

Chương MỆNH ĐỀ TOÁN HỌC

BÀI 1. MỆNH ĐỀ TOÁN HỌC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Mỗi mệnh đề toán học phải hoặc đúng hoặc sai. Một mệnh đề toán học không thể vừa đúng, vừa sai.
- Cho mệnh đề P . Mệnh đề "Không phải P " được gọi là *mệnh đề phủ định* của mệnh đề P và kí hiệu là $\bar{P}$. Mệnh đề $\bar{P}$ đúng khi P sai. Mệnh đề $\bar{P}$ sai khi P đúng.
- Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai; đúng trong các trường hợp còn lại.
- Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là *mệnh đề đảo* của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.
- Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng, ta nói P và Q là hai mệnh đề tương đương, kí hiệu $P \Leftrightarrow Q$.
- Cho mệnh đề chứa biến " $P(x), x \in X$ ".
- + Mỗi phát biểu " $\forall x \in X, P(x)$ " và " $\exists x \in X, P(x)$ " là một mệnh đề.
- + Phủ định của mỗi mệnh đề trên lần lượt là mệnh đề " $\exists x \in X, \bar{P}(x)$ " và " $\forall x \in X, \bar{P}(x)$ ".

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Xác định mệnh đề phủ định và xét tính đúng sai của một mệnh đề

Ví dụ 1. Nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề phủ định đó:

- a) A : " $\frac{1,2}{5}$ là một phân số";
- b) B : "Phương trình $x^2 + 3x + 2 = 0$ có nghiệm";
- c) C : " $2^2 + 2^3 = 2^{2+3}$ ";
- d) D : "Số 2025 chia hết cho 15".

Giải

- a) Mệnh đề phủ định của mệnh đề A là $\bar{A}$: " $\frac{1,2}{5}$ không là phân số". Mệnh đề $\bar{A}$ đúng vì $\frac{1,2}{5}$ không là số nguyên.
- b) Mệnh đề phủ định của mệnh đề B là $\bar{B}$: "Phương trình $x^2 + 3x + 2 = 0$ không có nghiệm". Mệnh đề $\bar{B}$ sai vì phương trình $x^2 + 3x + 2 = 0$ có hai nghiệm là $x = -1, x = -2$.
- c) Mệnh đề phủ định của mệnh đề C là $\bar{C}$: " $2^2 + 2^3 \neq 2^{2+3}$ ". Mệnh đề $\bar{C}$ đúng vì $2^2 + 2^3 = 12$ và $2^{2+3} = 32$.

d) Mệnh đề phủ định của mệnh đề D là $\bar{D}$: "Số 2025 không chia hết cho 15". Mệnh đề $\bar{D}$ sai vì 2025 chia hết cho 15 .

Vấn đề 2 . Xác định mệnh đề kéo theo

Ví dụ 2. Cho n là số tự nhiên. Xét các mệnh đề:

P : " n là một số tự nhiên chia hết cho 16",

Q : " n là một số tự nhiên chia hết cho 8".

a) Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Nhận xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

b) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Nhận xét tính đúng sai của mệnh đề đó.

Giải

a) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$: "Nếu số tự nhiên n chia hết cho 16 thì n chia hết cho 8 ". Đây là mệnh đề đúng vì 8 là ước của 16 .

b) Mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề $Q \Rightarrow P$: "Nếu số tự nhiên n chia hết cho 8 thì n chia hết cho 16 ". Đây là mệnh đề sai vì với $n=8, n$ chia hết cho 8 nhưng không chia hết cho 16 .

Ví dụ 3. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề phủ định đó:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 2x - 2$;

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2x - 1$

c) $\exists x \in \mathbb{R}, x + \frac{1}{x} \geq 2$

d) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0$.

Giải

a) Phủ định của mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 2x - 2$ " là mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2x - 2$ ". Mệnh đề phủ định sai vì phương trình $x^2 = 2x - 2$ vô nghiệm nên không có giá trị nào của x thoả mãn $x^2 = 2x - 2$.

b) Phủ định của mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2x - 1$ " là mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 2x - 1$ ". Mệnh đề phủ định đúng vì với $x=2$, ta có: $2^2 > 2.2 - 1$.

c) Phủ định của mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R}, x + \frac{1}{x} \geq 2$ " là mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R}, x + \frac{1}{x} < 2$ ". Mệnh đề phủ định sai vì

với $x=2$, ta có: $2 + \frac{1}{2} > 2$.

d) Phủ định của mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0$ " là mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 \geq 0$ ". Mệnh đề phủ định

đúng vì $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Chú ý: Cách làm ở Ví dụ 3 lần lượt cho chúng ta phương pháp chứng minh tính đúng

C. BÀI TẬP

1. Cho mệnh đề A : "Nghiem của phương trình $x^2 - 5 = 0$ là số hữu tỉ". Mệnh đề phủ định của mệnh đề trên là:

A. "Nghiem của phương trình $x^2 - 5 = 0$ không là số hữu tỉ".

B. "Nghiem của phương trình $x^2 - 5 = 0$ không là số vô tỉ".

C. "Phương trình $x^2 - 5 = 0$ vô nghiệm".

D. "Nghiem của phương trình $x^2 - 5 = 0$ không là số nguyên".

2. Cho số tự nhiên n . Xét mệnh đề "Nếu số tự nhiên n chia hết cho 4 thì n chia hết cho 2". Mệnh đề đảo của mệnh đề đó là:

