

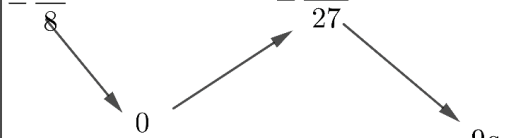
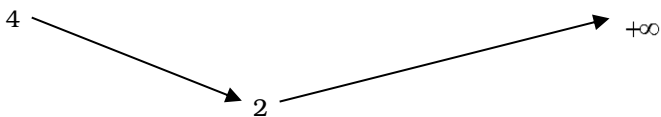
ĐỀ 38

- Câu 1.** (6 điểm) a) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho hàm số $y = -x^4 + mx^3 + 2m^2x^2 + m - 1$ đồng biến trên $(1; +\infty)$. Tính tổng tất cả các phần tử của S .
- b) Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và hàm số $y = xf(x)$ cùng đạt cực tiểu tại $x = 1$ và có tổng hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số bằng 4 (các nghiệm bội chỉ tính là một). Biết giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$ lần lượt là α và $2\alpha + 1$. Tính giá trị của số thực α .
- Câu 2.** (5 điểm) a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{xy} + (x-y)(\sqrt{xy}-2) + \sqrt{x} = y + \sqrt{y} \\ (x+1)[y + \sqrt{xy} + x(1-x)] = 4 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$
- b) Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Gọi B là tập số tự nhiên có 10 chữ số mà các chữ số lấy từ tập hợp A . Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp B . Tính xác suất để số được chọn có một số lẻ chữ số 1 và một số chẵn chữ số 2.
- Câu 3.** (2 điểm) Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = 6$.
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{(x+y+z)^2}{z+6} - \frac{1}{24}(xy+yz+zx)^2$.
- Câu 4.** (5 điểm)
- a) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B và có độ dài các cạnh $AB = BC = 6, AD = 12$. Tam giác SAC vuông tại S và có hình chiếu của S xuống $(ABCD)$ là H thỏa mãn $\overline{AC} = 3\overline{AH}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, CD . Tính $\tan(MN, (SAC))$.
- b) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi K là trung điểm của SC . Mặt phẳng qua AK cắt các cạnh SB, SD tại M, N . Gọi V_1, V theo thứ tự là thể tích khối chóp $S.AMKN$ và khối chóp $S.ABCD$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$.
- Câu 5.** (2 điểm) Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V . Gọi I là điểm thuộc miền trong của tứ diện $ABCD$, các đường thẳng AI, BI, CI, DI lần lượt cắt các mặt phẳng $(BCD), (ACD), (ABD), (ABC)$ tại các điểm M, N, P, Q thỏa mãn $\frac{AI}{MI} = \frac{BI}{NI} = \frac{CI}{PI} = \frac{DI}{QI}$. Tính $\frac{V_{I.BCD}}{V}$.

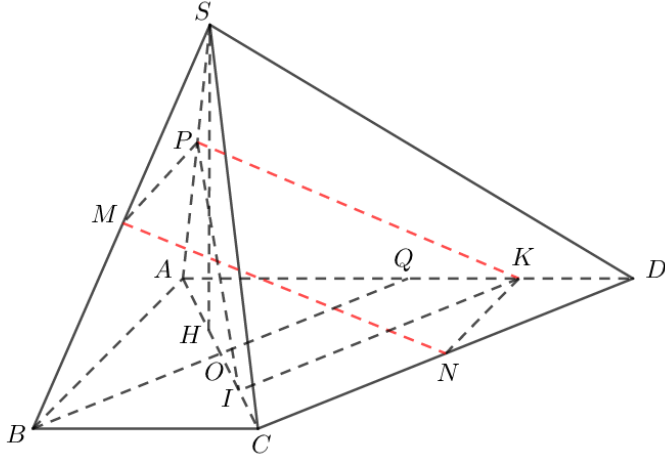
.....HẾT.....

