# CHƯƠNG. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

# BÀI 1. GÓC LƯỢNG GIÁC. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

## **A.** KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Quan hệ giữa hai đơn vị đo góc: độ và radian

- 

-  và .

### 2. Góc lượng giác và số đo của chúng

- Cho hai tia . Nếu tia  quay chỉ theo chiều dương (hay chỉ theo chiều âm) xuất phát từ tia  đến trùng với tia  thì ta nói: Tia  quét một góc lương giác với tia đầu  và tia cuối , kí hiệu là . Mỗi góc lượng giác gốc  được xác định bởi tia đầu , tia cuối  và số đo của góc đó.

- Nếu một góc lượng giác có số đo  (hay  radian) thì mọi góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc lượng giác đó có số đo dạng:  (hay  ), với  là số nguyên, mỗi góc ứng với một giá trị của .

**- Hệ thức Chasles**

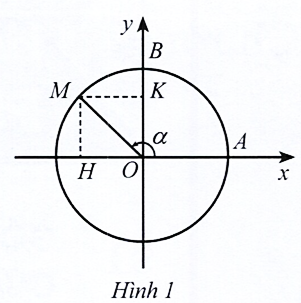
Với ba tia tuỳ ý , ta có:



### **3. Giá trị lượng giác của góc lượng giác**

Trong mặt phẳng toạ độ đã được định hướng , lấy điểm . Đường tròn tâm , bán kính  được gọi là đường tròn lượng giác gốc .

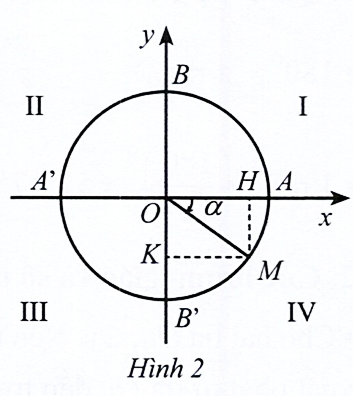
**a) Định nghĩa:** Với mỗi góc lượng giác , lấy điểm  trên đường tròn lượng giác sao cho  (Hình 1).



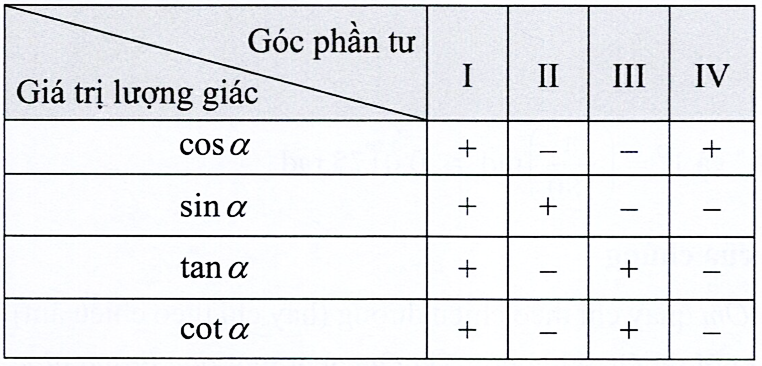
Giả sử  có toạ độ . Ta có: 



**Chú ý:** Dấu của các giá trị lượng giác của góc  phụ thuộc vào vị trí điểm  trên đường tròn lượng giác (Hình 2).



Bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác như sau:



**b) Tính chất**

-  với mọi ;

-  với ;

-  với 

-  với .

### 4. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt

- Hai góc đối nhau ( và  :







.

- Hai góc hơn kém nhau  ( và ):







.

- Hai góc bù nhau ( và  :



- Hai góc phụ nhau ( và ) :



## **B. VÍ DỤ**

### **Vấn đề 1. Góc lượng giác**

**Ví dụ 1**.

a) Gọi  là các điểm trên đường tròn lượng giác sao cho số đo của các góc lượng giác  lần lượt bằng . Có nhận xét gì về vị trí các điểm  ?

b) Gọi  là các điểm trên đường tròn lượng giác sao cho số đo của các góc lượng giác  lần lượt bằng . Chứng minh rằng tam giác  là tam giác đều.

**Giải**

a) Ta có: . Vậy ba điểm , trùng nhau.

Ta có: . Vậy điểm  đối xứng với điểm  qua gốc .

b) Trên đường tròn lượng giác, đi theo chiều dương từ vị trí , thứ tự các điểm lần lượt là  và . Ngoài ra ta có .

Suy ra . Vậy tam giác  là tam giác đều.