A. "Nếu số tự nhiên n chia hết cho 2 thì n không chia hết cho 4".

B. "Nếu số tự nhiên n chia hết cho 4 thì n không chia hết cho 2".

C. "Nếu số tự nhiên n chia hết cho 2 thì n chia hết cho 4".

D. "Nếu số tự nhiên n không chia hết cho 2 thì n không chia hết cho 4".

3. Cho tứ giác $ABCD$. Xét mệnh đề "Nếu tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật thì tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau". Mệnh đề đảo của mệnh đề đó là:

A. "Nếu tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật thì tứ giác $ABCD$ không có hai đường chéo bằng nhau".

B. "Nếu tứ giác $ABCD$ không có hai đường chéo bằng nhau thì tứ giác $ABCD$ không là hình chữ nhật".

C. "Nếu tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau thì tứ giác $ABCD$ không là hình chữ nhật".

D. "Nếu tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau thì tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật".

4. Phủ định của mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0$ " là mệnh đề:

A. " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 \geq 0$ ".

B. " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0$ ".

C. " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$ ".

D. " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 \geq 0$ ".

5. Phủ định của mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{Q}, x = \frac{1}{x}$ " là mệnh đề:

A. " $\exists x \in \mathbb{Q}, x \neq \frac{1}{x}$ ".

B. " $\forall x \in \mathbb{Q}, x = \frac{1}{x}$ ".

- C. " $\forall x \notin \mathbb{Q}, x \neq \frac{1}{x}$ ".
- D. " $\forall x \in \mathbb{Q}, x \neq \frac{1}{x}$ ".

6. Phủ định của mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ " là mệnh đề:

- A. " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ ".
- B. " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ ".
- C. " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$ ".
- D. " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$ ".

7. Phủ định của mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq x$ " là mệnh đề:

- A. " $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < x$ ".
- B. " $\exists x \in \mathbb{R}, |x| \leq x$ ".
- C. " $\exists x \in \mathbb{R}, |x| < x$ ".
- D. " $\exists x \in \mathbb{R}, |x| > x$ ".

8. Cho x, y là hai số thực cùng khác -1 . Kết luận nào sau đây là đúng?

- A. $x + y + xy \neq -1$.
- B. $x + y + xy = -1$.
- C. $x + y \neq -2$.
- D. $xy \neq -1$.

9. Cho a, b là hai số thực thoả mãn $a + b < 2$. Kết luận nào sau đây là đúng?

- A. Cả hai số a, b đều nhỏ hơn 1.
- B. Có ít nhất một trong hai số a, b nhỏ hơn 1.
- C. Có ít nhất một trong hai số a, b lớn hơn 1.
- D. Cả hai số a, b không vượt quá 1.

10. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là mệnh đề toán học?

- a) Số π là số vô tỉ;
- b) Bình phương của mọi số thực đều là số dương;
- c) Tồn tại số thực x mà x lớn hơn số nghịch đảo của nó;
- d) Fansipan là ngọn núi cao nhất Việt Nam.

11. Nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề phủ định đó:

- a) A : "Trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = -x^2$ là trục tung";
- b) B : "Phương trình $3x^2 + 1 = 0$ có nghiệm";
- c) C: "Hai đường thẳng $y = 2x + 1$ và $y = -2x + 1$ không song song với nhau";
- d) D: "Số 2024 không chia hết cho 4".

12. Cho mệnh đề kéo theo có dạng $P \Rightarrow Q$: "Vì 120 chia hết cho 6 nên 120 chia hết cho 9".

- a) Mệnh đề trên đúng hay sai?

b) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề trên và xét tính đúng sai của mệnh đề đảo đó.

13. Cho mệnh đề kéo theo có dạng $P \Rightarrow Q$: "Nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường".

a) Mệnh đề trên đúng hay sai?

b) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề trên và xét tính đúng sai của mệnh đề đảo đó.

14. Cho tam giác ABC với đường trung tuyến AM . Xét các mệnh đề:

P : "Tam giác ABC vuông tại A ",

Q : "Độ dài đường trung tuyến AM bằng nửa độ dài cạnh BC ".

a) Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow P$ và xác định tính đúng sai của mỗi mệnh đề đó.

b) Nếu cả hai mệnh đề trong ý a) là đúng, hãy phát biểu mệnh đề tương đương.

15. Dùng kí hiệu $\forall$ hoặc $\exists$ để viết các mệnh đề sau:

a) Có một số nguyên không chia hết cho chính nó;

b) Có một số thực mà bình phương của nó cộng với 1 bằng 0 ;

c) Mọi số nguyên dương đều lớn hơn nghịch đảo của nó;

d) Mọi số thực đều lớn hơn số đối của nó.

16. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề phủ định đó.

a) $\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)$ chia hết cho 2 ;

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > x$

c) $\exists x \in \mathbb{R}, |x| > x$

d) $\exists x \in \mathbb{Q}, x^2 - x - 1 = 0$.

17. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

a) Xét mệnh đề "Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có một nghiệm bằng 1 ". Mệnh đề này đúng hay sai?

b) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề trên. Mệnh đề đảo đúng hay sai?

c) Nêu điều kiện cần và đủ để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có một nghiệm bằng 1 .

D. LỜI GIẢI THAM KHẢO

1.A. 2.C. 3.D. 4.A. 5.D. 6.D. 7.C. 8.A. 9. B.

