và cạnh đáy bằng 2. Thể tích của khối chóp đó bằng

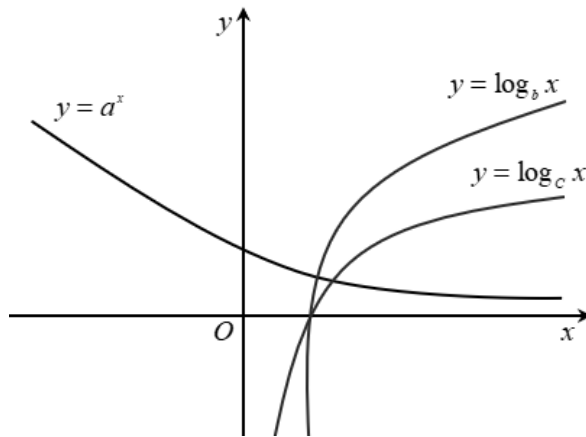
- A. 12. B. 8. C. 24. D. 6.

Lời giải

Chọn B

Thể tích của khối chóp đã cho là $V = \frac{1}{3} S_{\text{day}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 6 = 8$

Câu 6. Cho các hàm số $y = a^x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn khẳng định **đúng**?



A. $b > c > a$.

B. $b > a > c$.

C. $a > b > c$

D. $c > b > a$.

Lời giải

Chọn D

Hàm $y = a^x$ nghịch biến nên $0 < a < 1$.

Hàm $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ đồng biến nên $b, c > 1$

Đường thẳng $y = 1$ cắt ĐTHS $y = \log_c x$, $y = \log_b x$ tại các điểm có hoành độ lần lượt là c và b . Ta thấy $b < c$.

Câu 7. Nghiệm của phương trình $\log_3 x = \frac{1}{3}$ là

A. $x = 27$.

B. $x = \sqrt[3]{3}$.

C. $x = \frac{1}{3}$.

D. $x = \frac{1}{27}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_3 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 3^{\frac{1}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3}$.

Câu 8. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2+x^2} > 16$ là

A. $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

B. $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

C. $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

D. $(-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có. $2^{2+x^2} > 16 \Leftrightarrow 2 + x^2 > 4 \Leftrightarrow x^2 > 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$

Câu 9. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) , trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Nếu $b \perp (P)$ thì $b // a$.

B. Nếu $b // (P)$ thì $b \perp a$.

C. Nếu $b // a$ thì $b \perp (P)$.

D. Nếu $b \perp a$ thì $b // (P)$.

Lời giải

Chọn D

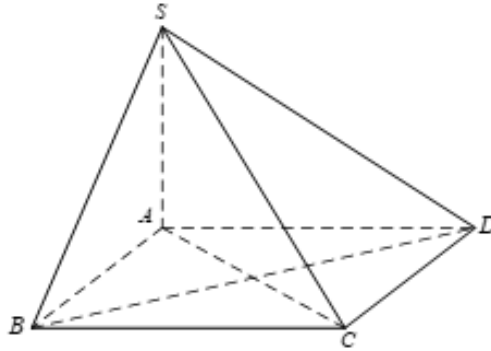
Nếu $b \perp a$ thì $b // (P)$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $BD \perp (SAC)$. B. $SA \perp (ABC)$. C. $CD \perp (SBC)$. D. $BC \perp (SAB)$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$ mà theo đáp án C có $CD \perp (SBC)$, (SBC) và (SAD) có điểm chung S nên (SBC) và (SAD) trùng nhau. Vô lý vậy C sai.

$$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow A \text{ đúng.}$$

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow D \text{ đúng.}$$

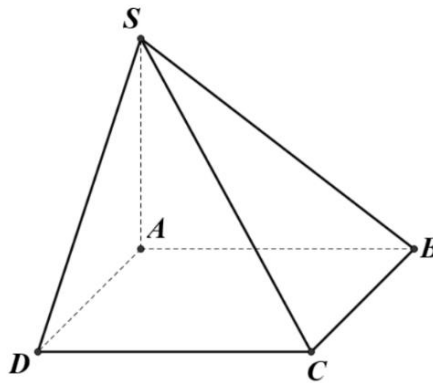
$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp (ABC) \Rightarrow B \text{ đúng.}$$

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là

- A. $a\sqrt{3}$. B. $a\sqrt{2}$. C. $2a$. D. a .