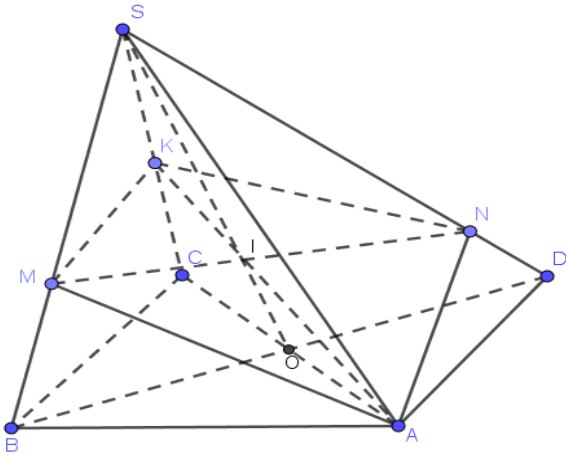
Câu	Nội dung	Điểm
1.a	a) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m sao cho hàm số $y = \left -x^4 + mx^3 + 2m^2x^2 + m - 1 \right$ đồng biến trên $(1; +\infty)$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.	3.0
	Đặt $g(x) = -x^4 + mx^3 + 2m^2x^2 + m - 1$ và $g'(x) = -4x^3 + 3mx^2 + 4m^2x = -x(4x^2 - 3mx - 4m^2)$ Hàm số $y = f(x) = \left -x^4 + mx^3 + 2m^2x^2 + m - 1 \right$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} g(1) \geq 0 \\ g'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} g(1) \leq 0 \\ g'(x) \leq 0, \forall x \in (1; +\infty) \end{cases}$	0.5
	TH 1: $\begin{cases} g(1) \geq 0 \\ g'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 1 \geq 0 \\ 4x^2 - 3mx - 4m^2 \leq 0, \forall x \in (1; +\infty) \end{cases}$ Hệ vô nghiệm vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^2 - 3mx - 4m^2) = +\infty$.	0.5
	TH 2: $\begin{cases} g(1) \leq 0 \\ g'(x) \leq 0, \forall x \in (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 1 \leq 0 \\ 4x^2 - 3mx - 4m^2 \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq m \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 4x^2 - 3mx - 4m^2 \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \end{cases}$ Ta có $4x^2 - 3mx - 4m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{73}}{8}m \\ x = \frac{3-\sqrt{73}}{8}m \end{cases}$	0.5
	+ Với $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq m \leq 0$ thì $4x^2 - 3mx - 4m^2 \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{73}}{8}m \leq 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{8}{3-\sqrt{73}}$ $\Rightarrow \frac{8}{3-\sqrt{73}} \leq m \leq 0, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1; 0\}$	0.5
	+ Với $0 < m \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thì $4x^2 - 3mx - 4m^2 \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow \frac{3+\sqrt{73}}{8}m \leq 1 \Leftrightarrow m \leq \frac{8}{3+\sqrt{73}}$	0.5

	$\Rightarrow 0 < m \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \emptyset.$	
	Kết luận: $S = \{-1; 0\}$ nên tổng phần tử của S là -1	0.5
1.b	b) Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và hàm số $y = xf(x)$ cùng đạt cực tiểu tại $x = 1$ và có tổng hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số bằng 4 (các nghiệm bội chỉ tính là một). Biết giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$ lần lượt là α và $2\alpha + 1$. Tính giá trị của số thực α.	3.0
	Xét $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ và $f''(x) = 6ax + 2b$ Xét $y = g(x) = xf(x)$ có $g'(x) = f(x) + x.f'(x)$ và $g''(x) = 2f'(x) + x.f''(x)$ Vì cả hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cùng đạt cực tiểu tại $x = 1$ nên ta có $\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f''(1) > 0 \\ g'(1) = 0 \\ g''(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 6a + 2b > 0 \\ f(1) + 1.f'(1) = 0 \\ 2f'(1) + 1.f''(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 & (1) \\ a + b + c + d = 0 & (2) \\ 3a + b > 0 & (3) \end{cases}$	1.0
	Xét phương trình hoành độ $f(x) = x.f(x) \Leftrightarrow (x-1)(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 0$ (4) Từ (2) suy ra đa thức $ax^3 + bx^2 + cx + d$ có nghiệm $x = 1$, khi đó $ax^3 + bx^2 + cx + d = (x-1)[ax^2 + (a+b)x + (a+b+c)]$ Từ đó suy ra phương trình (4) tương đương với $\begin{cases} x = 1 \\ ax^2 + (a+b)x + (a+b+c) = 0 \end{cases} \quad (5)$ Từ (1) suy ra đa thức $ax^2 + (a+b)x + (a+b+c)$ có nghiệm $x = 1$. Như vậy để tổng các nghiệm của phương trình (4) bằng 4 thì phương trình (5) phải có một nghiệm bằng 1 và một nghiệm bằng 3, nên $9a + 3(a+b) + (a+b+c) = 0 \Leftrightarrow 13a + 4b + c = 0$ (6) Từ (1), (2), (3) và (6) ta được $\begin{cases} b = -5a \\ c = 7a \\ d = -3a \\ a < 0 \end{cases}$ Vậy $f(x) = ax^3 - 5ax^2 + 7ax - 3a$ với $a < 0$.	1.0
	$f'(x) = 3ax^2 - 10ax + 7a, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{7}{3} \end{cases}$	0.5