10. a) Là một mệnh đề toán học.

b) Là một mệnh đề toán học.

c) Là một mệnh đề toán học.

d) Không là mệnh đề toán học.

11. a) $\bar{A}$: "Trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = -x^2$ không là trục tung". Mệnh đề phủ định sai.

b) $\bar{B}$: "Phương trình $3x^2 + 1 = 0$ vô nghiệm". Mệnh đề phủ định đúng.

c) $\bar{C}$: "Hai đường thẳng $y = 2x + 1$ và $y = -2x + 1$ song song với nhau". Mệnh đề phủ định sai.

d) $\bar{D}$: "Số 2024 chia hết cho 4". Mệnh đề phủ định đúng.

12. a) Mệnh đề sai.

b) Mệnh đề đảo: "Vì 120 chia hết cho 9 nên 120 chia hết cho 6". Mệnh đề này đúng.

13. a) Mệnh đề đúng.

b) Mệnh đề đảo: "Nếu tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành". Mệnh đề này đúng.

14. a) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$: "Nếu tam giác ABC vuông tại A thì độ dài đường trung tuyến AM bằng nửa độ dài cạnh BC ". Mệnh đề này đúng.

Mệnh đề $Q \Rightarrow P$: "Nếu tam giác ABC có độ dài đường trung tuyến AM bằng nửa độ dài cạnh BC thì tam giác ABC vuông tại A ". Mệnh đề này đúng.

b) Mệnh đề tương đương $P \Leftrightarrow Q$: "Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi độ dài đường trung tuyến AM bằng nửa độ dài cạnh BC ".

15. a) " $\exists n \in \mathbb{Z}, n$ không chia hết cho chính nó".

b) " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$ ". c) " $\forall n \in \mathbb{N}, n > \frac{1}{n}$ ". d) " $\forall x \in \mathbb{R}, x > -x$ ".

16. a) Mệnh đề phủ định: " $\exists n \in \mathbb{N}, n(n+1)$ không chia hết cho 2". Mệnh đề này sai.

b) Mệnh đề phủ định: " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq x$ ". Mệnh đề này đúng.

c) Mệnh đề phủ định: " $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq x$ ". Mệnh đề này sai.

d) Mệnh đề phủ định: " $\forall x \in \mathbb{Q}, x^2 - x - 1 \neq 0$ ". Mệnh đề này đúng.

17. a) Mệnh đề này đúng.

b) Mệnh đề đảo: "Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có một nghiệm bằng 1 thì $a + b + c = 0$ ". Mệnh đề đảo này đúng.

c) Điều kiện cần và đủ để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có một nghiệm bằng 1 là $a + b + c = 0$.

BÀI 2. TẬP HỢP. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Tập hợp

- Một tập hợp có thể không có phần tử nào, cũng có thể có một phần tử, có nhiều phần tử, có vô số phần tử.

- Tập rỗng và những tập hợp chỉ chứa một số lượng phần tử nhất định gọi là tập hợp hữu hạn.
- Những tập hợp chứa vô số phần tử gọi là tập hợp vô hạn.

2. Tập con và tập hợp bằng nhau

- Nếu mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp B thì ta nói A là một tập con của tập hợp B và viết $A \subset B$. Ta còn đọc là A chứa trong B .
- Khi $A \subset B$ và $B \subset A$ thì ta nói hai tập hợp A và B bằng nhau và viết là $A = B$.
- Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$.

3. Một số phép toán trên tập hợp

- Tập hợp gồm tất cả các phần tử vừa thuộc tập hợp A , vừa thuộc tập hợp B được gọi là giao của hai tập hợp A và B , kí hiệu $A \cap B$.
- Tập hợp gồm các phần tử thuộc tập hợp A hoặc thuộc tập hợp B được gọi là hợp của hai tập hợp A và B , kí hiệu $A \cup B$.
- Cho tập hợp A là tập con của tập hợp B . Tập hợp những phần tử của B mà không phải là phần tử của A được gọi là phần bù của A trong B , kí hiệu $C_B A$.
- Tập hợp gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B được gọi là hiệu của A và B , kí hiệu $A \setminus B$.

4. Một số tập con thường dùng của tập hợp số thực

Cho a và b là hai số thực với $a < b$.

Đoạn $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\};$

Nửa khoảng $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\};$

Khoảng $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\};$

Nửa khoảng $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\};$

Khoảng $(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\};$

Nửa khoảng $[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\};$

Khoảng $(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\};$

Nửa khoảng $(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\};$

Tập số thực $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$.

B. VÍ DỤ

Vấn đề 1. Xác định giao, hợp, hiệu của hai tập hợp

Phương pháp: Cho A, B là hai tập con của tập số thực.

Để tìm $A \cap B$, ta làm như sau:

+ Biểu diễn A, B trên trục số; gạch bỏ phần không thuộc A, B .

+ Phần không bị gạch là $A \cap B$.

Để tìm $A \cup B$, ta làm như sau:

+ Biểu diễn A, B trên trục số; tô đậm phần thuộc A, B .

+ Phần tô đậm là $A \cup B$.

Để tìm $A \setminus B$, ta làm như sau:

+ Biểu diễn A, B trên trục số; tô đậm phần thuộc A , gạch bỏ phần thuộc B .

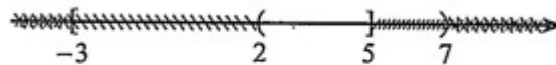
+ Phần tô đậm mà không bị gạch là $A \setminus B$.

