

ĐỀ 84**ĐỀ HSG TOÁN 9 HUẾ 2023-2024****Câu 1.** (3,0 điểm)

Cho biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{x}+2022}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2022}{x-1} \right) \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$

a. Rút gọn biểu thức P.**b.** Tính giá trị của P khi $x = \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$ **Câu 2.** (4,0 điểm)

a. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a \neq 0$ và $2a+3b+6c=0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|x_1-x_2|$.

b. Tìm các cặp nghiệm nguyên dương (x;y) thỏa mãn phương trình:

$$x^2+y^2+2(1+y)x=14y-1$$

Câu 3. (2,0 điểm) Giải phương trình: $\sqrt{2x-3}-4=3(x-\sqrt{4x+1})$

Câu 4. (3,0 điểm) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3+y^3-xy^2=1 \\ 4x^4+y^4=4x+y \end{cases}$$

Câu 5. (6,0 điểm)

Cho nửa đường tròn đường kính $BC = 2R$ là điểm di động trên nửa đường tròn đó. Gọi D là hình chiếu vuông góc của A lên BC và M, N lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABD, ACD.

a. Chứng minh: CN vuông góc với AM.

b. Chứng minh: $\triangle DMN$ và $\triangle DBA$ là hai tam giác đồng dạng.

c. Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với MN. Chứng minh rằng: d luôn đi qua một điểm cố định.

d. Tìm vị trí của điểm A để đoạn MN có độ dài lớn nhất và tính độ dài lớn nhất đó theo R.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho x là số thực tùy ý. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}} - \frac{x+1}{\sqrt{1+3x^2}}$$

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (3,0 điểm)

Cho biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{x}+2022}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2022}{x-1} \right) \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$

a. Rút gọn biểu thức P.

ĐKXĐ: $x \neq 0; x \neq 1$

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{\sqrt{x}+2022}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2022}{x-1} \right) \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \\ &= \left(\frac{(\sqrt{x}+2022)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}-2022)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} \right) \left(\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{2021}{\sqrt{x}-1} \end{aligned}$$

b. Tính giá trị của P khi $x = \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} \\ &= \sqrt[3]{8+18-12\sqrt{3}-3\sqrt{3}} + \sqrt[3]{8+18+12\sqrt{3}+3\sqrt{3}} \\ &= \sqrt[3]{2^3+3 \cdot 2^2\sqrt{3}+3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^3} \\ &= \sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^3} + \sqrt[3]{(2+\sqrt{3})^3} \\ &= 2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4 \end{aligned}$$

Thay $x = 4$ (t/m ĐKXĐ) vào P, ta được:

$$P = \frac{2021}{\sqrt{4}-1} = 2021$$

Câu 2. (4,0 điểm)

a. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a \neq 0$ và $2a+3b+6c=0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ và tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|x_1-x_2|$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{2a+6c}{3} \right)^2 - 4ac = \frac{4a^2+12}{9} = \frac{3a^2+(a+6c)^2}{9} > 0$$

do đó phương trình luôn có hai nghiệm thực phân biệt $x_1; x_2$.

$$\text{Theo Viet ta có } \begin{cases} x_1+x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}, \text{ khi đó}$$

$$\begin{aligned} (x_1-x_2)^2 &= (x_1+x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2-4ac}{a^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{4a^2-12ac+36c^2}{a^2} \\ &= \frac{1}{9} \cdot [(6t-1)^2+3] \geq \frac{1}{3}, \text{ ở đây } t = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Vậy $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ khi $6c = a$, tức $\begin{cases} b = -a \\ c = \frac{a}{6} \end{cases}$

b. Tìm các cặp nghiệm nguyên dương (x;y) thỏa mãn phương trình:

$$x^2 + y^2 + 2(1+y)x = 14y - 1$$

Để phương trình có nghiệm nguyên thì $\Delta' = (x-7)^2 - (x^2 + 2x + 1)$
 $\quad \quad \quad -16x + 48 = 16(-x+3)$

là số chính phương $\Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=2 \end{cases}$

$x=3$ thế vào ta được $y^2 - 8y + 16 = 0 \Leftrightarrow y = 4$

$x=2$ thế vào ta được $y^2 - 10y + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=9 \end{cases}$

