GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẰNG CÁCH NHÂN LIÊN HỢP.

HQH - TN

Trong giải phương trình có rất nhiều phương pháp vì đây là mảng cơ bản của đại số. Nhưng trong chương trình Toán (THCS) THPT chúng ta ít thấy trình bày 1 bài phương trình theo hướng nhân lượng liên hợp. Dù rằng đây chỉ là phương pháp giải được 1 số dạng phương trình liên quan tới căn thức thôi. Tuy vậy, các bài toán mà làm được theo phương pháp này thì hầu hết đều góp phần phát triển tư duy người làm toán.

Các bước cơ bản của phương pháp này là như sau:

+ Tìm điều kiện bài toán.

+ Kiểm tra xem bài toán có nghiệm đặc biệt không (giả sử là x = a)

+ Ta sẽ lấy các biểu thức căn trừ đi giá trị của biểu thức này khi nó nhận x = a.

+ Tiến hành liên hợp các biểu thức.

+ Đưa về phương trình tích

+ Chứng minh phương trình hết nghiệm (bằng đánh giá 2 vế với 1 số; Dùng bất đẳng thức . . .)

<u>* Chú ý</u>:

+ PP này rất hiệu quả đối với các bài toán căn thức bậc nhỏ hơn 4, và chỉ có 1 nghiệm nguyên.

<u>Ví dụ 1</u>: (Thi v*ào 10 Chuyên Toán Tin - Sư phạm Hà Nội 2001-2002*)

Giải phương trình: $\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4}$ (1)

- ĐK: $3x^2-7x+3\ge 0; x^2-2\ge 0; 3x^2-5x-1\ge 0; x^2-3x+4\ge 0$

- Đoán thấy x = 2 là nghiệm.

$$(1)\Leftrightarrow (\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{3x^2-5x-1})=(\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-3x+4})$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x+4}{\sqrt{3x^2-7x+3}+\sqrt{3x^2-5x-1}}=\frac{3x-6}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \dfrac{-2}{\sqrt{3x^2-7x+3}+\sqrt{3x^2-5x-1}}=\dfrac{3}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}} \quad (2) \end{array}\right.$$

- Rõ ràng (2) vô nghiệm

<u>Kết luận</u>: Bài toán có 1 nghiệm duy nhất, x = 2.

<u>Ví dụ 2</u>: $2\sqrt{x-1}+3\sqrt[3]{x+6}=8$ (3)

ĐK: $x\ge 1$

- Nhẩm. Thấy x = 2 là một nghiệm.

Vậy :

$$2\sqrt{x-1}+3\sqrt[3]{x+6}=8\Leftrightarrow 2(\sqrt{x-1}-1)+3(\sqrt[3]{x+6}-2)=0\Leftrightarrow \frac{2(x-2)}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{3(x-2)}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \dfrac{2}{\sqrt{x-1}+1}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4}=0 \quad (4) \end{array}\right.$$

Cần chứng minh tiếp (4) vô nghiệm với $x\ge 1$ là xong. (Hiển nhiên)

* *<u>Nhận xét</u>*: Bài này tất nhiên có thể đặt ẩn phụ: $u=\sqrt{x-1}$; $v=\sqrt[3]{x+6}$

<u>Ví dụ 3</u>: (*HSG Thái Bình 2009 - 2010*)

$$(x-1)(2\sqrt{x-1}+3\sqrt[3]{x+6})=x+6 \quad (5)$$

ĐK: $x\ge 1$

$$(5)\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}+3\sqrt[3]{x+6}=\frac{x+6}{x-1}=1+\frac{7}{x-1} \qquad (6) \qquad (\textit{do } x=1 \textit{ không là nghiệm})$$

$$*1<x\le 2:\begin{cases}VT\le 8\\ VP\ge 8\end{cases} \qquad *2\le x:\begin{cases}VT\le 8\\ VP\ge 8\end{cases}$$

$$\textit{Vậy } (6)\Leftrightarrow\begin{cases}2\sqrt{x-1}+3\sqrt[3]{x+6}=8 \qquad (3')\\ 1+\dfrac{7}{x-1}=8\end{cases}\Leftrightarrow x=2$$

(*Giải* (3') *như ví dụ bên trên*)

* <u>Kết luận</u>: phương trình có 1 nghiệm x = 2.

