

Bài 1 (2.5 điểm):

a) Cho ba số a, b, c thỏa mãn: $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng: $ab + bc + ca \leq 0$.

b) Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thỏa mãn: $13a + b + 2c = 0$.

Chứng tỏ rằng: $f(-2) \cdot f(3) \leq 0$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = x^2 + y^2 - xy - x + y + 1$

Bài 2 (2.0 điểm):

Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x-1}{2013} + \frac{x-2}{2012} - \frac{x-3}{2011} = \frac{x-4}{2010}$

b) $(2x-5)^3 - (x-2)^3 = (x-3)^3$

Bài 3 (2.5 điểm):

Cho hình vuông ABCD. M là một điểm tùy ý trên đường chéo BD. Hạ ME vuông góc với AB, MF vuông góc với AD.

a) Chứng minh $DE \perp CF$.

b) Chứng minh rằng ba đường thẳng DE, BF, CM đồng quy.

c) Xác định vị trí của điểm M trên BD để diện tích tứ giác AEMF lớn nhất.

Bài 4 (2.0 điểm):

Cho hình bình hành ABCD ($AC > BD$). Gọi G, H lần lượt là hình chiếu của C trên AB và AD. Chứng minh :

a) $\triangle ABC$ đồng dạng với $\triangle HCG$

b) $AC^2 = AB \cdot AG + AD \cdot AH$

Bài 5 (1.0 điểm):

Chứng minh rằng với mọi số n nguyên dương thì: $5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2^n) : 91$

Bài 1(2.5 điểm):

Có: $a^2 + b^2 \geq 2ab$; $a^2 + c^2 \geq 2ac$; $b^2 + c^2 \geq 2bc$ Cộng được: $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc$ $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ (1)	0,25
$a + b + c = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 0$ $\Leftrightarrow -a^2 - b^2 - c^2 = 2ab + 2ac + 2bc$ (2)	0,25
Cộng (1) với (2) được $3ab + 3ac + 3bc \leq 0 \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq 0$	0,25

$f(-2) = 4a - 2b + c$; $f(3) = 9a + 3b + c$	0,25
Có $f(-2) + f(3) = 13a + b + 2c = 0$ nên: Hoặc: $f(-2) = 0$ và $f(3) = 0 \Rightarrow f(-2).f(3) = 0$ (1) Hoặc: $f(-2)$ và $f(3)$ là hai số đối nhau $\Rightarrow f(-2).f(3) < 0$ (2)	0,25
Từ (1) và (2) được $f(-2).f(3) \leq 0$	0,25
$4M = 4x^2 + 4y^2 - 4xy - 4x + 4y + 4$ $= (2x - y - 1)^2 + 3y^2 + 2y + 3$ $= (2x - y - 1)^2 + 3(y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}) + \frac{8}{3}$ $= (2x - y - 1)^2 + 3(y + \frac{1}{3})^2 + \frac{8}{3}$	0,50
Giá trị nhỏ nhất của $4M$ là $\frac{8}{3}$ tại $y = -\frac{1}{3}$; $x = \frac{2}{3}$ nên Giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{2}{3}$ tại $y = -\frac{1}{3}$; $x = \frac{2}{3}$.	0,50

Bài 2(2.0 điểm):

$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2013} - 1 + \frac{x-2}{2012} - 1 = \frac{x-4}{2010} - 1 + \frac{x-3}{2011} - 1$	0,25
$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2013} - \frac{2013}{2013} + \frac{x-2}{2012} - \frac{2012}{2012} = \frac{x-4}{2010} - \frac{2010}{2010} + \frac{x-3}{2011} - \frac{2011}{2011}$ $\Leftrightarrow \frac{x-2014}{2013} + \frac{x-2014}{2012} = \frac{x-2014}{2010} + \frac{x-2014}{2011}$	0,25
$\Leftrightarrow (x-2014) \left(\frac{1}{2013} + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2010} - \frac{1}{2011} \right) = 0$	0,25
Do $\frac{1}{2013} + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2010} - \frac{1}{2011} \neq 0$ nên phương trình có nghiệm $x = 2014$	0,25