Ví dụ 1. Xác định các tập hợp sau:

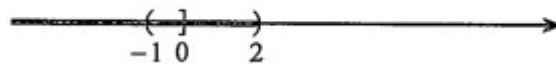
- a) $[-3; 5] \cap (2; 7)$; b) $(-\infty; 0] \cup (-1; 2)$; c) $\mathbb{R} \setminus (-\infty; 3)$; d) $(-3; 2) \setminus [1; 3)$.

Giải

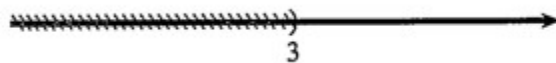
a) Biểu diễn $[-3; 5]$ và $(2; 7)$ trên cùng một trục số bằng cách gạch bỏ phần không thuộc mỗi tập hợp đó. Phần không bị gạch là $(2; 5]$ nên ta có: $[-3; 5] \cap (2; 7) = (2; 5]$.



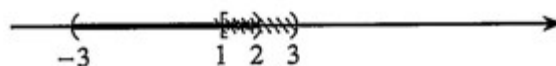
b) Biểu diễn $(-\infty; 0]$ và $(-1; 2)$ trên cùng một trục số bằng cách tô đậm mỗi tập hợp đó. Phần tô đậm là $(-\infty; 2)$ nên ta có: $(-\infty; 0] \cup (-1; 2) = (-\infty; 2)$.



c) Biểu diễn $\mathbb{R}$ và $(-\infty; 3)$ trên cùng một trục số bằng cách tô đậm $\mathbb{R}$ và gạch bỏ $(-\infty; 3)$. Phần tô đậm mà không bị gạch là $[3; +\infty)$ nên ta có: $\mathbb{R} \setminus (-\infty; 3) = [3; +\infty)$.



d) Biểu diễn $(-3; 2)$ và $[1; 3)$ trên cùng một trục số bằng cách tô đậm $(-3; 2)$ và gạch bỏ $[1; 3)$. Phần tô đậm mà không bị gạch là $(-3; 1)$ nên ta có: $(-3; 2) \setminus [1; 3) = (-3; 1)$.



Vấn đề 2. Ứng dụng

Ví dụ 2. Gọi A là tập nghiệm của đa thức $P(x)$. Viết tập hợp các số thực x sao cho biểu thức $\frac{1}{P(x)}$ xác định.

Giải

Điều kiện để biểu thức $\frac{1}{P(x)}$ xác định là $P(x) \neq 0$.

Vậy tập hợp D các số thực x để biểu thức $\frac{1}{P(x)}$ xác định là tập các số thực x mà x không thuộc A nên $D = \mathbb{R} \setminus A$.

Ví dụ 3. Lớp 10B có 28 học sinh tham gia câu lạc bộ thể thao và 19 học sinh tham gia câu lạc bộ âm nhạc. Biết rằng có 10 học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ trên.

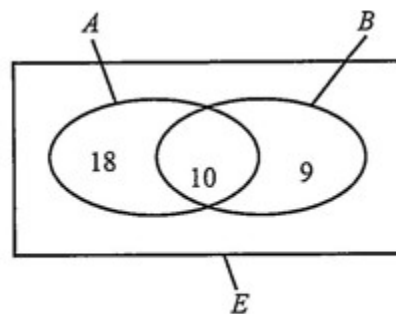
a) Có bao nhiêu học sinh tham gia câu lạc bộ thể thao và không tham gia câu lạc bộ âm nhạc?

b) Có bao nhiêu học sinh tham gia ít nhất một trong hai câu lạc bộ trên?

c) Biết lớp 10B có 40 học sinh. Có bao nhiêu học sinh không tham gia câu lạc bộ thể thao? Có bao nhiêu học sinh không tham gia cả hai câu lạc bộ?

Giải

Kí hiệu A là tập hợp học sinh tham gia câu lạc bộ thể thao, B là tập hợp học sinh tham gia câu lạc bộ âm nhạc, E là tập hợp học sinh của lớp 10B. Ta có thể biểu diễn ba tập hợp trên bằng biểu đồ Ven (Hình 1).



Hình 1

Khi đó, $A \cap B$ là tập hợp học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ trên. Số phần tử của A là 28, số phần tử của B là 19, số phần tử của tập hợp $A \cap B$ là 10.

a) Tập hợp các học sinh tham gia câu lạc bộ thể thao và không tham gia câu lạc bộ âm nhạc là tập hợp $A \setminus B$. Số phần tử của $A \setminus B$ chính là số phần tử của A trừ đi số phần tử của $A \cap B$. Vậy số học sinh tham gia câu lạc bộ thể thao và không tham gia câu lạc bộ âm nhạc là: $28 - 10 = 18$ (học sinh).

b) Tập hợp các học sinh tham gia ít nhất một trong hai câu lạc bộ trên chính là tập hợp $A \cup B$. Do khi đếm số học sinh tham gia câu lạc bộ thể thao là 28, số học sinh tham gia câu lạc bộ âm nhạc là 19 thì số học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ là 10 được tính hai lần. Vậy số học sinh tham gia ít nhất một trong hai câu lạc bộ trên là: $28 + 19 - 10 = 37$ (học sinh).

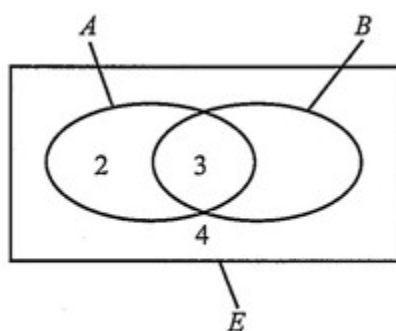
c) Số phần tử của E là 40. Tập hợp các học sinh không tham gia câu lạc bộ thể thao là phần bù của A trong E . Vậy số học sinh không tham gia câu lạc bộ thể thao là: $40 - 28 = 12$ (học sinh).

Tập hợp các học sinh không tham gia cả hai câu lạc bộ là phần bù của $A \cup B$ trong E . Vậy số học sinh không tham gia cả hai câu lạc bộ là: $40 - 37 = 3$ (học sinh).

Ví dụ 4. Một nhóm có 12 học sinh chuẩn bị cho hội diễn văn nghệ. Trong danh sách đăng kí tham gia tiết mục múa và tiết mục hát của nhóm đó, có 5 học sinh tham gia tiết mục múa, 3 học sinh tham gia cả hai tiết mục. Hỏi có bao nhiêu học sinh trong nhóm tham gia tiết mục hát? Biết rằng có 4 học sinh của nhóm không tham gia tiết mục nào.

Giải

Kí hiệu A là tập hợp học sinh tham gia tiết mục múa, B là tập hợp học sinh tham gia tiết mục hát, E là tập hợp nhóm học sinh. Ta có thể biểu diễn ba tập hợp đó bằng biểu đồ Ven (Hình 2).



Hình 2

Khi đó, $A \cap B$ là tập hợp học sinh tham gia cả hai tiết mục. Số phần tử của tập hợp A là 5, số phần tử của tập hợp $A \cap B$ là 3, số phần tử của tập hợp E là 12.

Số học sinh tham gia ít nhất một trong hai tiết mục là: $12 - 4 = 8$ (học sinh).

Số học sinh tham gia tiết mục hát mà không tham gia tiết mục múa là: $8 - 5 = 3$ (học sinh).

Số học sinh tham gia tiết mục hát là: $3 + 3 = 6$ (học sinh).

C. BÀI TẬP

18. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 4\}$. A là tập hợp nào sau đây?

- A. $\{0; 1; 2; 3; 4\}$. B. $(0; 4]$. C. $\{0; 4\}$. D. $\{1; 2; 3; 4\}$.

19. Cho hai tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, $B = \{3; 4; 5; 6\}$. Tập hợp $A \cup B$ bằng:

- A. $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. B. $\{3; 4\}$. C. $\{0; 1; 2\}$. D. $\{5; 6\}$.

20. Cho hai tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, $B = \{3; 4; 5; 6\}$. Tập hợp $A \setminus B$ bằng:

- A. $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. B. $\{3; 4\}$. C. $\{0; 1; 2\}$. D. $\{5; 6\}$.

21. Cho hai tập hợp $A = (-3; 3]$, $B = (-2; +\infty)$. Tập hợp $A \cap B$ bằng:

A. $\{-1; 0; 1; 2; 3\}$. B. $[-2; 3]$. C. $(-2; 3]$. D. $(-3; +\infty)$.

22. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2, x \neq 5\}$. A là tập hợp nào sau đây?

A. $(2; +\infty) \setminus \{5\}$. B. $[2; 5)$. C. $(2; 5)$. D. $[2; +\infty) \setminus \{5\}$.

23. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}, B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - x - 6 = 0\}$.

Tập hợp $A \setminus B$ bằng:

A. $(-2; 3)$. B. $(-2; 3) \cup (3; 5]$. C. $(3; 5]$. D. $[-2; 5] \setminus \{3\}$.

24. Cho tập hợp $A = [-1; +\infty)$. Tập hợp ${}_{\mathbb{R}}C_A$ bằng:

A. $(-1; +\infty)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(-\infty; -1]$. D. $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

25. Gọi A là tập nghiệm của đa thức $P(x)$, B là tập nghiệm của đa thức $Q(x)$, C là tập nghiệm của đa thức $P(x) \cdot Q(x)$. C là tập hợp nào sau đây?

A. $A \cup B$. B. $A \cap B$. C. $A \setminus B$. D. $B \setminus A$.

26. Gọi A là tập nghiệm của đa thức $P(x)$, B là tập nghiệm của đa thức $Q(x)$, D là tập nghiệm của đa thức $P^2(x) + Q^2(x)$. D là tập hợp nào sau đây?

A. $A \cup B$. B. $A \cap B$. C. $A \setminus B$. D. $B \setminus A$.

27. Cho tập hợp $X = \{a; b; c; d\}$. Viết tất cả các tập con có ba phần tử của tập hợp X .

28. Cho ba tập hợp: A là tập hợp các tam giác; B là tập hợp các tam giác cân; C là tập hợp các tam giác đều. Dùng kí hiệu $\subset$ để mô tả quan hệ của hai trong các tập hợp trên.

29. Dùng kí hiệu $\subset$ để mô tả quan hệ của hai tập hợp khác nhau trong các tập hợp sau:
 $[-1; 3]; (-1; 3); [-1; 3); (-1; 3]; \{-1; 3\}$.

30. Cho ba tập hợp sau: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x : 2\}, B = \{x \in \mathbb{N} \mid x : 3\}, C = \{x \in \mathbb{N} \mid x : 6\}$.

a) Dùng kí hiệu $\subset$ để mô tả quan hệ của hai trong các tập hợp trên.

b) Xác định các tập hợp $A \cap B, A \cup C, B \cap C$.

31. Xác định các tập hợp sau:

a) $[-2; 3] \cap (0; 5)$; b) $(-3; 1] \cap (1; +\infty)$; c) $(-\infty; 0) \cup (-2; 2]$;

d) $(-\infty; 0) \cup [0; +\infty)$; e) $\mathbb{R} \setminus [1; +\infty)$; g) $[3; 5] \setminus (4; 6)$.

32. Cho A là một tập hợp. Xác định các tập hợp sau:

a) $A \cap A$; b) $A \cap \emptyset$; c) $A \cup A$; d) $A \cup \emptyset$; e) $A \setminus A$; g) $A \setminus \emptyset$.

33. Cho tập hợp A . Có nhận xét gì về tập hợp B nếu:

- a) $A \cap B = A$; b) $A \cap B = B$; c) $A \cup B = A$;
d) $A \cup B = B$; e) $A \setminus B = \emptyset$; g) $A \setminus \emptyset = B$?

34. Trong đợt văn nghệ chào mừng ngày 20/11, lớp 10^A đăng kí tham gia hai tiết mục, đó là hát tốp ca và múa. Gọi A là tập hợp các học sinh tham gia hát tốp ca, B là tập hợp các học sinh tham gia múa, E là tập hợp các học sinh của lớp. Mô tả các tập hợp sau đây:

- a) $A \cap B$ b) $A \cup B$; c) $A \setminus B$; d) $E \setminus A$; g) $E \setminus (A \cup B)$.

35. Lớp 10^A có 27 học sinh tham gia ít nhất một trong hai câu lạc bộ bóng đá và cờ vua, trong đó có 19 học sinh tham gia câu lạc bộ bóng đá, 15 học sinh tham gia câu lạc bộ cờ vua.

- a) Có bao nhiêu học sinh tham gia câu lạc bộ bóng đá mà không tham gia câu lạc bộ cờ vua?
b) Có bao nhiêu học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ?
c) Biết trong lớp có 8 học sinh không tham gia câu lạc bộ nào trong hai câu lạc bộ trên. Lớp 10 A có bao nhiêu học sinh?

36. Tìm $D = E \cap G$, biết E và G lần lượt là tập nghiệm của hai bất phương trình trong mỗi trường hợp sau :

- a) $5x - 2 > 0$ và $3x + 7 \geq 0$; b) $2x + 3 > 0$ và $5x - 9 \leq 0$; c) $9 - 3x \geq 0$ và $12 - 3x < 0$.

37. Cho các tập hợp: $A = [-1; 7]$, $B = (m - 1; m + 5)$ với m là một tham số thực. Tìm m để:

- a) $B \subset A$; b) $A \cap B = \emptyset$.

38. Cho $A = [m; m + 2]$ và $B = [n; n + 1]$ với m, n là các tham số thực. Tìm điều kiện của các số m và n để tập hợp $A \cap B$ chứa đúng một phần tử.

39. Cho $A = (-\infty; m + 1)$, $B = [3; +\infty)$ với m là một tham số thực. Tìm m để:

- a) $A \cup B = \mathbb{R}$; b) $A \cap B$ chứa đúng 5 số nguyên.

40. Biểu diễn tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 \geq 9\}$ thành hợp các nửa khoảng.

D. LỜI GIẢI THAM KHẢO

18. A. 19. A. 20. C. 21. C. 22. D. 23. B.
24. B. 25. A. 26. B.

27. Các tập con có ba phần tử của X là: $\{a; b; c\}, \{a; b; d\}, \{b; c; d\}, \{c; d; a\}$.

28. $C \subset B \subset A$.

29. $(-1; 3) \subset (-1; 3]; (-1; 3) \subset [-1; 3]; (-1; 3) \subset [-1; 3]; [-1; 3] \subset [-1; 3]; (-1; 3] \subset [-1; 3]; \{-1; 3\} \subset [-1; 3]$.

30. a) $C \subset B; C \subset A$. b) $A \cap B = C; A \cup C = A; B \cap C = C$.

31. a) $[-2; 3] \cap (0; 5) = (0; 3]$. b) $(-3; 1] \cap (1; +\infty) = \emptyset$.

$$c) (-\infty; 0) \cup (-2; 2] = (-\infty; 2]. \quad d) (-\infty; 0) \cup [0; +\infty) = \mathbb{R}.$$

$$e) \mathbb{R} \setminus [1; +\infty) = (-\infty; 1). \quad g) [3; 5] \setminus (4; 6) = [3; 4].$$

$$32. a) A \cap A = A. \quad b) A \cap \emptyset = \emptyset. \quad c) A \cup A = A.$$

$$d) A \cup \emptyset = A. \quad e) A \setminus A = \emptyset. \quad g) A \setminus \emptyset = A.$$

$$33. a) B \supset A. \quad b) B \subset A. \quad c) B \subset A.$$

$$d) B \supset A. \quad e) B \supset A. \quad g) B = A.$$

34. a) $A \cap B$ là tập hợp các học sinh tham gia cả hai tiết mục là hát tốp ca và múa.

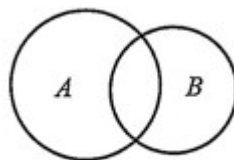
b) $A \cup B$ là tập hợp các học sinh tham gia ít nhất một trong hai tiết mục là hát tốp ca hoặc múa.

c) $A \setminus B$ là tập hợp các học sinh tham gia hát tốp ca nhưng không tham gia múa.

d) $E \setminus A$ là tập hợp các học sinh của lớp $10A$ không tham gia hát tốp ca.

g) $E \setminus (A \cup B)$ là tập hợp các học sinh của lớp $10A$ không tham gia tiết mục nào trong hai tiết mục hát tốp ca và múa.

35. Gọi A là tập hợp các học sinh tham gia câu lạc bộ bóng đá, B là tập hợp các học sinh tham gia câu lạc bộ cờ vua (Hình 3).



Hình 3

Khi đó, $A \cup B$ là tập hợp các học sinh tham gia ít nhất một trong hai câu lạc bộ bóng đá và cờ vua. Ta có số phần tử của A là 19, số phần tử của B là 15, số phần tử của $A \cup B$ là 27.

a) Tập hợp các học sinh tham gia câu lạc bộ bóng đá mà không tham gia câu lạc bộ cờ vua chính là $A \setminus B$ và cũng là tập hợp $(A \cup B) \setminus B$.

Số phần tử của tập hợp $(A \cup B) \setminus B$ chính là số phần tử của $A \cup B$ trừ đi số phần tử của B .

Vậy số học sinh tham gia câu lạc bộ bóng đá mà không tham gia câu lạc bộ cờ vua là: $27 - 15 = 12$ (học sinh).

b) Tập hợp các học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ chính là tập hợp $A \cap B$.

Số phần tử của $A \cap B$ bằng số phần tử của tập hợp A trừ đi số phần tử của tập hợp các học sinh chỉ tham gia câu lạc bộ bóng đá mà không tham gia câu lạc bộ cờ vua.

Số học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ là: $19 - 12 = 7$ (học sinh).

c) Số học sinh của lớp $10A$ là: $27 + 8 = 35$ (học sinh).

36. a) $D = \left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$. b) $D = \left[\frac{-3}{2}; \frac{9}{5}\right]$. c) $D = \emptyset$

37. a) $B \subset A$ nếu $-1 \leq m-1$ và $m+5 \leq 7$. Suy ra $0 \leq m \leq 2$.

b) $A \cap B = \emptyset$ nếu $m-1 \geq 7$ hoặc $m+5 \leq -1$. Suy ra $m \geq 8$ hoặc $m \leq -6$.

38. Tập hợp $A \cap B$ chứa đúng một phần tử nếu $n+1=m$ hoặc $n=m+2$.

39. a) $A \cup B = \mathbb{R}$ nếu $m+1 \geq 3$. Suy ra $m \geq 2$.

b) $A \cap B$ chứa đúng 5 số nguyên nếu $7 < m+1 \leq 8$. Suy ra $6 < m \leq 7$.

40. $A = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG I

A. CÂU HỎI

41. Phát biểu nào sau đây không là một mệnh đề toán học?

A. Số 2025 chia hết cho 5.

B. Nếu hình thang $ABCD$ nội tiếp đường tròn thì hình thang đó cân.

C. Nếu bạn Minh chăm chỉ thì bạn Minh sẽ thành công.

D. Các số nguyên tố đều là số lẻ.

42. Phủ định của mệnh đề: " $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + n$ là số chẵn" là:

A. " $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + n$ không là số chẵn".

B. " $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + n$ không là số lẻ".

C. " $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + n$ là số lẻ".

D. " $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + n$ là số chẵn".

43. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 2\}$. A là tập hợp nào sau đây?

A. $(-3; 2)$.

B. $\{-3; -2; -1; 0; 1\}$.

C. $\{-3; 2\}$.

D. $[-3; 2)$.

44. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x+3 < 4+2x\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 5x-3 < 4x-1\}$. Tất cả các số nguyên thuộc cả hai tập hợp A và B là:

A. 0 và 1.

B. $-1; 0; 1$ và 2.

C. 1 và 2.

D. 1.

45. Cho hai tập hợp $E = (2; 4]$, $F = (4; 5)$. $E \cup F$ bằng:

A. $(2; 5)$.

B. $\emptyset$.

C. $[2; 5)$.

D. $\{3; 4\}$.

46. Cho hai tập hợp $A = [-4; 3)$, $B = (-2; +\infty)$. $A \setminus B$ bằng:

- A. $[-4; -2]$. B. $\{-4; -3; -2\}$. C. $[3; +\infty)$. D. $[-4; -2]$.

47. Nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề đó và mệnh đề phủ định của nó:

- a) A: "Phương trình $x^2 - x + 1 = 0$ có nghiệm thực";
b) B: "Hình bình hành có tâm đối xứng".

48. Cho hình thang $ABCD$. Xét mệnh đề dạng $P \Rightarrow Q$ như sau:

"Nếu hình thang $ABCD$ cân thì hình thang $ABCD$ có hai cạnh bên bằng nhau".

Phát biểu và xét tính đúng sai mệnh đề đảo của mệnh đề trên.

49. Cho tứ giác $ABCD$. Xét các mệnh đề:

P : "Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành", Q : "Tứ giác $ABCD$ có các cạnh đối bằng nhau".

Hãy phát biểu hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$, sau đó xác định tính đúng sai của mỗi mệnh đề đó. Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng, hãy phát biểu mệnh đề tương đương.

50. Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề phủ định đó:

- a) A: " $\forall n \in \mathbb{N}^*, n > \frac{1}{n}$ " b) B: " $\exists x \in \mathbb{Z}, 2x + 3 = 0$ ";
c) C: " $\exists x \in \mathbb{Q}, 4x^2 - 1 = 0$ "; d) D: " $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ không chia hết cho 3".