	<table><tr><td>x</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>1</td><td>$\frac{7}{3}$</td><td>4</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>–</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>–</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$-\frac{5a}{8}$</td><td></td><td>$-\frac{32a}{27}$</td><td></td><td>$9a$</td></tr></table> 	x	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{7}{3}$	4	$f'(x)$	–	0	+	0	–	$f(x)$	$-\frac{5a}{8}$		$-\frac{32a}{27}$		$9a$	
x	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{7}{3}$	4															
$f'(x)$	–	0	+	0	–														
$f(x)$	$-\frac{5a}{8}$		$-\frac{32a}{27}$		$9a$														
	Vậy $\max_{\left[\frac{1}{2};4\right]} f(x) = -\frac{32a}{27}, \min_{\left[\frac{1}{2};4\right]} f(x) = 9a$ Ta có $\begin{cases} -\frac{32a}{27} = \alpha \\ 9a = 2\alpha + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{32}{307} \\ a = \frac{27}{307} \end{cases}.$	0.5																	
2.a	a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{xy} + (x-y)(\sqrt{xy}-2) + \sqrt{x} = y + \sqrt{y} \\ (x+1)[y + \sqrt{xy} + x(1-x)] = 4 \end{cases} \quad (x, y \in R)$	2.5																	
	Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ xy + (x-y)(\sqrt{xy}-2) \geq 0 \end{cases} \quad (*)$ Ta có (1) $\Leftrightarrow [\sqrt{xy} + (x-y)(\sqrt{xy}-2) - y] + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$ $\Leftrightarrow \frac{(x-y)(y + \sqrt{xy} - 2)}{\sqrt{xy} + (x-y)(\sqrt{xy}-2) + y} + \frac{x-y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 0$ $\Leftrightarrow (x-y) \left[\frac{y + \sqrt{xy} - 2}{\sqrt{xy} + (x-y)(\sqrt{xy}-2) + y} + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right] = 0 \quad (3)$	1.0																	
	Với điều kiện (*), PT (2) $\Leftrightarrow y + \sqrt{xy} = x(x-1) + \frac{4}{x+1} \Leftrightarrow y + \sqrt{xy} = \frac{x^3 - x + 4}{x+1}$ Xét hàm số $f(x) = \frac{x^3 - x + 4}{x+1}$ trên nửa khoảng $[0; +\infty)$, ta có $f'(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 5}{(x+1)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Ta có bảng biến thiên : <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>–</td><td>0</td><td>+</td></tr></table> 	x	0	1	$+\infty$	$f'(x)$	–	0	+	0.5									
x	0	1	$+\infty$																
$f'(x)$	–	0	+																
	Từ bảng biến thiên ta thấy $M_{\inf(x)} = 2$. Do đó :																		