Lời giải

Chọn D



Vì $CD \parallel AB$ nên $d(SB, CD) = d(CD, (SAB)) = d(D, (SAB)) = AD = a$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Biết $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

- A. $\frac{3a^3}{4}$. B. $\frac{a^3}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{4}.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 13. Cho phương trình $\log_3(3^x - 1) \cdot \log_{27}(3^{x+2} - 9) = m$ với m là tham số. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) Điều kiện xác định của phương trình là $x \geq 0$.
- b) Khi $m = 1$ phương trình có một nghiệm là $x = \log_3 2$.
- c) Đặt $\log_3(3^x - 1) = t$. Khi đó phương trình đã cho trở thành $t^2 + 2t - 3m = 0$.
- d) Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m > -\frac{1}{3}$.

Lời giải

a) Sai: Điều kiện xác định: $\begin{cases} 3^x - 1 > 0 \\ 3^{x+2} - 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$.

b) Sai: Khi $m = 1$ phương trình có dạng:

$$\begin{aligned} \log_3(3^x - 1) \cdot \log_{27}(3^{x+2} - 9) &= 1 \Leftrightarrow \log_3(3^x - 1) \cdot \log_{3^3}[3^2(3^x - 1)] = 1 \\ \Leftrightarrow \log_3(3^x - 1) \cdot [\log_3(3^x - 1) + 2] &= 3 \Leftrightarrow [\log_3(3^x - 1)]^2 + 2\log_3(3^x - 1) - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(3^x - 1) = 1 \\ \log_3(3^x - 1) = -3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x - 1 = 3 \\ 3^x - 1 = \frac{1}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 4 \\ 3^x = \frac{28}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_3 4 \\ x = \log_3 \frac{28}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\log_3 2 \\ x = \log_3 \frac{28}{27} \end{cases} \end{aligned}$$

c) Đúng: $\log_3(3^x - 1) \cdot \log_{27}(3^{x+2} - 9) = m \Leftrightarrow \log_3(3^x - 1) \cdot \log_{3^3}[3^2(3^x - 1)] = m$
 $\Leftrightarrow \log_3(3^x - 1) \cdot [\log_3(3^x - 1) + 2] = 3m \Leftrightarrow [\log_3(3^x - 1)]^2 + 2\log_3(3^x - 1) - 3m = 0$.

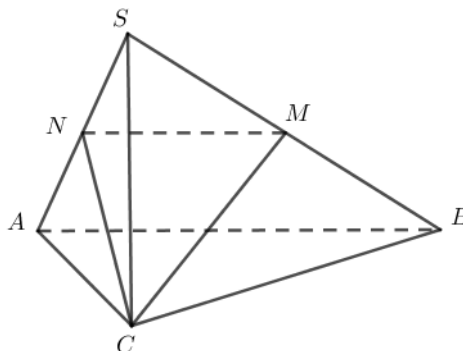
Khi đó đặt $\log_3(3^x - 1) = t$ thì phương trình đã cho trở thành $t^2 + 2t - 3m = 0$ (1).

d) Đúng: Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 1 + 3m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{3}$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C . Tam giác SAB vuông cân tại S và $BSC = 60^\circ$; $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh SB, SA , φ là góc giữa đường thẳng AB và CM .

- a) Độ dài đoạn thẳng AB bằng $a\sqrt{3}$
- b) Tam giác SBC là tam giác đều
- c) Đường thẳng MN song song với đường thẳng AB và $(AB, CM) = (MN, CM)$
- d) Cosin góc tạo bởi hai đường thẳng AB và CM bằng $\frac{\sqrt{6}}{8}$

Lời giải



Đặt $SA = a$. Suy ra $SB = CA = CB = a$ và $AB = a\sqrt{2}$.

Lại có $BSC = 60^\circ$. Suy ra tam giác SBC đều nên $SC = a$.

Suy ra $CM = CN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ hay MN song song với AB .

Khi đó $(AB, CM) = (MN, CM)$. Áp dụng định lý cosin vào tam giác CMN ta có:

$$\cos CMN = \frac{MC^2 + MN^2 - CN^2}{2MC \cdot MN} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\Rightarrow \cos(AB, CM) = \cos(MN, CM) = |\cos CMN| = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

a) Sai: Độ dài đoạn thẳng AB bằng $a\sqrt{2}$

b) Đúng: Tam giác SBC là tam giác đều

c) Đúng: Đường thẳng MN song song với đường thẳng AB và $(AB, CM) = (MN, CM)$

d) Sai: Cosin góc tạo bởi hai đường thẳng AB và CM bằng $\frac{\sqrt{6}}{6}$

Câu 15. Ông X gửi vào ngân hàng số tiền 300 triệu đồng theo hình thức lãi kép với lãi suất 6%/năm. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

a) Số tiền lãi ông X nhận được ở năm đầu tiên là 6 triệu đồng.

b) Công thức tính số tiền ông X nhận được cả gốc và lãi sau n năm gửi tiền là $T_n = 300000000 \cdot (1 + 6\%)^n$ đồng.

c) Số tiền ông X nhận được sau 5 năm là nhiều hơn 410 triệu đồng.

d) Nếu ông X muốn nhận được số tiền cả gốc lẫn lãi nhiều hơn 500 triệu đồng thì cần gửi ít nhất 9 năm.

Lời giải

a) Sai: Vì số tiền lãi năm đầu tiên bằng số tiền gửi nhân với lãi suất: $300 \times 6\% = 18$ triệu đồng.

b) Đúng: Áp dụng công thức: $T_n = A(1 + r)^n$.

Theo giả thiết $A = 3000000$; $r = 6\%$ nên suy ra số tiền nhận được cả gốc và lãi sau n năm gửi tiền là $T_n = 3000000000 \cdot (1 + 6\%)^n$ đồng

c) Sai: Vì số tiền ông nhận được sau 5 năm gửi là $T_5 = 3000000000 \cdot (1 + 6\%)^5 \approx 401467673$ đồng, nhỏ hơn 410 triệu đồng.

d) Đúng: Công thức tính số tiền nhận được cả gốc và lãi sau n năm gửi tiền là $T_n = 3000000000 \cdot (1 + 6\%)^n$ đồng.

Theo giả thiết ta có $T_n > 5000000000 \Leftrightarrow 3000000000 \cdot (1 + 6\%)^n > 5000000000$

$$\Leftrightarrow n > \log_{(1+6\%)} \frac{5}{3} \approx 8,77.$$

Vậy sau ít nhất 9 năm thì ông X thu được số tiền cả gốc lẫn lãi nhiều hơn 500 triệu đồng.

Câu 16. Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có $AC = 4a$, hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) vuông góc với nhau. Gọi M, O, N lần lượt là trung điểm của AB, AC, CD , qua S dựng đường thẳng $Sx \parallel AB$.

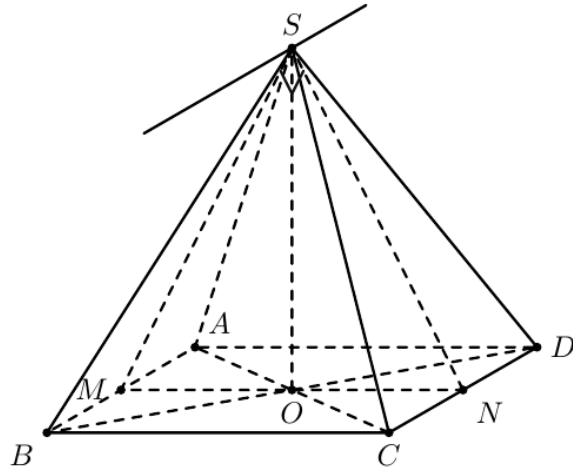
a) Đường thẳng Sx vuông góc với mặt phẳng (SMN)

b) Tứ giác $ABCD$ là một hình bình hành

c) Đoạn thẳng SO có độ dài bằng $a\sqrt{2}$

d) Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

Lời giải



Gọi M, O, N lần lượt là trung điểm của AB, AC, CD nên $AB \perp SM, CD \perp SN$.

Qua S dựng đường thẳng $Sx \parallel AB$.

$$\text{Vì } \begin{cases} AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \end{cases} \text{ nên } (SAB) \cap (SCD) = Sx \parallel AB \parallel CD.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} Sx \perp SM \\ Sx \perp SN \end{cases} \Rightarrow Sx \perp (SMN) \Rightarrow MSN = 90^\circ.$$