**** <u>Cách khác</u>**:

- Thấy x = 2 là một nghiệm của (6)
- VT của (6) là hàm số tăng trên $x\ge 1$, còn VP của (6) là hàm số giảm trên $x\ge 1$

* <u>Kết luận</u>: phương trình có 1 nghiệm x = 2.

<u>Ví dụ 4</u>: Giải phương trình : $\sqrt[3]{x^2-1}+x=\sqrt{x^3-2}$ (7) (*Lê Phúc Lữ*)

- ĐK: $x\ge\sqrt[3]{2}$
- Đoán nghiệm là 3

Ta sẽ lấy căn trừ đi giá trị của biểu thức này khi nó nhận x = 3.

$$\Rightarrow(\sqrt[3]{x^2-1}-2)+(x-3)=\sqrt{x^3-2}-5$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-9}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+2\sqrt[3]{(x^2-1)}+4}+(x-3)=\frac{x^3-27}{\sqrt{x^3-2}+5}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ \dfrac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+2\sqrt[3]{(x^2-1)}+4}+1=\dfrac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5} \qquad (8)\end{array}\right.$$

Ta sẽ chứng minh (8) vô nghiệm là xong! (bằng cách đánh giá các vế)

Sẽ làm theo kiểu VT < a ≤ VP (hoặc VT ≥ a>VP)

- Bài (8) sẽ đánh giá với a = 2.

* VT < 2 $\Leftrightarrow x<\sqrt[3]{(x^2-1)^2}+2\sqrt[3]{(x^2-1)}+1$

- Đặt t = $\sqrt[3]{(x^2-1)}>0$, ta cần chứng minh: $\sqrt{t^3+1}<t^2+2t+1\Leftrightarrow t^4+3t^3+6t^2+4t>0$ (*đúng*)

* VP > 2 $\Leftrightarrow\dfrac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}>2\Leftrightarrow x^2+3x-1>2\sqrt{x^3-2}$

$$\Leftrightarrow x^4+2x^3+7x^2-6x+9>0 \quad (9)$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x)^2+(x-3)^2+5x^2>0 \ (\textit{đúng})$$

(có thể chứng minh (9) vô nghiệm bằng cách dùng đạo hàm)

* <u>Kết luận</u>: Pt có 1 nghiệm x = 3.

Ví dụ 5:

Giải phương trình : $\sqrt{2-x^2} = (2-\sqrt{x})^2$ (10)

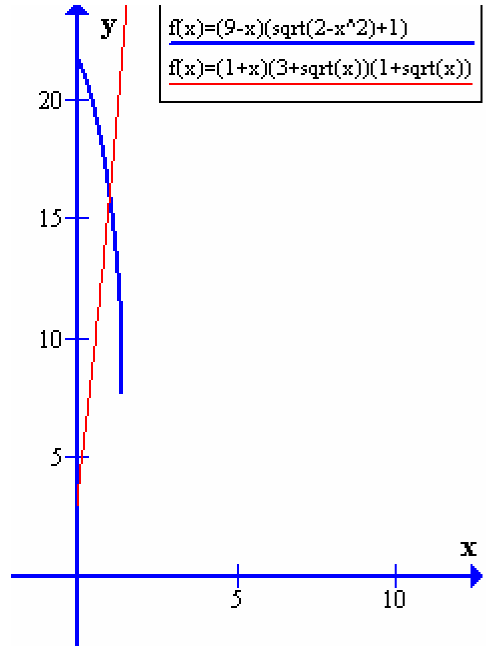
- ĐK: $0 \le x \le \sqrt{2}$
- Nhẩm thấy x = 1 là nghiệm

Ta có:

$$\sqrt{2-x^2} = (2-\sqrt{x})^2 \Leftrightarrow (\sqrt{2-x^2}-1) = (2-\sqrt{x})^2 - 1^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x^2}{\sqrt{2-x^2}+1} = (3-\sqrt{x})(1-\sqrt{x}) \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{\sqrt{2-x^2}+1} = \frac{9-x}{3+\sqrt{x}} \cdot \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \dfrac{1+x}{\sqrt{2-x^2}+1} = \dfrac{9-x}{(3+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})} \end{array}\right. \quad (11)$$



Xét (11):

$$(11) \Leftrightarrow (1+x)(3+\sqrt{x})(1-\sqrt{x}) = (9-x)(\sqrt{2-x^2}+1) \quad (12)$$

- Nhẩm nghiệm thấy x = 1 là 1 nghiệm của (12)
- VT là hàm số tăng trên $0 \le x \le \sqrt{2}$; VP là hàm số giảm trên $0 \le x \le \sqrt{2}$. Vậy (12) có 1 nghiệm duy nhất là x = 1

* Kết luận: phương trình (10) có duy nhất 1 nghiệm x = 1.