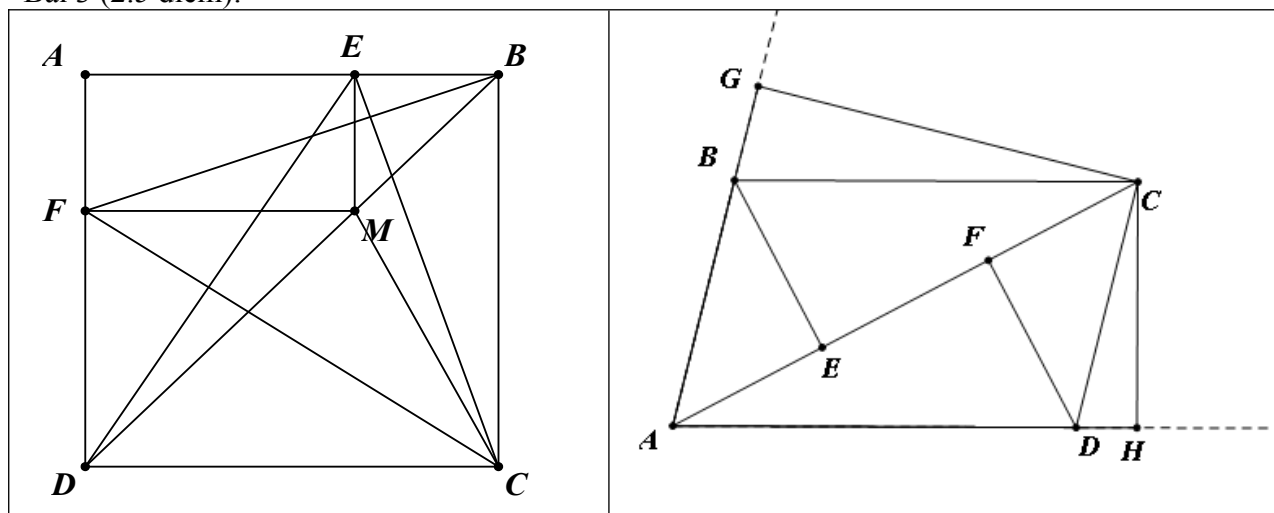
Đặt $2x - 5 = a$; $x - 2 = b \Rightarrow a - b = x - 3$ Phương trình đã cho trở thành: $a^3 - b^3 = (a - b)^3$	0,50
$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b)(a^2 - 2ab + b^2)$ $(a-b)(a^2 + ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2) = 0$ $3ab(a-b) = 0$	0,25
$a = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$; $b = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $a = b \Leftrightarrow x = 3$	0,25

Bài 5 (1.0 điểm):

$A = 5^n(5^n + 1) - 6^n(3^n + 2^n) = 25^n + 5^n - 18^n - 12^n$	0,25
--	------

$A = (25^n - 18^n) - (12^n - 5^n)$. A chia hết cho 7	0,25
$A = (25^n - 12^n) - (18^n - 5^n)$. A chia hết cho 13	0,25
Do $(13, 7) = 1$ nên A chia hết cho 91	0,25

Bài 3 (2.5 điểm):



Chứng tỏ được $AE = DF$ (Cùng bằng MF)	0,25
Chứng tỏ được $\triangle CDF = \triangle DAE \Rightarrow \widehat{FCD} = \widehat{EDA}$	0,25
Có $\widehat{EDA}$ và $\widehat{EDC}$ phụ nhau $\Rightarrow \widehat{ECD}$ và $\widehat{EDA}$ phụ nhau hay $CF \perp DE$	0,25

Tương tự có $CE \perp BF$	0,25
Chứng minh được $CM \perp EF$: Gọi G là giao điểm của FM và BC; H là giao điểm của CM và EF. $\widehat{MCG} = \widehat{EFM}$ (Hai HCN bằng nhau) $\widehat{EMG} = \widehat{FMH}$ (Đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{MHF} = \widehat{MGC} = 90^\circ$	0,50
CM, FB, ED là ba đường cao của tam giác CEF nên chúng đồng quy	0,25
$(AE - ME)^2 \geq 0$ nên $(AE + ME)^2 \geq 4AE.ME \Leftrightarrow AE.ME \leq \frac{(AE + ME)^2}{4}$	0,25
$\Leftrightarrow S_{AEMF} \leq \frac{AB^2}{4}$. Do $AB = \text{const}$ nên S_{AEMF} lớn nhất khi $AE = ME$. Lúc đó M là trung điểm của BD.	0,50

Bài 4 (2.0 điểm):

Chứng tỏ được: $\triangle CBG$ đồng dạng với $\triangle CDH$.	0,25
$\Rightarrow \frac{CG}{CH} = \frac{BC}{DC} = \frac{BC}{BA}$	0,25
$\widehat{ABC} = \widehat{HCG}$ (Cùng bù với $\widehat{BAD}$) $\Rightarrow \triangle ABC$ đồng dạng với $\triangle HCG$	0,50

Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B, D trên AC. $\triangle AFD$ đồng dạng $\triangle AHC$: $\frac{AF}{AH} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AF.AC = AD.AH$	0,25
$\triangle AEB$ đồng dạng $\triangle AGC$: $\frac{AE}{AG} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AE.AC = AG.AB$	0,25

Cộng được: $AF.AC + AE.AC = AD.AH + AG.AB$ $AC(AF+AE) = AD.AH + AG.AB$	0,25
Chúng tỏ được $AE = FC$. Thay được: $AC(AF+FC) = AD.AH + AG.AB \Rightarrow AC^2 = AD.AH + AG.AB$	0,25