### Vấn đề 2. Giá trị lượng giác của góc lượng giác

**Ví dụ 2**. Tính các giá trị lượng giác của mỗi góc sau:

a) 

b) 

**Giải**

a) ;

.

b)  không xác định; .

- Với  :



- Với  :





### **Vấn đề 3. Áp dụng tính chất của giá trị lượng giác**

**Ví dụ 3**. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc , biết tan  với .

**Giải**

Do  nên .

Ta có:  nên . Mà  nên .

Do đó, .

Mặt khác,  nên .

### **Vấn đề 4. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt**

**Ví dụ 4.** Tính:

a)  (17 số hạng).

b)  (35 số hạng).

**Giải**

a) Vận dụng , ta có: , .

Vậy



b) Vận dụng  ta có: ,



### Vấn đề 5. Ứng dụng

**Ví dụ 5.** Một vệ tinh được định vị tại vị trí  trong không gian. Từ vị trí , vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm  của Trái Đất. Giả sử vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong  theo chiều kim đồng hồ. Khi vệ tinh chuyển động được , bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng bao nhiêu? (Tính theo đơn vị radian).

**Giải**

Theo giả thiết, vệ tinh chuyển động theo chiều kim đồng hồ nên sau , bán kính của vòng quay khi vệ tinh chuyển động quét được một góc lượng giác bằng .

Vậy khi vệ tinh chuyển động được  thì bán kính của vòng quay quét được một góc lượng giác bằng  (rad).

## **C. BÀI TẬP**

**Câu 1.** Trên đường tròn lượng giác lấy điểm  sao cho . Gọi  đối xứng với  qua gốc toạ độ. Khi đó số đo của góc lượng giác  bằng:

**A.** .

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 2.** Cho  với . Khi đó,  bằng:

**A.** .

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 3.** Cho . Khi đó,  bằng:

**A.** 8 .

**B.** 4 .

**C.** 16 .

**D.** 2 .

**Lời giải**

**Chọn D**

**Câu 4.** Kết quả thu gọn của biểu thức

 là:

**A.** .

**B.** .

**C.** .

**D.** .

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 5.** Cho . Khi đó giá trị của biểu thức  bằng:

**A.** 4 .

**B.** 0 .

**C.** 1 .

**D.** 2 .

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 6.** Cho lục giác đều  nội tiếp trong đường tròn lượng giác (thứ tự đi từ  đến các đỉnh theo chiều ngược chiều kim đồng hồ). Tính số đo của các góc lượng giác .

**Lời giải**





**Câu 7.** Cho  với . Tính .

**Lời giải**

.

**Câu 8.** Cho . Tính .

**Lời giải**

Ta có: . Áp dụng công thức: , ta được . Mà  nên . Suy ra . Khi đó .

**Câu 9\*.** Chứng minh rằng:

a) ;

b) .

**Lời giải**

Ta có:

a)



b)



**Câu 10.** Cho . Tính giá trị của mỗi biểu thức sau:

a) 

b) 

**Lời giải**

a) Vì  xác định nên  khác 0 . Chia cả tử và mẫu cho , ta được:



b) Vì  xác định nên  khác 0 . Chia cả tử và mẫu cho , ta được:



**Câu 11.** Tính:

a) 

b)  (gồm 9 số hạng);

c)  (gồm 89 thừa số).

**Lời giải**

a) Do  nên



b) Nhận thấy:  nên .

Tương tự ta có: .

Suy ra .

c) 

34

**Câu 12**. Chứng minh rằng trong tam giác , ta có:

a) ;

b) ;

c) 

d) .

**Lời giải**

a) Do  nên .

b) Do  nên .

c) Do  nên .

d) Do  nên .

**Câu 13\*.** Cho  với . Tính:

a) ;

b) ;

c) 

d) .

**Lời giải**

a) Do  nên  hay .

Suy ra .

b) Xét .

Do  nên .

Do đó . Vậy .

c) .

d) Ta có: .

**Câu 14.** Một vòng quay Mặt Trời quay mỗi vòng khoảng 15 phút. Tại vị trí quan sát, bạn Linh thấy vòng quay chuyển động theo chiều kim đồng hồ. Khi vòng quay chuyển động được 10 phút, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng bao nhiêu? (Tính theo đơn vị radian).

**Lời giải**

Do vòng quay Mặt Trời quay mỗi vòng khoảng 15 phút và chuyển động theo chiều kim đồng hồ nên sau 15 phút, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng .

Do đó, sau 10 phút, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng .