

Tuyển tập đề thi Olympic 30-4 từ năm 2006-2010

Đề bài Năm 2006

Câu 1: (2đ)

Giải phương trình: $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3} = x^2+1$.

Câu 2: (2đ)

Cho tam giác ABC có các cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $B = 2A$, $C = 4A$, bán kính đường tròn ngoại tiếp là R . Tính

$$T = R^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right).$$

Câu 3: (2đ)

Cho tam giác ABC cân tại A. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc cạnh AB tại T, đường thẳng CT cắt đường tròn tại K khác T. Giả sử K là trung điểm CT và $CT = 6\sqrt{2}$. Hãy tính độ dài các cạnh của tam giác ABC.

Câu 4: (2đ)

Chứng minh với mọi giá trị nguyên của m , tồn tại số nguyên n để $n^3 - 11n^2 - 87n + m$

chia hết cho 191.

Câu 5: (2đ)

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh:

$$\frac{a^4}{a^4 + \sqrt[3]{(a^6 + b^6)(a^3 + c^3)^2}} + \frac{b^4}{b^4 + \sqrt[3]{(b^6 + c^6)(b^3 + a^3)^2}} + \frac{c^4}{c^4 + \sqrt[3]{(c^6 + a^6)(c^3 + b^3)^2}} \leq 1.$$

Năm 2007

Câu 1 (4 điểm).

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{8xy}{x+y} = 16 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$$

Câu 2 (4 điểm).

Cho các số thực a, b, x, y thỏa mãn điều kiện $ax - by = \sqrt{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = a^2 + b^2 + x^2 + y^2 + bx + ay$.

Câu 3 (4 điểm).

Cho tam giác ABC có các góc A, B thỏa điều kiện:

$$\sin \frac{3A}{2} + \sin \frac{3B}{2} = 2 \cos \frac{A-B}{2}.$$

Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều.

Câu 4 (4 điểm).

Cho tứ giác lồi $ABCD$. Xét M là điểm tùy ý. Gọi P, Q, R, S là các điểm sao cho:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} &= 4\overrightarrow{MP}; \quad \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA} = 4\overrightarrow{MQ}; \\ \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} &= 4\overrightarrow{MR}; \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MS}.\end{aligned}$$

Tìm vị trí của điểm M sao cho $PA = QB = RC = SD$.

Câu 5 (4 điểm).

Trong mặt phẳng tọa độ cho một ngũ giác lồi có các đỉnh là những điểm có tọa độ nguyên. Chứng minh rằng bên trong hoặc trên cạnh ngũ giác có ít nhất một điểm có tọa độ nguyên.

Năm 2008

Câu 1: (4 điểm)

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y - z = 7 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 37 \\ x^3 + y^3 - z^3 = 1. \end{cases}$$

Câu 2: (4 điểm)

Cho tam giác ABC có diện tích S . Trên các cạnh BC, CA và AB lần lượt lấy các điểm M, N và K sao cho

$$30\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}, \quad 4\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = \vec{0} \quad \text{và} \quad 14\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \vec{0}.$$

Gọi D là giao điểm của AM và CK , E là giao điểm của BN và AM , F là giao điểm của CK và BN .

Hãy tính diện tích của tam giác DEF theo S .

Câu 3: (4 điểm)

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n và với mọi số thực

$$x \in (0; 1) \text{ ta đều có: } x^2 \cdot \sqrt{1-x} \leq \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Câu 4: (4 điểm)

Tìm tất cả các số nguyên dương m thỏa mãn điều kiện

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}, a^2 \equiv b^2 \pmod{m} \Rightarrow a \equiv \pm b \pmod{m}$$

Câu 5: (4 điểm)

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(1; 0)$ và các đường tròn

$$(C_1): x^2 + y^2 = 2, (C_2): x^2 + y^2 = 5.$$

Tìm tọa độ các điểm B và C lần lượt nằm trên các đường tròn (C_1) và (C_2) để tam giác ABC có diện tích lớn nhất (biết rằng tam giác như vậy là tồn tại).

Năm 2009

Câu 1: (4 điểm)

Giải phương trình: $x^3 + 3x^2 - 3\sqrt{3x+5} = 1 - 3x$.

Câu 2: (4 điểm)

Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho tồn tại các số nguyên dương n, x, y thỏa mãn:

$$p^n = x^3 + y^3.$$

Câu 3: (4 điểm)

Cho đoạn thẳng AC cố định với K là trung điểm. Hai điểm B và D phân biệt, di động và luôn đối xứng nhau qua K và đường thẳng BD không trùng với đường thẳng AC. Đường phân giác của $\widehat{BCD}$ cắt AD và AB lần lượt tại I và J. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD và đường tròn ngoại tiếp tam giác AIJ cắt nhau tại điểm M khác A. Gọi H là hình chiếu của M trên trung trực của AC và N là giao điểm của CH và KM. Chứng minh khi B di động như trên thì N di động trên một đường cố định.

Câu 4: (4 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} \leq 3.$$

Câu 5: (4 điểm)

Cho tam giác ABC không cân có hai đỉnh B, C cố định và đỉnh A di động. Qua B dựng đường thẳng d vuông góc với BC, d cắt trung tuyến AI của tam giác ABC tại K. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu IH song song với KC thì điểm A di động trên đường cố định.

Năm 2010

Câu 1. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 9 \\ \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{y}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 1 \right) \left(\frac{1}{\sqrt[3]{y}} + 1 \right) = 18 \end{cases}$$

Câu 2. Tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho tồn tại tập hợp $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ là các hợp số sao cho:

- i) Hai số bất kỳ trong chúng nguyên tố cùng nhau
- ii) $1 < a_i \leq (2n+5)^2, \forall i = 1, 2, \dots, n$

Câu 3. Cho ΔABC đều và một điểm M thuộc miền trong tam giác. Từ M hạ MA_1, MB_1, MC_1 vuông góc xuống các cạnh BC, CA, AB . Tìm giá trị nhỏ nhất của đại lượng

$$P = \frac{MA^2 + MB^2 + MC^2}{(MA_1 + MB_1 + MC_1)^2}.$$

Câu 4. Cho $a, b, c \geq 1$, thỏa mãn $a+b+c+2=abc$. Chứng minh rằng

$$bc\sqrt{a^2-1} + ca\sqrt{b^2-1} + ab\sqrt{c^2-1} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}abc$$

Câu 5. Trong một môn thi đấu thể thao có x tấm huy chương được phát trong n ngày. Ngày thứ nhất, người ta phát 1 tấm huy chương và một phần mười số huy chương còn lại.

Ngày thứ nhất, người ta phát 2 tấm huy chương và một phần mười số huy chương còn lại. Tương tự, ngày thứ k , người ta phát k tấm huy chương ($3 \leq k < n$). Vào ngày cuối cùng, còn đúng n tấm huy chương để phát. Hỏi môn thể thao đó có bao nhiêu tấm huy chương và được phát trong bao nhiêu ngày?

Lời giải Năm 2006

Câu 1: (2đ)

Giải phương trình $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3} = x^2 + 1$ (1).

Tập xác định R.

0,25đ

Đặt $\sqrt{x^2-2x+3} = t$, với $t \geq \sqrt{2}$.

0,25đ

Khi đó phương trình (1) trở thành $(x+1)t = x^2 + 1$ (2).

$$(2) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 - (x+1)t + 2(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - (x+1)t + 2(x-1) = 0$$

0,25đ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = x-1 \end{cases}$$

0,25đ

Với $t = 2$, ta có $\sqrt{x^2-2x+3} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 4$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

0,5đ

Với $t = x - 1$, ta có $\sqrt{x^2-2x+3} = x - 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

0,5đ

Vậy tập hợp nghiệm của phương trình là $\{1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\}$.

Câu 2: (2đ)

Ta có $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

$$\Rightarrow \frac{R}{a} = \frac{1}{2\sin A}, \frac{R}{b} = \frac{1}{2\sin B}, \frac{R}{c} = \frac{1}{2\sin C}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} \right)$$

0,5đ

$$= \frac{1}{4} (3 + \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C).$$

Trong ΔABC : $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$ 0,5đ

và ta có $\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2\cot \alpha}$, do đó

$$\cot^2 \alpha = 1 + 2\cot \alpha \cdot \cot 2\alpha$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{4} [3 + 3 + 2(\cot A \cdot \cot 2A + \cot B \cdot \cot 2B + \cot C \cdot \cot 2C)]$$

0,5đ

$$= \frac{1}{4} [6 + 2(\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A)]$$

$$= \frac{1}{4} (6 + 2) = 2.$$

0,5đ

Câu 3: (2đ)

K là trung điểm của CT và L là tiếp điểm của đường tròn với cạnh BC. Thế thì : $CK = \frac{1}{2} CT$ (*). Suy ra L trung điểm của BC,

$$CL^2 = CK \cdot CT = \frac{1}{2} CT^2, \quad 0,5đ$$

hay $a^2/4 = 36$, hay $a = 12$ (1).

Áp dụng định lí cosin trong tam giác BCT, ta có:

$$CT^2 = BT^2 + BC^2 - 2BT \cdot BC \cdot \cos B \quad 0,5đ$$

$$\Leftrightarrow 72 = a^2/4 + a^2 - 144 \cdot \cos B$$

$$\Leftrightarrow \cos B = \frac{3}{4} \text{ (2), do (1).}$$

Mặt khác, áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC, ta có:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B \Leftrightarrow \cos B = a/2b \text{ (3).} \quad 0,5đ$$

Từ (1), (2) và (3), ta có :

$$(a, b, c) = (12, 8, 8). \quad 0,5đ$$

Câu 4: (2đ)

Đặt $P(x) = x^3 - 11x^2 - 87x + m$.

Ta có: $P(x) \equiv (x+a)^3 + b \pmod{191}$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 + b \equiv x^3 - 11x^2 - 87x + m \pmod{191} \quad 0,5đ$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a \equiv -11 \pmod{191} & (1) \\ 3a^2 \equiv -87 \pmod{191} & (2) \\ b \equiv m - a^3 \pmod{191} & (3) \end{cases} \quad 0,5đ$$

$$(1) \Leftrightarrow 3a \equiv 180 \pmod{191} \Leftrightarrow a \equiv 60 \pmod{191} \Rightarrow 3a^2 \equiv -87 \pmod{191}$$

Vậy $\forall m \in \mathbb{Z}$, tồn tại số nguyên a, b để $P(x) \equiv (x+a)^3 + b \pmod{191}$.

Nhận xét: 191 là số nguyên tố dạng $191 = 3k + 2$

$$P(i) \equiv P(j) \pmod{191} \Rightarrow (i+a)^3 \equiv (j+a)^3 \pmod{191}.$$

Đặt $u = i+a$, $v = j+a$, thì

$$u^3 \equiv v^3 \pmod{191} \Rightarrow u^{3k} \equiv v^{3k} \pmod{191}$$

$$u^{3k} v^2 \equiv v^{3k+2} \equiv v^{191} \pmod{191} \equiv v \pmod{191} \text{ (định lí Fermat) (4)} \quad 0,5đ$$

$$\Rightarrow v^2 \equiv u^{3k} v^3 \equiv u^{3k+3} \pmod{191}$$

$$\Rightarrow u^{3k} v^2 \equiv u^{3k} \cdot u^{3k+3} \equiv u^{3k+1} \cdot u^{3k+2} \equiv u^{3k+1} \cdot u^{191} \equiv u^{3k+1} \cdot u \pmod{191}$$

$$\equiv u^{3k+2} \equiv u^{191} \equiv u \pmod{191}. \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra $u \equiv v \pmod{191} \Rightarrow i \equiv j \pmod{191}$.

Vậy nếu $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, 191\} : i \not\equiv j \pmod{191}$ thì $P(i) \not\equiv P(j) \pmod{191}$

Suy ra tồn tại $n \in \{1, 2, \dots, 191\}$ sao cho $P(n) \equiv 191 \pmod{191}$, hay $P(n) : 191$ $0,5đ$

Vậy với mọi giá trị nguyên của m, luôn tồn tại số nguyên n để $P(n) : 191$.

Câu 5: (2đ)

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{(a^6 + b^6)(a^3 + c^3)^2} = \\ &= \sqrt[3]{(a^6 + b^6)(a^6 + 2a^3c^3 + c^6)} = \sqrt[3]{(a^6 + b^6)(a^6 + 2a^3c^3 + c^6)} \\ &= \sqrt[3]{(a^{12} + 2a^3b^6c^3) + (2a^9c^3 + b^6c^6) + a^6b^6 + a^6c^6} \\ &\geq \sqrt[3]{a^6b^6 + 3a^6b^4c^2 + 3a^6b^2c^4 + a^6c^6} = \sqrt[3]{(a^2b^2 + a^2c^2)^3} = a^2b^2 + a^2c^2 \quad 0,75đ \end{aligned}$$

Suy ra:

$$\frac{a^4}{a^4 + \sqrt[3]{(a^6 + b^6)(a^3 + c^3)^2}} \leq \frac{a^4}{a^4 + a^2b^2 + a^2c^2} = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad 0,25đ$$

Tương tự

$$\frac{b^4}{b^4 + \sqrt[3]{(b^6 + c^6)(b^3 + a^3)^2}} \leq \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad 0,5đ$$

$$\frac{c^4}{c^4 + \sqrt[3]{(a^6 + b^6)(c^3 + b^3)^2}} \leq \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad 0,5đ$$

Cộng các bất đẳng thức trên, ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{a^4}{a^4 + \sqrt[3]{(a^6 + b^6)(a^3 + c^3)^2}} + \frac{b^4}{b^4 + \sqrt[3]{(b^6 + c^6)(b^3 + a^3)^2}} \\ &+ \frac{c^4}{c^4 + \sqrt[3]{(c^6 + a^6)(c^3 + b^3)^2}} \leq 1. \end{aligned}$$

Năm 2007

	NỘI DUNG	ĐIỂM
Câu 1:	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{8xy}{x+y} = 16 & (1) \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y & (2) \end{cases}$	
	* Điều kiện: $x + y > 0$	0,5
	* (1) $\Leftrightarrow (x^2 + y^2)(x + y) + 8xy = 16(x + y)$ $\Leftrightarrow [(x + y)^2 - 2xy](x + y) - 16(x + y) + 8xy = 0$ $\Leftrightarrow (x + y)^3 - 16(x + y) - 2xy(x + y) + 8xy = 0$ $\Leftrightarrow (x + y)[(x + y)^2 - 16] - 2xy(x + y - 4) = 0$ $\Leftrightarrow (x + y - 4)[(x + y)(x + y + 4) - 2xy] = 0$	1
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 4 = 0 & (3) \\ x^2 + y^2 + 4(x + y) = 0 & (4) \end{cases}$	0,5
	Từ (3) $\Rightarrow x + y = 4$, thế vào (2) ta được: $x^2 + x - 4 = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \Rightarrow y = 7 \\ x = 2 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$	1
	(4) vô nghiệm vì $x^2 + y^2 \geq 0$ và $x + y > 0$.	0,5
	Vậy hệ có hai nghiệm là $(-3; 7); (2; 2)$	0,5

	NỘI DUNG	ĐIỂM
Câu 2:	Cho các số thực a, b, x, y thỏa mãn điều kiện $ax - by = \sqrt{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = a^2 + b^2 + x^2 + y^2 + bx + ay$.	
	Viết lại $F = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(a^2 + b^2)$.	0,5
	Đặt $M = (x; y)$, $A = \left(-\frac{b}{2}; -\frac{a}{2}\right)$, $(\Delta): ax - by = \sqrt{3}$. Ta có $MA^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2$. Mà $M \in (\Delta)$ nên $MA^2 \geq [d(A; \Delta)]^2 = \frac{3}{a^2 + b^2}$. Đẳng thức xảy ra khi M là hình chiếu của A trên (Δ) .	1,5
	Suy ra $F \geq \frac{3}{a^2 + b^2} + \frac{3}{4}(a^2 + b^2) \geq 2\sqrt{\frac{3}{a^2 + b^2} \cdot \frac{3}{4}(a^2 + b^2)} = 3$.	1
	Vậy $\min F = 3$ đạt được chẳng hạn khi $(a; b; x; y) = \left(\sqrt{2}; 0; \frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.	1

	NỘI DUNG	ĐIỂM
Câu 3:	Cho tam giác ABC có các góc A, B thỏa điều kiện : $\sin\left(\frac{3A}{2}\right) + \sin\left(\frac{3B}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều.	
	Ta có: $\sin\left(\frac{3A}{2}\right) + \sin\left(\frac{3B}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{3(A+B)}{4}\right)\cos\left(\frac{3(A-B)}{4}\right)$. $1 \geq \sin\left(\frac{3(A+B)}{4}\right) > 0$; $\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) > 0$ $0 \leq \frac{ A-B }{2} \leq \frac{3 A-B }{4} < \pi$ $\Rightarrow \cos\left(\frac{ A-B }{2}\right) \geq \cos\left(\frac{3 A-B }{4}\right)$ $\Rightarrow \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \geq \cos\left(\frac{3(A-B)}{4}\right)$	1
	Từ $\sin\left(\frac{3A}{2}\right) + \sin\left(\frac{3B}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ và $\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) > 0$ Suy ra : $2\sin\left(\frac{3(A+B)}{4}\right)\cos\left(\frac{3(A-B)}{4}\right) > 0$ Hay $\cos\left(\frac{3(A-B)}{4}\right) > 0$.	1
	Kết hợp với $\sin\left(\frac{3(A+B)}{4}\right) \leq 1$, ta có $\sin\left(\frac{3(A+B)}{4}\right)\cos\left(\frac{3(A-B)}{4}\right) \leq \cos\left(\frac{3(A-B)}{4}\right)$ Do đó: $2\sin\left(\frac{3(A+B)}{4}\right)\cos\left(\frac{3(A-B)}{4}\right) \leq 2\cos\left(\frac{3(A-B)}{4}\right) \leq 2\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$	1
	Vì vậy nếu $\sin\left(\frac{3A}{2}\right) + \sin\left(\frac{3B}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ thì phải có: $\begin{cases} \frac{ A-B }{2} = \frac{3 A-B }{4} \\ \sin\left(\frac{3(A+B)}{4}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A = B = \frac{\pi}{3}$ Vậy tam giác ABC là tam giác đều.	1

	NỘI DUNG	ĐIỂM
Câu 4:	Cho tứ giác lồi $ABCD$. Xét M là điểm tùy ý. Gọi P, Q, R, S là các điểm sao cho $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MP}; \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA} = 4\overrightarrow{MQ}$ $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MR}; \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MS}$ Tìm vị trí của điểm M sao cho $PA = QB = RC = SD$.	
	Giả sử có điểm M thỏa bài toán. Gọi G là điểm sao cho $5\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}.$	0,5
	Từ $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MP}$, ta có $4\overrightarrow{PA} = 5\overrightarrow{GA}$. Tương tự $4\overrightarrow{QB} = 5\overrightarrow{GB}$, $4\overrightarrow{RC} = 5\overrightarrow{GC}$, $4\overrightarrow{SD} = 5\overrightarrow{GD}$.	1
	Do đó $PA = QB = RC = SD \Leftrightarrow GA = GB = GC = GD$.	1
	Nếu $ABCD$ là tứ giác nội tiếp được trong đường tròn tâm O thì G trùng O và M là điểm duy nhất xác định bởi $\overrightarrow{OM} = -(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$. Kiểm tra lại thấy thỏa $PA = QB = RC = SD$.	1
	Nếu $ABCD$ không phải là tứ giác nội tiếp được trong đường tròn thì không tồn tại điểm M .	0,5

	NỘI DUNG	ĐIỂM
Câu 5:	Trong mặt phẳng tọa độ cho một ngũ giác lồi có các đỉnh là những điểm có tọa độ nguyên. Chứng minh rằng bên trong hoặc trên cạnh ngũ giác có ít nhất một điểm có tọa độ nguyên.	
	Coi đỉnh $A_i (x_i; y_i)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. $(x_i; y_i)$ có thể rơi vào những trường hợp sau: $(2k; 2k')$, $(2k; 2k'+1)$, $(2k+1; 2k' + 1)$, $(2k+1; 2k')$ với $k, k' \in \mathbb{Z}$	1,5
	Do đa giác có 5 đỉnh nên theo nguyên lí Dirichlet, có ít nhất 2 đỉnh có tọa độ thuộc một trong bốn kiểu trên.	1,5
	Khi đó trung điểm của đoạn nối 2 đỉnh ấy sẽ có tọa độ nguyên. Do ngũ giác là lồi nên điểm này ở miền trong hoặc trên cạnh của ngũ giác đó.	1

Năm 2008

Câu 1

$$\text{Đặt } \begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \\ \mathbf{v} = \mathbf{xy}. \end{cases}$$

$$\text{Hệ trở thành } \begin{cases} u - z = 7 & (1) \\ u^2 - 2v - z^2 = 37 & (2) \\ u^3 - 3uv - z^3 = 1 & (3) \end{cases} \quad 0,5đ$$

Từ (1) suy ra $z = u - 7$. Thay vào (2) ta được $v = 7u - 43$ 1đ

Thay z và v vào (3) ta được $18u = 342 \Rightarrow u = 19$.

Do đó $v = 90, z = 12$ 1đ

Với $\begin{cases} u = 19 \\ v = 90 \end{cases}$ tìm được $\begin{cases} x = 9 \\ y = 10 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 10 \\ y = 9 \end{cases}$ 1đ

Thử lại, ta thấy hệ có 2 nghiệm là (9; 10; 12) hay (10; 9; 12). 0,5đ

Bài 2

Theo đề bài ta có: M là điểm nằm giữa B và C, N là điểm nằm giữa C và A, K là điểm nằm giữa B và A và $MC = 30MB$, $NC = 4NA$ và $KB = 14KA$.

$$\text{Ta có: } \frac{S_{BFC}}{S_{BCN}} \cdot \frac{S_{BCN}}{S_{ABC}} = \frac{BF}{BN} \cdot \frac{CN}{CA} \quad (1) \quad 0,5đ$$

$$NC = 4NA \Rightarrow \frac{CN}{CA} = \frac{4}{5} \quad (2)$$

Áp dụng Menelauf vào $\triangle ABN$ với cát tuyến KFC ta có:

$$\frac{FB}{FN} \cdot \frac{CN}{CA} \cdot \frac{KA}{KB} = 1 \Rightarrow \frac{FB}{FN} = \frac{CA}{CN} \cdot \frac{KB}{KA} = \frac{5}{4} \cdot 14 = \frac{35}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{BF}{BN} = \frac{35}{37} \quad (3) \quad 0,5đ$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3)} \Rightarrow \frac{S_{BFC}}{S_{ABC}} = \frac{S_{BFC}}{S_{BCN}} \cdot \frac{S_{BCN}}{S_{ABC}} = \frac{BF}{BN} \cdot \frac{CN}{CA} = \frac{35}{37} \cdot \frac{4}{5} = \frac{28}{37}$$

$$\Rightarrow S_{BFC} = \frac{28}{37} S \quad (4) \quad 1đ$$

Tương tự ta có:

$$S_{ACD} = \frac{30}{451} S \quad (5) \quad \text{và} \quad S_{ABE} = \frac{1}{35} S \quad (6) \quad 1đ$$

$$\text{Do đó } S_{DEF} = S - (S_{ADC} + S_{ABE} + S_{BCF}) = \frac{86528}{584045} S. \quad 1đ$$

Bài 3

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$x^{2n}(1-x) \leq \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n} \times \frac{1}{2n+1} \quad 1đ$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho $2n+1$ số dương

$$\frac{x}{2n}, \frac{x}{2n}, \dots, \frac{x}{2n}, 1-x \text{ ta được:} \quad 1,5đ$$

$$\sqrt[2n+1]{\left(\frac{x}{2n}\right)^{2n} (1-x)} \leq \frac{\frac{x}{2n} \times 2n + 1 - x}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

$$\text{Suy ra } \left(\frac{x}{2n}\right)^{2n} (1-x) \leq \frac{1}{(2n+1)^{2n+1}} \quad 1đ$$

$$\Leftrightarrow x^{2n}(1-x) \leq \frac{(2n)^{2n}}{(2n+1)^{2n+1}} = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n} \times \frac{1}{2n+1} \quad 0,5đ$$

Bài 4

Trước hết nhận xét nếu $m = 1$ hoặc m là số nguyên tố thì $\forall a \in \mathbb{Z}$, $\forall b \in \mathbb{Z}$, $a^2 \equiv b^2 \pmod{m} \Rightarrow a \equiv \pm b \pmod{m}$ (1) 1đ

Chứng minh nhận xét trên:

* Nếu $m = 1$ thì hiển nhiên có (1)

* Xét m nguyên tố. Cho $a, b \in \mathbb{Z}$ thỏa $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$

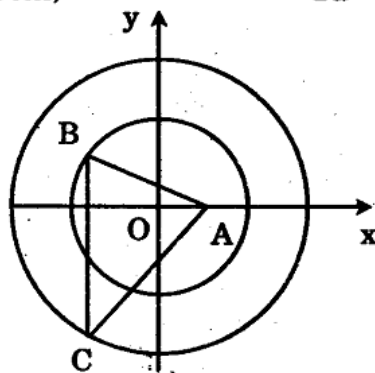
Khi đó $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow a-b \equiv 0 \pmod{m}$ hay $a+b \equiv 0 \pmod{m}$ (vì m nguyên tố)

$\Rightarrow a \equiv b \pmod{m}$ hoặc $a \equiv -b \pmod{m}$ (đpcm) 1đ

* Xét $m \neq 1$ và m không nguyên tố.

Ta sẽ chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để có (1) là $m = 2p$ với p là 1 số nguyên tố lẻ.

Điều kiện cần: Giả sử (1) đúng. Vì m là hợp số nên $m = x.y$ với $x, y \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Lấy $a = x+y$, $b = x-y$ ($a, b \in \mathbb{Z}$), ta có $a^2 - b^2 = 4xy = 4m \equiv 0 \pmod{m} \Rightarrow a^2 \equiv b^2 \pmod{m} \Rightarrow a \equiv \pm b \pmod{m}$ (do (1))



$$\Rightarrow \begin{cases} 2y = (a-b):m = xy \\ 2x = (a+b):m = xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2:x \\ 2:y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2. \end{cases}$$

Vậy $m = 2n$ với $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. 0,5đ

Nếu n là 1 hợp số thì $n = \alpha \cdot \beta$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \Rightarrow m = (2\alpha) \cdot \beta$ với $2\alpha \neq 2 \Rightarrow \beta = 2$ (theo chứng minh trên) $\Rightarrow m = 4\alpha$

Lúc này chọn $a = 2\alpha, b = 0$. Dễ thấy $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$ nhưng $a \pm b \equiv 0 \pmod{m}$ (vô lý). Vậy $n = p$ là 1 số nguyên tố.

Hơn nữa nếu $p = 2$ thì $m = 4$, theo chứng minh trên (với $\alpha = 1, m = 4\alpha$), ta thấy (1) không thỏa $\Rightarrow p$ lẻ. 0,5đ

Điều kiện đủ: Cho $m = 2p$ với p là một số nguyên tố lẻ và cho $a, b \in \mathbb{Z}$ mà $a^2 \equiv b^2 \pmod{m}$

$\Rightarrow a$ và b có cùng tính chẵn lẻ $\Rightarrow (a-b) : 2$ và $(a+b) : 2$ 0,5đ

Mặt khác, $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 : m : p$

$\Rightarrow (a-b) : p$ hoặc $(a+b) : p$.

Vậy theo (3), ta có $(a-b) : 2p = m$ hoặc $(a+b) : 2p = m \Rightarrow (1)$.

Vậy $m = 1$, hoặc m nguyên tố, hoặc $m = 2p$ với p là một số nguyên tố lẻ. 0,5đ

Bài 5

Giả sử $\triangle ABC$ có diện tích lớn nhất. Ta có $CO \perp AB$ và $BO \perp AC$, vì nếu không, chẳng hạn CO không vuông góc với AB thì tồn tại điểm C' thuộc đường tròn (C_2) sao cho $C'O \perp AB$ và $d(C', AB) > d(C, AB)$

$\Rightarrow S_{C'AB} > S_{CAB}$ (vô lý).

Do đó nếu $\triangle ABC$ có diện tích lớn nhất thì ABC phải là tam giác nhận O làm trực tâm: $BC \perp OA$. 1,5đ

Gọi $B(x_B; y_B)$ và $C(x_C; y_C)$. Vì $BC \perp OA$ nên $x_B = x_C$.

$$\overline{AB} = (x_B - 1; y_B) \quad \overline{OC} = (x_B; y_C) \quad \overline{OB} = (x_B; y_B) \quad \overline{AC} = (x_B - 1; y_C)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overline{AB} \cdot \overline{OC} = x_B(x_B - 1) + y_B y_C = 0 & (1) \\ x_B^2 + y_B^2 = 2 & (2) (*) \\ x_B^2 + y_C^2 = 5 & (3) \end{cases} \quad 0,5đ$$

$$\text{Từ (2) và (3)} \Rightarrow y_B^2 = 2 - x_B^2 \quad \text{và} \quad y_C^2 = 5 - x_B^2 \quad (4)$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow y_B y_C = x_B - x_B^2 \Rightarrow y_B^2 y_C^2 = x_B^2 - 2x_B^3 + x_B^4 \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5)} \Rightarrow (2 - x_B^2)(5 - x_B^2) = x_B^2 - 2x_B^3 + x_B^4$$

$$\Leftrightarrow 2x_B^3 - 8x_B^2 + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_B + 1)(2x_B^2 - 10x_B + 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_B = -1 \text{ (6) hay } x_B = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \text{ (7) hay } x_B = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \text{ (8) } \quad 1d$$

Thế (7) vào (2) không thỏa. Suy ra (7) loại

Ta có (dùng (4) và (5)):

$$S = \frac{1}{2} |x_A - x_B| |y_C - y_B| \Rightarrow S^2 = \frac{1}{4} (1 - x_B)^2 (7 - 2x_B)$$

$$\text{Với } x_B = -1 \text{ ta có } S = 3 \text{ Với } x_B = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \text{ ta có: } S < 3 \quad 0,5d$$

Vậy S lớn nhất $\Leftrightarrow x_B = x_C = -1$.

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} y_B y_C = -2 \\ y_B^2 = 1 \end{cases} \text{ và } y_C^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} y_B = 1 \\ y_C = -2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} y_B = -1 \\ y_C = 2 \end{cases}$$

Vậy với $B_1(-1; 1)$ và $C_1(-1; -2)$ hoặc $B_2(-1; -1)$ và $C_2(-1; 2)$ thì diện tích tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất và $\max S = 3$. 0,5d

Năm 2009

Bài 1

$$\text{Phương trình đã cho tương đương } (x+1)^3 = 3\sqrt{3x+5} + 2 \quad (1). \quad (0,5)$$

$$\text{Đặt } \sqrt[3]{3x+5} = y+1, \text{ suy ra } 3x+5 = (y+1)^3 \text{ và (1) trở thành } (x+1)^3 = 3y+5. \quad (0,5)$$

$$\text{Vậy ta có hệ phương trình } \begin{cases} (x+1)^3 = 3y+5 \\ (y+1)^3 = 3x+5 \end{cases} \quad (1,0)$$

Trừ vế theo vế hai phương trình của hệ trên, ta được

$$(x+1)^3 - (y+1)^3 = -3(x-y)$$

$$\Leftrightarrow (x-y)[(x+1)^2 + (x+1)(y+1) + (y+1)^2 + 3] = 0 \quad (0,5)$$

$$\Leftrightarrow x = y. \quad (0,25)$$

$$(\text{Vì } (x+1)^2 + (x+1)(y+1) + (y+1)^2 + 3 > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}). \quad (0,5)$$

$$\text{Vậy ta có phương trình: } (x+1)^3 = 3x+5$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -2. \quad (0,5)$$

$$\text{Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm: } x = 1 \text{ và } x = -2. \quad (0,25)$$

Bài 2

➤ Với $p = 2$ ta có $2^1 = 1^3 + 1^3$. (0,5)

➤ Với $p = 3$ ta có $3^2 = 1^3 + 2^3$. (0,5)

➤ Ta chứng minh khi $p > 3$ thì không tồn tại các số n, x, y thỏa đề bài.

Thật vậy, giả sử ngược lại, chọn n, x, y thỏa (*) sao cho n bé nhất.

Do $p \neq 2$ nên $(x, y) \neq (1, 1)$; khi đó:

$$x^2 - xy + y^2 = (x - y)^2 + xy > 1 \text{ và } x + y > 1. \quad (0,5)$$

Do đó $x^2 - xy + y^2$ và $x + y$ đều là bội của p . (0,5)

$$\Rightarrow (x + y)^2 - (x^2 - xy + y^2) = 3xy : p. \quad (0,5)$$

Do $p > 3$ nên $x : p$ hoặc $y : p$.

Mà $x + y : p$ nên ta có x và y đều chia hết cho p . (0,5)

Điều này cho ta:

$$(*) \quad p^{n-3} = \left(\frac{x}{p}\right)^3 + \left(\frac{y}{p}\right)^3 \Leftrightarrow p^{n'} = x'^3 + y'^3 \text{ với } (n', x', y') = \left(n-3, \frac{x}{p}, \frac{y}{p}\right)$$

mà $n' < n$ (trái giả thiết). (0,5)

Vậy chỉ có $p = 2$ và $p = 3$ thỏa đề bài. (0,5)

Bài 3

Gọi P, Q là tâm đường tròn (AIJ) và (ADB) $\Rightarrow PQ$ vuông góc AM (1)

Ta có $\widehat{AIJ} = \widehat{BCJ} = \widehat{DCJ} = \widehat{AJI}$ (2)

$$\widehat{PJA} = \frac{180^\circ - \widehat{APJ}}{2} = 90^\circ - \widehat{AIJ} \quad (3)$$

$$\widehat{PAD} = \frac{180^\circ - \widehat{API}}{2} = 90^\circ - \widehat{AJI} \quad (4)$$

Từ (2), (3) và (4) suy ra $\widehat{PJA} = \widehat{PAI}$ (5) (0,5)

Mà $PA = PJ$ (6)

Vì $\widehat{BJC} = \widehat{DCJ} = \widehat{BCJ}$ nên $\triangle BJC$ cân tại B $\Rightarrow AD = BC = BJ$ (7)

Từ (5), (6) và (7) suy ra $\triangle PAD = \triangle PJB \Rightarrow PB = PD$ mà $QB = QD$ (0,5)

$\Rightarrow PQ$ là trung trực của $BD \Rightarrow PQ$ vuông góc BD (8)

Từ (1) và (8) suy ra $AM \parallel BD$ (9) (0,5)

(9) $\Rightarrow$ AMDB là hình thang cân (do AMDB nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{MDB} = \widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ và $\widehat{DBC} = \widehat{BDA} = \widehat{DBM}$

Do đó $\triangle DBM = \triangle DBC \Rightarrow BD$ vuông góc MC (10)

(9) và (10) $\Rightarrow \widehat{AMC} = 90^\circ \Rightarrow M$ thuộc đường tròn (K) đường kính AC cố định. (0,5)