51. Dùng kí hiệu để viết mỗi tập hợp sau và biểu diễn mỗi tập hợp đó trên trục số:

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x < -4\}$; b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1\}$;
c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$; d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$.

52. Cho các tập hợp: $A = [-1; 2), B = (-\infty; 1]$.

Xác định $A \cap B; A \cup B; A \setminus B; B \setminus A; \mathbb{R} \setminus B; C_{\mathbb{R}} A$.

53. Gọi A là tập nghiệm của đa thức $P(x)$, B là tập nghiệm của đa thức $Q(x)$, C là tập nghiệm của phân thức $\frac{P(x)}{Q(x)}$. So sánh tập hợp $A \setminus B$ và tập hợp C .

54. Cho hai tập hợp $A = [-1; 4], B = [m+1; m+3]$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để $B \setminus A = \emptyset$.

55. Trong đợt thi giải chạy ngắn cấp trường, lớp $10B$ có 15 học sinh đăng kí thi nội dung chạy $100m$, 10 học sinh đăng kí thi nội dung chạy $200m$. Biết lớp $10B$ có 40 học sinh và có 19 học sinh không đăng kí thi nội dung nào. Hỏi lớp $10B$ có bao nhiêu bạn đăng kí thi cả hai nội dung?

56. Trong kì thi chọn học sinh giỏi các môn văn hoá, lớp $10A$ có 7 học sinh đăng kí thi môn Toán, 5 học sinh đăng kí thi môn Vật lí, 6 học sinh đăng kí thi môn Hoá học; trong đó có 3 học sinh đăng kí thi cả Toán và Vật lí, 4 học sinh đăng kí thi cả Toán và Hoá học, 2 học sinh đăng kí thi cả Vật lí và Hoá học, 1 học sinh đăng kí thi cả ba môn. Hỏi lớp $10A$ có tất cả bao nhiêu học sinh đăng kí thi học sinh giỏi các môn Toán, Vật lí, Hoá học?

B. LỜI GIẢI THAM KHẢO

41. C. 42. C. 43. D. 44. A. 45. A. 46. D.

47. a) $\bar{A}$: "Phương trình $x^2 - x + 1 = 0$ không có nghiệm thực". Mệnh đề A sai,

b) $\bar{B}$: "Hình bình hành không có tâm đối xứng". Mệnh đề B đúng, $\bar{B}$ sai.

48. Mệnh đề đảo $Q \Rightarrow P$: "Nếu hình thang $ABCD$ có hai cạnh bên bằng nhau thì hình thang $ABCD$ cân". Mệnh đề đảo sai.

49. Mệnh đề $P \Rightarrow Q$: "Nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tứ giác $ABCD$ có các cạnh đối bằng nhau". Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là đúng.

Mệnh đề $Q \Rightarrow P$: "Nếu tứ giác $ABCD$ có các cạnh đối bằng nhau thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành".
Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ là đúng.

Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$: "Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi tứ giác $ABCD$ có các cạnh đối bằng nhau".

50. a) $\bar{A}$: " $\exists n \in \mathbb{N}^*, n \leq \frac{1}{n}$ ". Mệnh đề này đúng.

b) $\bar{B}$: " $\forall x \in \mathbb{Z}, 2x + 3 \neq 0$ ". Mệnh đề này đúng.

c) $\bar{C}$: " $\forall x \in \mathbb{Q}, 4x^2 - 1 \neq 0$ ". Mệnh đề này sai.

d) $\bar{D}$: " $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ chia hết cho 3". Mệnh đề này sai.

51. a) $(-7; -4)$. b) $[-3; 1]$. c) $(-\infty; 0]$. d) $(-1; +\infty)$.

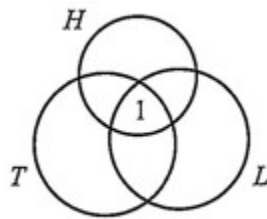
52. $A \cap B = [-1; 1]; A \cup B = (-\infty; 2); A \setminus B = (1; 2); B \setminus A = (-\infty; -1); \mathbb{R} \setminus B = (1; +\infty); C_{\mathbb{R}} A = (-\infty; -1) \cup [2; +\infty)$.

53. $A \setminus B = C$.

54. $B \setminus A = \emptyset$ nếu $B \subset A$ nên ta có: $m + 1 \geq -1$ và $m + 3 \leq 4$. Suy ra $-2 \leq m \leq 1$.

55. 4 học sinh.

56. Gọi T là tập hợp các học sinh đăng kí thi môn Toán, L là tập hợp các học sinh đăng kí thi môn Vật lí, H là tập hợp các học sinh đăng kí thi môn Hoá học. Biểu diễn cả ba tập hợp bằng biểu đồ Ven (Hình 4).



Hình 4

Dựa vào biểu đồ Ven, ta có số học sinh chỉ đăng kí thi môn Toán là: $7 - 3 - 4 + 1 = 1$.

Số học sinh chỉ đăng kí thi môn Vật lí là: $5 - 3 - 2 + 1 = 1$.

Số học sinh đăng kí thi môn Toán và Vật lí mà không đăng kí thi môn Hoá học là: $3 - 1 = 2$.

Vậy tổng số học sinh lớp 10A đăng kí thi ba môn trên là: $1 + 1 + 2 + 6 = 10$ (học sinh).