Hình chóp $S.ABCD$ đều $\Rightarrow ABCD$ là hình vuông, có $AC = 4a \Rightarrow AB = BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = 2a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow MN = 2\sqrt{2}a \Rightarrow SO = \frac{MN}{2} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy thể tích khối chóp } S.ABCD \text{ là } V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}a \cdot (2a\sqrt{2})^2 = \frac{8\sqrt{2}}{3}a^3.$$

a) Đúng: Đường thẳng Sx vuông góc với mặt phẳng (SMN)

b) Sai: Tứ giác $ABCD$ là một hình vuông do khối chóp này là khối chóp đều

c) Đúng: Đoạn thẳng SO có độ dài bằng $2a\sqrt{2}$

d) Sai: Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{8a^3\sqrt{2}}{3}$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 17. Biết $4^x + 4^{-x} = 14$. Hãy tính giá trị của biểu thức $P = 2^x + 2^{-x}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 4^x + 4^{-x} = 14 \Leftrightarrow (2^x)^2 + (2^{-x})^2 + 2 = 16 \Leftrightarrow (2^x + 2^{-x})^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x + 2^{-x} = 4 \\ 2^x + 2^{-x} = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2^x + 2^{-x} = 4 \text{ (vì } 2^x + 2^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{)}.$$

$$\text{Vậy } P = 4.$$

Câu 18. Cho a, b là các số thực dương và a khác 1, thỏa mãn $\log_{a^3} \frac{a^5}{\sqrt[4]{b}} = 2$. Giá trị của biểu thức $\log_a b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2 = \log_{a^3} \frac{a^5}{\sqrt[4]{b}} = \frac{1}{3} \log_a \frac{a^5}{b^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{3} \left(\log_a a^5 - \log_a b^{\frac{1}{4}} \right) = \frac{1}{3} \left(5 - \frac{1}{4} \log_a b \right)$$

$$\Rightarrow 5 - \frac{1}{4} \log_a b = 6 \Rightarrow \log_a b = -4.$$

Câu 19. Sau một tháng thi công, công trình xây dựng lớp học từ thiện cho học sinh vùng cao đã thực hiện được một khối lượng công việc. Nếu tiếp tục với tiến độ như vậy thì dự kiến sau đúng 23 tháng nữa công trình sẽ hoàn thành. Để sớm hoàn thành công trình và kịp thời đưa vào sử dụng, đơn vị xây dựng quyết định từ tháng thứ hai tăng 4% khối lượng công việc so với tháng kể trước. Hỏi công trình sẽ hoàn thành ở tháng thứ mấy sau khi khởi công?

Lời giải

Theo dự kiến, cần 24 tháng để hoàn thành công trình. Vậy khối lượng công việc trên một tháng theo dự tính là: $\frac{1}{24}$ (công trình)

$$\text{Khối lượng công việc của tháng thứ 2 là: } T_2 = \frac{1}{24} + 0,04 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{24} (1 + 0,04)^1$$

Khối lượng công việc của tháng thứ 3 là:

$$T_3 = \left(\frac{1}{24} + 0,04 \cdot \frac{1}{24} \right) + 0,04 \cdot \left(\frac{1}{24} + 0,04 \cdot \frac{1}{24} \right) = \frac{1}{24} \cdot (1 + 0,04)^2$$

$$\text{Như vậy khối lượng công việc của tháng thứ } n \text{ là: } T_n = \frac{1}{24} \cdot (1 + 0,04)^{n-1}$$

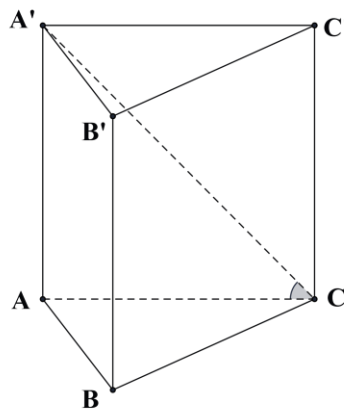
$$\text{Ta có: } \frac{1}{24} \cdot (1 + 0,04)^0 + \frac{1}{24} \cdot (1 + 0,04)^1 + \dots + \frac{1}{24} \cdot (1 + 0,04)^{n-1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{24} \cdot \frac{1 - (1 + 0,04)^n}{1 - (1 + 0,04)} = 1 \Leftrightarrow (1 + 0,04)^n = \frac{49}{25} \Leftrightarrow n = \log_{1+0,04} \frac{49}{25} \approx 17,2$$

Vậy công trình sẽ hoàn thành ở tháng thứ 18 từ khi khởi công.

Câu 20. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B có $AC = a\sqrt{3}$, cạnh bên $AA' = 3a$. Tính góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) .