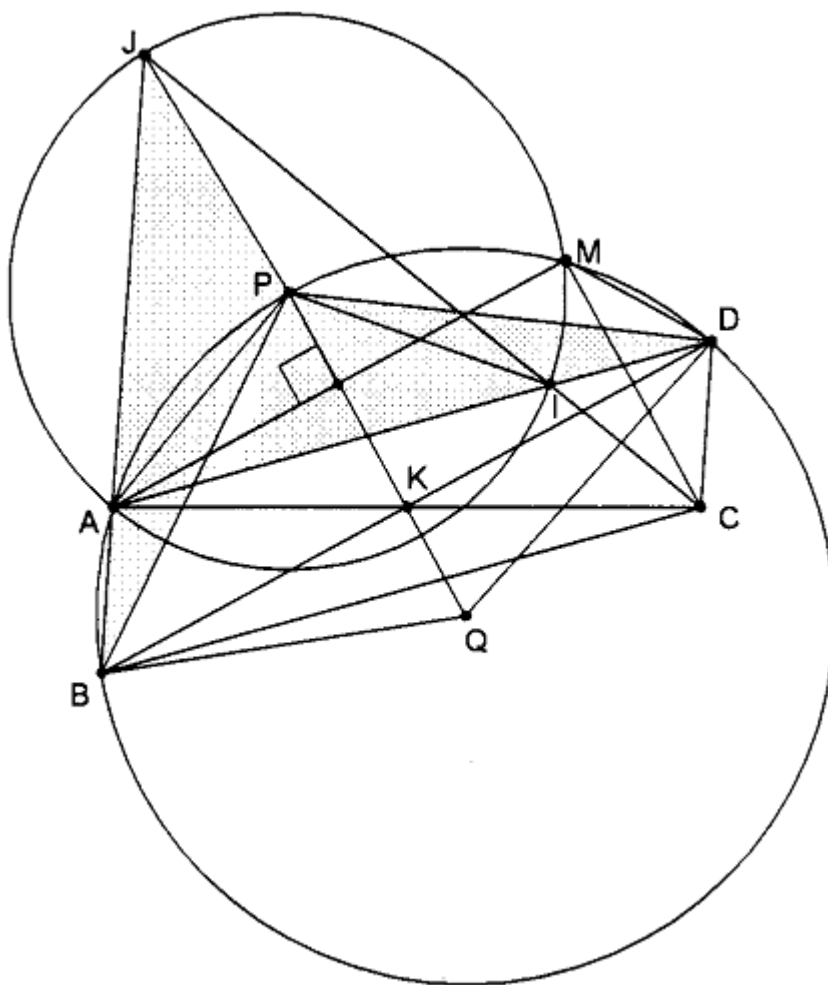
➤ (Xem hình 2) Dựng $NE \perp AC$ và $MF \perp AC$.

Ta có: $\frac{CE}{KC} = \frac{NE}{HK} = \frac{NE}{MF} = \frac{KN}{KM}$ (0,5)

mà $KC = KM \Rightarrow NK = EC$ (0,5)

$\Rightarrow NK = d(N; (\Delta))$ với Δ là đường thẳng vuông góc AC tại C. (0,5)

$\Rightarrow N$ thuộc parabol (P) có tiêu điểm K và đường chuẩn (Δ) . (0,5)



Bài 4

Đặt $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$, $y = \sqrt{\frac{c}{b}}$, $z = \sqrt{\frac{a}{c}}$, ta có $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$.

Bất đẳng thức đã cho trở thành

$$\sqrt{\frac{2}{1+x^2}} + \sqrt{\frac{2}{1+y^2}} + \sqrt{\frac{2}{1+z^2}} \leq 3 \quad (1,0)$$

Giả sử $xy \leq 1 \Rightarrow z \geq 1$.

➤ Ta chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{2}{1+xy} \quad (1)$.

Thật vậy, (1) $\Leftrightarrow (2+x^2+y^2)(1+xy) \leq 2(1+x^2)(1+y^2)$

$$\Leftrightarrow (1-xy)(x-y)^2 \geq 0 \quad (\text{đúng}) \quad (0,5)$$

➤ Ta có:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\frac{2}{1+x^2}} + \sqrt{\frac{2}{1+y^2}} \right)^2 &\leq 2 \left(\frac{2}{1+x^2} + \frac{2}{1+y^2} \right) \\ &= 4 \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \right) \leq \frac{8}{1+xy} = \frac{8z}{1+z} \end{aligned} \quad (0,5)$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{\frac{2}{1+x^2}} + \sqrt{\frac{2}{1+y^2}} \leq 2\sqrt{\frac{2z}{1+z}}. \quad (0,5)$$

$$\text{Mặt khác, ta lại có } \sqrt{\frac{2}{1+z^2}} \leq \frac{2}{1+z}.$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{\frac{2}{1+x^2}} + \sqrt{\frac{2}{1+y^2}} + \sqrt{\frac{2}{1+z^2}} \leq 2\sqrt{\frac{2z}{1+z}} + \frac{2}{1+z}.$$

$$\text{Do vậy, ta sẽ chứng minh } 2\sqrt{\frac{2z}{1+z}} + \frac{2}{1+z} \leq 3. \quad (0,5)$$

Thật vậy, ta có:

$$2\sqrt{\frac{2z}{1+z}} + \frac{2}{1+z} \leq 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{2z(z+1)} + 2 \leq 3(1+z) \quad (0,5)$$

$$\Leftrightarrow 2z - 2\sqrt{2z(z+1)} + (z+1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2z} - \sqrt{z+1})^2 \geq 0. \quad (0,5)$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Bài 5

Chọn hệ trục tọa độ Oxy với O trùng I và trục Ox là đường thẳng BC.

Chuẩn hóa BC = 2. Khi đó, tọa độ B(-1; 0) và C(1; 0).