	$y + \sqrt{xy} = \frac{x^3 - x + 4}{x + 1} \geq 2, \forall x \geq 0$. Kết hợp với (3) cho ta $x = y$.	
	Thay vào (2) ta có phương trình : $x^3 - 2x^2 - 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \quad (Do \ x \geq 0) \end{cases}$ Thử lại ta thấy, các nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = \left\{ (1; 1); \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \right) \right\}$	1.0
2.b	b. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Gọi B là tập số tự nhiên có 10 chữ số mà các chữ số lấy từ tập hợp A. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp B. Tính xác suất để số được chọn có một số lẻ chữ số 1 và một số chẵn chữ số 2.	2.5
	Từ tập A tạo ra các số tự nhiên có 10 chữ số, ta có: $n(\Omega) = 5^{10} = 9765625$.	0.5
	Gọi C là biến cố : “ Số được chọn có một số lẻ chữ số 1 và một số chẵn chữ số 2”. Trường hợp 1: Số được tạo có 1 chữ số 1 và có một số chẵn chữ số 2 thì có $n_1 = C_{10}^1 \cdot (C_9^0 \cdot 3^9 + C_9^2 \cdot 3^7 + C_9^4 \cdot 3^5 + C_9^6 \cdot 3^3 + C_9^8 \cdot 3) = 1313280 \text{ số.}$ Trường hợp 2: Số được tạo có 3 chữ số 1 và có một số chẵn chữ số 2 thì có $n_2 = C_{10}^3 \cdot (C_7^0 \cdot 3^7 + C_7^2 \cdot 3^5 + C_7^4 \cdot 3^3 + C_7^6 \cdot 3) = 990720 \text{ số.}$ Trường hợp 3: Số được tạo có 5 chữ số 1 và có một số chẵn chữ số 2 thì có $n_3 = C_{10}^5 \cdot (C_5^0 \cdot 3^5 + C_5^2 \cdot 3^3 + C_5^4 \cdot 3) = 133056 \text{ số.}$ Trường hợp 4: Số được tạo có 7 chữ số 1 và có một số chẵn chữ số 2 thì có $n_4 = C_{10}^7 \cdot (C_3^0 \cdot 3^3 + C_3^2 \cdot 3) = 4320 \text{ số.}$ Trường hợp 5: Số được tạo có 9 chữ số 1 và có một số chẵn chữ số 2 thì có $n_5 = C_{10}^9 \cdot (C_1^0 \cdot 3) = 30 \text{ số.}$	1.5
	Suy ra: $n(C) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 2441406$. Vậy xác suất của biến cố C là: $P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{2441406}{9765625}$.	0.5
3	Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2 = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{(x + y + z)^2}{z + 6} - \frac{1}{24}(xy + yz + zx)^2$.	2.0
	Áp dụng bất đẳng thức B.C.S ta có: $2(x + y) + (y + z) + (z + x) \leq \sqrt{(2^2 + 1 + 1)[(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2]} = 6$ $\Leftrightarrow 3x + 3y + 2z \leq 6 \Leftrightarrow 3(x + y + z) \leq 6 + z \Leftrightarrow \frac{1}{6 + z} \leq \frac{1}{3(x + y + z)}.$ Từ điều kiện ban đầu, khai triển ta lại có: $(x + y + z)^2 - 3 = xy + yz + zx$	0.5
	Từ điều kiện ban đầu, khai triển ta lại có: $(x + y + z)^2 - 3 = xy + yz + zx$ Lại có $xy + yz + zx \leq \frac{(x + y + z)^2}{3} \Rightarrow (x + y + z)^2 - 3 \leq \frac{(x + y + z)^2}{3}$ $\Rightarrow 0 \leq x + y + z \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$	0.5

	Từ đó cho ta $P \leq \frac{x+y+z}{3} - \frac{1}{24} \left[(x+y+z)^2 - 3 \right]^2$	0.5
	Đặt $t = x + y + z, t \in \left[0; \frac{3\sqrt{2}}{2} \right]$. Khảo sát hàm số $f(t) = \frac{t}{3} - \frac{(t^2 - 3)^2}{24}, t \in \left[0; \frac{3\sqrt{2}}{2} \right]$ Ta được $\max_{\left[0; \frac{3\sqrt{2}}{2} \right]} f(t) = f(2) = \frac{5}{8}$. Hay $\max P = \frac{5}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ z = 0. \end{cases}$	0.5
4.a	a) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B và có độ dài các cạnh $AB = BC = 6, AD = 12$. Tam giác SAC vuông tại S và có hình chiếu của S xuống $(ABCD)$ là H thỏa mãn $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AH}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, CD. Tính $\tan(MN, (SAC))$.	2.5
		
	Gọi P, Q, K lần lượt là trung điểm của SA, AD, QD . Khi đó $MNKP$ là hình bình hành nên $(MN, (SAC)) = (PK, (SAC)) = \alpha$.	0.5
	Gọi O, I lần lượt là trung điểm của AC, OC. Ta có $QO \perp (SAC)$ nên $IK \perp (SAC)$. Suy ra $\alpha = KPI$. Do $AC = 6\sqrt{2} \Rightarrow AH = 2\sqrt{2}, HC = 4\sqrt{2} \Rightarrow SH^2 = HA \cdot HC \Leftrightarrow SH = 4$. $\cos SAH = \frac{HA}{\sqrt{SH^2 + HA^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.	1.0
	Lại có: +) $AI = \frac{3}{4}AC = \frac{9\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $IP^2 = AP^2 + AI^2 - 2AP \cdot AI \cdot \cos SAH = \frac{57}{2}$. +) $KI = \frac{3}{2}QO = \frac{9\sqrt{2}}{2}$.	0.75
	Vậy $\tan \alpha = \frac{IK}{PI} = \frac{3\sqrt{57}}{19}$.	0.25
4.b	b) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi K là trung điểm của SC. Mặt phẳng qua AK cắt các cạnh SB, SD tại M, N. Gọi V_1, V theo thứ tự là thể tích khối chóp $S.AMKN$ và khối chóp $S.ABCD$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$.	2.5