Câu 3. (2,0 điểm) Giải phương trình: $\sqrt{2x-3} - 4 = 3(x - \sqrt{4x+1})$

ĐKXD: $x \geq \frac{3}{2}$

$$\sqrt{2x-3} - 4 = 3(x - \sqrt{4x+1})$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x-3} - 8 = 6x - 6\sqrt{4x+1} \text{ (nhân hai vế cho 2 rồi chuyển vế ta được)}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x-3} - 8 - 6x + 6\sqrt{4x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{4x+1} - 3)^2 + (\sqrt{2x-3} - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4x+1} = 3 \\ \sqrt{2x-3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \text{ (t/m ĐKXD)}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2$

Câu 4. (3,0 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + y^3 - x y^2 = 1 \\ 4x^4 + y^4 = 4x + y \end{cases}$

$$\begin{cases} y^3 - 1 = x y^2 - x^3 \\ 4x^4 - 4x + y^4 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 - 1 = x y^2 - x^3 \quad (1) \\ 4x^4 - 4x + y(x y^2 - x^3) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Giải pt (2)

$$4x^4 - 4x + y(x y^2 - x^3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x(x^3 - 1) + yx(y^2 - x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow xy(x - y)(x - 3y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x=y \\ x=3y \end{cases}$$

+) $x=0$ thế vào suy ra $y = 1$

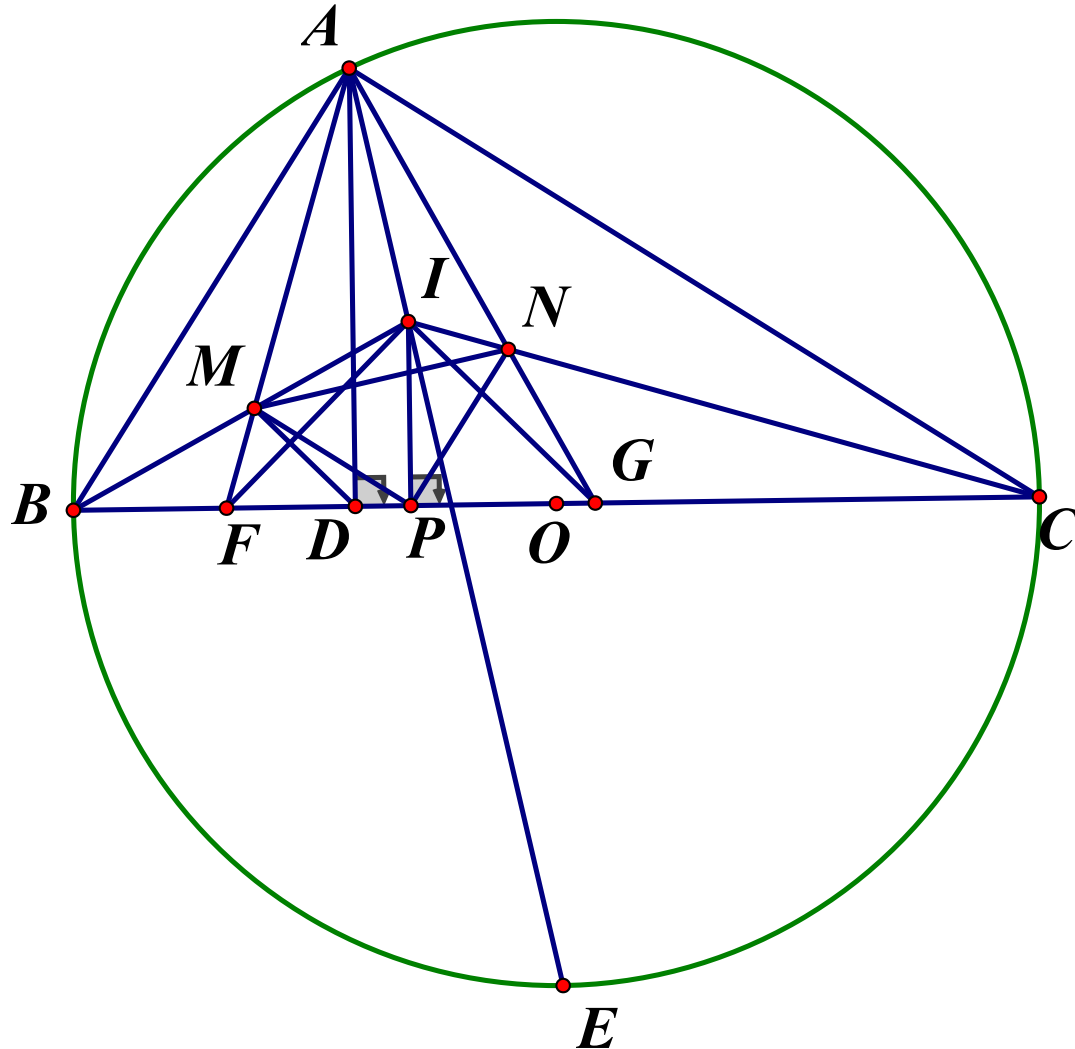
+) $y=0$ thế vào suy ra $x = 1$

+) $x=y$ thế vào suy ra $x^3 = 1$ suy ra $x = y = 1$

+) $x=3y$ thế vào suy ra $\begin{cases} x = 3\sqrt[3]{\frac{1}{25}} \\ y = \sqrt[3]{\frac{1}{25}} \end{cases}$