Giả sử tọa độ điểm A(x₀; y₀) với y₀ ≠ 0 và x₀ ≠ 0. (0,5)

Khi đó, trục tâm H(x, y) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \overline{AH \cdot BC} = 0 \\ \overline{BH \cdot AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ (x_0 - 1)(x + 1) + y_0 y = 0 \end{cases} \quad (0,5)$$

$$\Leftrightarrow H \left(x_0; \frac{1 - x_0^2}{y_0} \right). \quad (0,5)$$

Gọi K là giao điểm của d và AI, khi đó tọa độ K là nghiệm của hệ phương trình

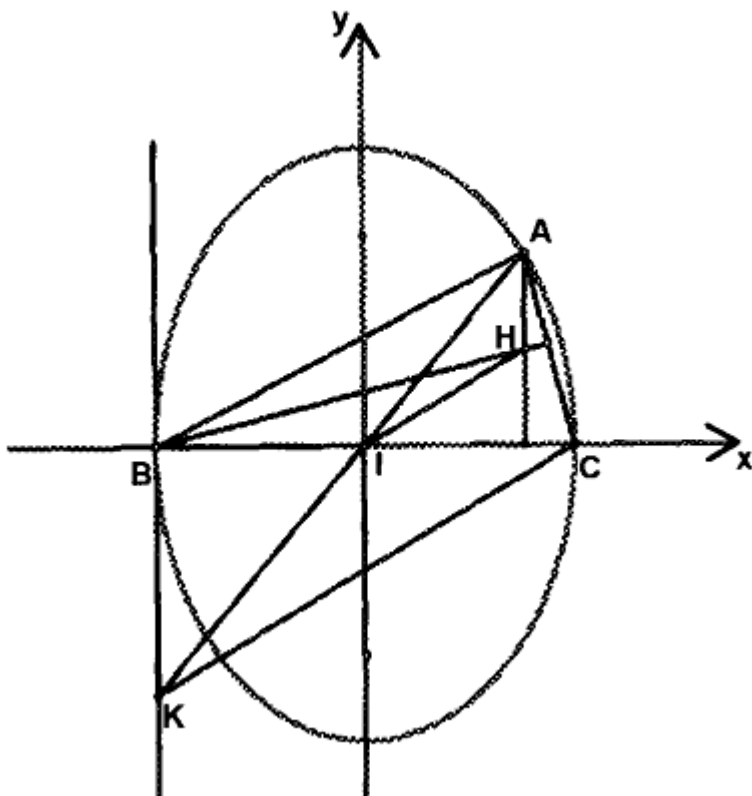
$$\begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{y_0}{x_0} x \end{cases} \quad (x_0 \neq 0) \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow K(-1; -\frac{y_0}{x_0}). \quad (0,5)$$

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{aligned}
 IH // KC \Rightarrow \overrightarrow{IH}; \overrightarrow{KC} \text{ cùng phương} &\Leftrightarrow \frac{y_0}{x_0} \cdot x_0 - 2 \frac{1-x_0^2}{y_0} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{1} + \frac{y_0^2}{2} = 1.
 \end{aligned}
 \tag{1,0}$$

Vậy A di động trên đường (E): $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{2} = 1$ cố định. (0,5)



Năm 2010

Bài 1

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = a, \frac{1}{\sqrt[3]{y}} = b$$

$$\text{ta có } (a+b+1)^3 = a^3 + b^3 + 1 + 3(a+1)(b+1)(a+b) = 64$$

$$\Rightarrow a+b=3 \Rightarrow ab=2 \dots$$

nghiệm $(x,y)=(1,1/8),(1/8,1)$

Bài 3

Cách 1

$$\text{đặt } t = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Rightarrow t \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{cần cm: } \sum ab\sqrt{(3c-3)(c+1)} \leq \frac{9}{2}abc. (*)$$

$$VT(*) \leq \sum ab(2c-1) = 6abc - \sum ab \leq \frac{9}{2}abc \Leftrightarrow 2 \sum ab \geq 3abc \Leftrightarrow t \geq 3/2$$

.đpcm

Giải cách 2 Chia hai vế của giả thiết cho abc , ta được:

$$\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} = 1 - \frac{2}{abc}.$$

Đặt: $\frac{1}{bc} = \cos^2 A$; $\frac{1}{ca} = \cos^2 B$; $\frac{1}{ab} = \cos^2 C$. Ta chuyển BĐT ban đầu lại như sau:

$$\sum \sqrt{1 - \frac{\cos^2 B \cos^2 C}{\cos^2 A}} \leq \sqrt{3(3 - \sum \frac{\cos^2 B \cos^2 C}{\cos^2 A})} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Bình phương hai vế, rồi áp dụng: $\frac{\cos^2 B \cos^2 C}{\cos^2 A} + \frac{\cos^2 C \cos^2 A}{\cos^2 B} \geq 2\cos^2 C$.

$$\text{Suy ra: } \sum \frac{\cos^2 B \cos^2 C}{\cos^2 A} \geq \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$$

Cuối cùng ta được: $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$ (đúng). Suy ra đpcm.

Cách 3

đặt $1/a=x$, tương ứng cho y,z : khi đó

$$xy + yz + zx + 2xyz = 1$$

bđt tương đương:

$$\sum \sqrt{1-x^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Cauchy Schwarz:

$$VT \leq \sqrt{3(3-x^2-y^2-z^2)} \leq \sqrt{3(3-xy-yz-zx)}$$

Giả sử $xy + yz + zx < 3/4$ suy ra $xy + yz + zx + 2xyz < 1$.

Vậy $xy + yz + zx \geq 3/4$

Từ cái này suy ra

$$\sqrt{3(3-xy-yz-zx)} \leq VP$$

Có đpcm.

Một vài đề thi bất wa các năm !!

Đề 1 (200?)

CM rằng với các số thực $a,b,c \in [1;2]$ ta có bất sau

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq 10$$

Đề 2 (200?)

CM rằng với mọi $0 \leq x \leq 1$ ta có bất

$$x(9\sqrt{1+x^2} + 13\sqrt{1-x^2}) \leq 16$$

Đề 3 (2003)

Cho $a,b>0$, x,y,z là 3 số dương tùy ý. Tìm min

$$P = \frac{x^2}{(ay+bz)(az+by)} + \frac{y^2}{(az+bx)(ax+bz)} + \frac{z^2}{(ax+by)(ay+bx)}$$

Đề 4 (2004)

Cho $a,b>0, x,y,z>0$ và $x+y+z=1$. CMR

$$P = \left(a + \frac{b}{x}\right)^4 + \left(a + \frac{b}{y}\right)^4 + \left(a + \frac{b}{z}\right)^4 \geq 3(a + 3b)^4$$

Tài liệu được sưu tầm bởi Lê Thiên Cương