* Cách khác: $u = \sqrt{x}$; $v = 2-\sqrt{x}$

Ví dụ 6 : $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} + \sqrt{x+16} = \sqrt{x+100}$ (13)

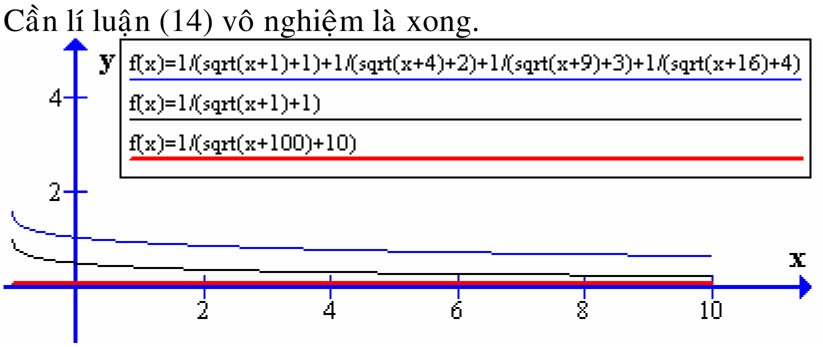
ĐK: $x \ge -1$

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} + \sqrt{x+16} = \sqrt{x+100}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1}-1) + (\sqrt{x+4}-2) + (\sqrt{x+9}-3) + (\sqrt{x+16}-4) = (\sqrt{x+100}-10)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1} + \dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2} + \dfrac{1}{\sqrt{x+9}+3} + \dfrac{1}{\sqrt{x+16}+4} = \dfrac{1}{\sqrt{x+100}+10} \\ x = 0 \end{array}\right. \quad (14)$$

Cần lí luận (14) vô nghiệm là xong.



Xét thấy: $\dfrac{1}{\sqrt{x+100}+10} < \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}$, $\forall x \ge -1$, do đó (14) vô nghiệm.

* Kết luận: Bài toán có 1 nghiệm duy nhất x = 0.

* **Bài tập tương tự**:

1/ $\sqrt{5x+6}+x=\sqrt{3x+10}+2$ (x = 2) (15)

2/ $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}+2\sqrt{1-x^2}=4$ (16)

$HD:\quad PT \Leftrightarrow (\sqrt{1-x}-1)+(\sqrt{1+x}-1)+2(\sqrt{1-x^2}-1)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{-x}{\sqrt{1-x}+1}+\frac{x}{\sqrt{1+x}+1}-\frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}+1}=0$$

(Cách khác: Đặt t = $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$)

2/ $2x+\sqrt{x+1}+\sqrt{x}+2\sqrt{x^2+x}=1$ (17)

$HD:\quad 2x+\sqrt{x+1}+\sqrt{x}+2\sqrt{x^2+x}=1$

$\Leftrightarrow 2x+(\sqrt{x+1}-1)+\sqrt{x}+2\sqrt{x^2+x}=0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}\left[2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}+1+2\sqrt{x+1}\right]=0$$

(Cách khác: Đặt t = $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$)

4/ $4x^2+3x+3=4x\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x-1}$ (18)

HD:

ĐK: $x\geq\frac{1}{2}$

$(18)\Leftrightarrow 4x(\sqrt{x+3}-2)+2(\sqrt{2x-1}-1)=4x^2+3x-7$

$$\Leftrightarrow 4x.\frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}+2.\frac{2(x-1)}{\sqrt{2x-1}+1}=4(x-1)(x+\frac{7}{4})$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \dfrac{x}{\sqrt{x+3}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}+1}=x+\dfrac{7}{4}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ \left(x+\dfrac{7}{4}\right)-\left(\dfrac{x}{\sqrt{x+3}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}+1}\right)=0 \quad (19)\end{array}\right.$$

Lý luận VT (19) là hàm số tăng và luôn lớn hơn 0 với $x\geq\frac{1}{2}$

* Cách khác: Đưa về tổng hai bình phương.