Lời giải



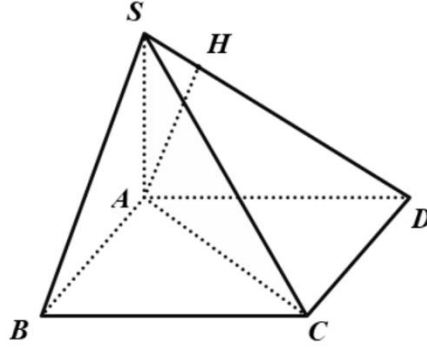
Ta có hình chiếu của $A'C$ lên mặt phẳng (ABC) là AC .

$$\text{Nên } (A'C, (ABC)) = (A'C, AC) = A'CA. \text{ Ta có } \tan A'CA = \frac{A'A}{AC} = \frac{3a}{a\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow A'CA = 60^\circ.$$

$$\text{Do vậy } (A'C, (ABC)) = 60^\circ.$$

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = 1$, $BC = \sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC .

Lời giải



Dựng điểm D sao cho $ABCD$ là hình chữ nhật. Ta có $AB \parallel CD$ nên $AB \parallel (SCD)$.

Khi đó $d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD))$.

Trong (SCD) , dựng $AH \perp SD$ ($H \in SD$).

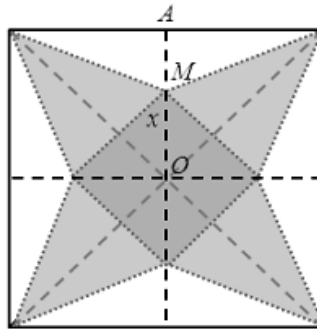
Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$.

Có $\begin{cases} AH \perp SD \\ AH \perp CD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD)$. Do đó $d(A, (SCD)) = AH$.

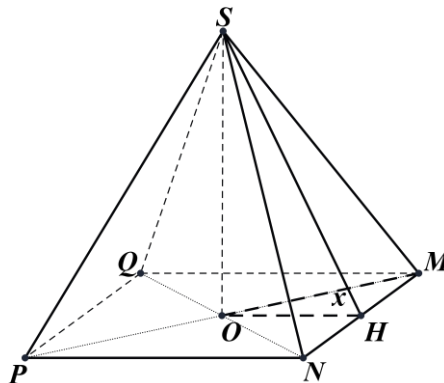
Ta có $AD = BC = \sqrt{2}$.

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow AH = a. \text{ Vậy } d(AB, SC) = AH = 1.$$

Câu 22. Cắt một miếng giấy hình vuông như hình bên và xếp thành hình một hình chóp tứ giác đều. Biết các cạnh hình vuông bằng 20 cm, $OM = x$ (cm). Tìm x để hình chóp đều ấy có thể tích lớn nhất (đơn vị: cm)



Lời giải



Giả sử được hình chóp tứ giác đều như hình vẽ có cạnh đáy bằng $x\sqrt{2}$.

$$\text{Khi đó: } OM = x \Rightarrow OH = HM = \frac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow SH = 10\sqrt{2} - \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Suy ra: } SO = \sqrt{SH^2 - OH^2} = \sqrt{\left(10\sqrt{2} - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{20(10 - x)}.$$

$$\text{Thể tích } V = \frac{1}{3} \cdot S_{MNPQ} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 2x^2 \cdot \sqrt{20(10 - x)} = \frac{\sqrt{20}}{3} \cdot x^2 \cdot \sqrt{40 - 4x} \quad (\text{với } 0 \leq x \leq 10).$$

$$\text{Tìm giá trị lớn nhất của } V \text{ ta được } V_{\max} = \frac{\sqrt{20}}{3} \cdot 10^2 \text{ khi } x = 8.$$

Có thể tìm giá trị lớn nhất bằng cách áp dụng BĐT Cauchy cho 4 số không âm, ta có:

$$x^2 \cdot \sqrt{40 - 4x} = \sqrt{(40 - 4x) \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x} \leq \left(\sqrt{\frac{40 - 4x + x + x + x + x}{4}} \right)^4 \Leftrightarrow \sqrt{40 - 4x} \cdot x^2 \leq 10^2.$$

$$\text{Vậy } V = \frac{\sqrt{20}}{3} \cdot x^2 \sqrt{40 - 4x} \leq \frac{\sqrt{20}}{3} \cdot 10^2. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } 40 - 4x = x \Leftrightarrow x = 8.$$

-----HẾT-----