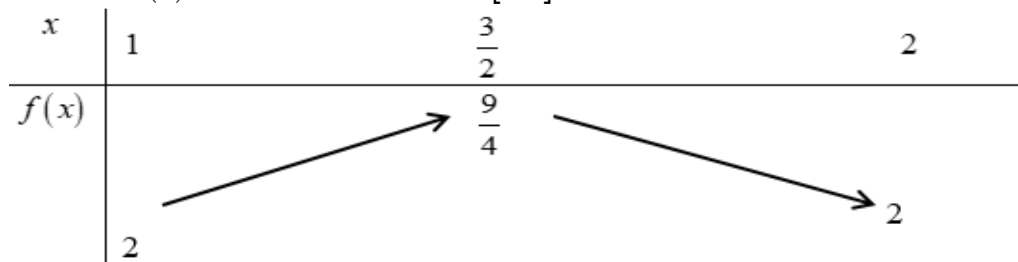


Đặt $\frac{SD}{SN} = x, x \in [1; 2] \Rightarrow \frac{SB}{SM} + x = \frac{SC}{SK} + \frac{SA}{SA} = 3.$

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\frac{SA}{SA} + \frac{SB}{SM} + \frac{SC}{SK} + \frac{SD}{SN}}{4 \cdot \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SB}{SM} \cdot \frac{SC}{SK} \cdot \frac{SD}{SN}} = \frac{6}{4 \cdot (3-x) \cdot 2 \cdot x} = \frac{3}{4 \cdot x(3-x)}$$

1.5

Xét hàm số $f(x) = -x^2 + 3x$ trên đoạn $[1; 2]$



Suy ra GTLN của $\frac{V_1}{V}$ là $\frac{3}{8}$, GTNN của $\frac{V_1}{V}$ là $\frac{1}{3}$.

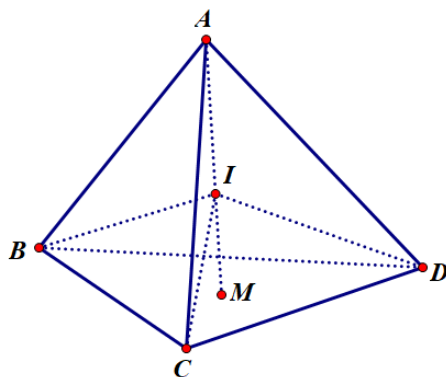
1.0

5

Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V . Gọi I là điểm thuộc miền trong của tứ diện $ABCD$, các đường thẳng AI, BI, CI, DI lần lượt cắt các mặt phẳng $(BCD), (ACD), (ABD), (ABC)$ tại các điểm M, N, P, Q thỏa mãn

$$\frac{AI}{MI} = \frac{BI}{NI} = \frac{CI}{PI} = \frac{DI}{QI}. \text{ Tính } \frac{V_{I,BCD}}{V}.$$

2.0



Ta có

0.75

	$\frac{V_{IBCD}}{V} = \frac{\frac{1}{3}.d(I,(BCD)).S_{BCD}}{\frac{1}{3}.d(A,(BCD)).S_{BCD}} = \frac{d(I,(BCD))}{d(A,(BCD))} = \frac{IM}{AM}$ $\Rightarrow \frac{AM}{IM} = \frac{V}{V_{IBCD}} \Leftrightarrow \frac{IM + AI}{IM} = \frac{V}{V_{IBCD}} \Leftrightarrow \frac{AI}{MI} = \frac{V}{V_{IBCD}} - 1$ Tương tự: $\frac{BI}{NI} = \frac{V}{V_{IACD}} - 1; \frac{CI}{PI} = \frac{V}{V_{IABD}} - 1; \frac{DI}{QI} = \frac{V}{V_{IABC}} - 1.$	
	Theo giả thiết : $\frac{AI}{MI} = \frac{BI}{NI} = \frac{CI}{PI} = \frac{DI}{QI} \Leftrightarrow \frac{V}{V_{IBCD}} - 1 = \frac{V}{V_{IACD}} - 1 = \frac{V}{V_{IABD}} - 1 = \frac{V}{V_{IABC}} - 1$ $\Leftrightarrow V_{IBCD} = V_{IACD} = V_{IABD} = V_{IABC} \Leftrightarrow \frac{V}{V_{IBCD}} = \frac{V}{V_{IACD}} = \frac{V}{V_{IABD}} = \frac{V}{V_{IABC}} .$	0.75
	Mà $V_{IBCD} + V_{IACD} + V_{IABD} + V_{IABC} = V$ nên $V_{IBCD} = \frac{1}{4}V .$	0.5