Câu 5. (6,0 điểm)

Cho nửa đường tròn đường kính $BC = 2R$ là điểm di động trên nửa đường tròn đó. Gọi D là hình chiếu vuông góc của A lên BC và M, N lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABD, ACD .



a. Chứng minh: CN vuông góc với AM .

Kéo dài AM, AN cắt BC tại F, G . Ta có $\widehat{AFC} = \widehat{ABC} + \widehat{BAF}$
 $= \widehat{DAC} + \widehat{DAF} = \widehat{FAC} \Rightarrow \triangle AFC$ cân tại $C \Rightarrow CN$ là trung trực của AF ,
 tức $CM \perp AM$

b. Chứng minh: $\triangle DMN$ và $\triangle DBA$ là hai tam giác đồng dạng.

Ta có
$$\begin{cases} \widehat{NAD} = \frac{1}{2} \widehat{DAC} = \frac{1}{2} \widehat{DBA} = \widehat{DBM} \\ \widehat{ADN} = 45^\circ = \widehat{MDB} \end{cases} \Rightarrow \triangle AND \sim \triangle BDM$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{DN}{DM} = \frac{DA}{DB} \\ \frac{DDM}{ADB} \end{cases} \Rightarrow \triangle NDA \sim \triangle ADB.$$

c. Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với MN. Chứng minh rằng: d luôn đi qua một điểm cố định.

Gọi I là giao điểm của BM và CN suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Mặt khác theo câu trên ta có $\angle I \perp AM$, tương tự $\angle I \perp AN$, tức I là trực tâm tam giác AMN, do đó đường thẳng đi qua A vuông góc với MN chính là đường thẳng AI.

Gọi E là giao điểm của AI với đường tròn đường kính BC khi đó E là chính giữa cung BC khác phía với điểm A, tức E cố định.

Vậy d luôn đi qua điểm E cố định.

d. Tìm vị trí của điểm A để đoạn MN có độ dài lớn nhất và tính độ dài lớn nhất đó theo R.

Ta có CI là trung trực AF $\Rightarrow \widehat{IFG} = \widehat{IAC} = 45^\circ$, tương tự $\widehat{IGF} = 45^\circ$ tức FIG vuông cân tại I hay F, M, I, N, G thuộc đường tròn đường kính FG.

Gọi P là trung điểm của FG khi đó $\widehat{MPN} = 2\widehat{MFN} = 90^\circ$, tức $\triangle MPN$ vuông tại P

$$P \Rightarrow MN = \sqrt{2} PM = \frac{\sqrt{2}}{2} FG$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác } FG &= BG + CF - \angle BC = BA + CA - \angle BC \leq \sqrt{2(BA^2 + CA^2)} - BC \\ &= 2R(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

Do đó $MN \leq R\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)$, tức $MN_{\max} = R(2 - \sqrt{2})$ khi $AB = AC$, tức A là điểm chính giữa cung BC.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho x là số thực tùy ý. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}} - \frac{x+1}{\sqrt{1+3x^2}}$$

Dự đoán đạt $Q_{\max} = 2$ tại $x = 1$. Chú ý $Q_{\max}$ khi $x \geq 0$. Ta có

$$Q = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3} + \frac{x+1}{\sqrt{1+3x^2}}} = \frac{(x+1)(\sqrt{x^2+3} + \sqrt{1+3x^2})}{\sqrt{x^2+3} \cdot \sqrt{1+3x^2}} \leq \frac{(x+1)(2\sqrt{2}\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+3} \cdot \sqrt{1+3x^2}}$$

Ta sẽ chứng minh $\frac{(x+1)\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+3} \cdot \sqrt{1+3x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)^2(x^2+1) \leq (x^2+3)(1+3x^2)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (x-1)^4$$

Vậy $Q_{\max} = 2$ khi $x = 1$

----- **HẾT** -----