

Câu 1 (6,5 điểm)

1) Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - x - 2)$. Tìm các khoảng đồng biến của hàm số

$$g(x) = f(x^2 - 4x + 2)?$$

2) Tìm tham số m để bất phương trình :

$$(1-m^3)x^3 + 3mx^2 + (3m^2 - 2m + 2)x + m^3 + 2m \geq 0 \text{ có nghiệm với mọi } x \in [2; 5]?$$

Câu 2 (5,5 điểm)

Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy a , mặt bên hợp với đáy một góc bằng 60° . Mặt phẳng (P) song song với $mp(ABCD)$ cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q (các điểm không trùng điểm S). Gọi M', N', P', Q' là lần lượt hình chiếu vuông góc của M, N, P, Q lên $mp(ABCD)$.

1. Tính khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác SAC đến mặt phẳng (SCD) theo a .

2. Tính thể tích lớn nhất của khối đa diện $MNPQM'N'P'Q'$ theo a .

Câu 3 (5 điểm).

1) Cho hàm số $f(x) = |x^3 - 15x - m| + 12x + 1$. Tìm tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 4]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2) Trong một lớp học có $2n+3$ học sinh (n nguyên dương), gồm Hoa, Hồng, Cúc và học sinh khác. Xếp tùy ý $2n+3$ học sinh trên ngòai vào một dãy ghế được đánh số từ 1 đến $2n+3$, mỗi học sinh ngòai một ghế.

Khi số ghế của Hồng bằng trung bình cộng số ghế của Hoa và Cúc thì xác suất $p = \frac{12}{575}$.

Hỏi lớp học có bao nhiêu học sinh?

Câu 4 (1,5 điểm)

Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa mặt phẳng (ABC) và các mặt $(OBC), (OAC), (OAB)$. Chứng minh rằng $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \sqrt{3}$.

Câu 5 (1,5 điểm)

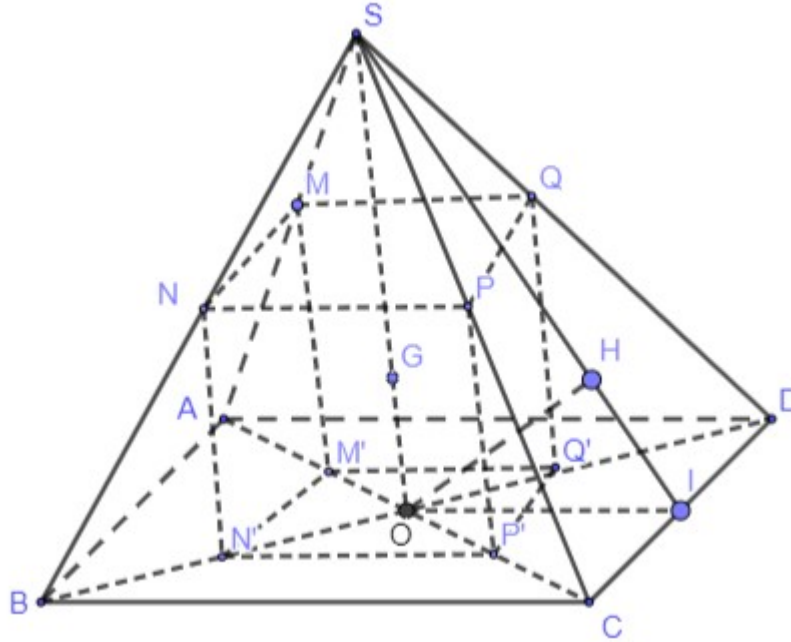
Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x > 3, y > 2, z > 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau

$$P = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 14}} - \frac{1}{(x-2)(y-1)(z+1)}.$$

-----Hết-----

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu	NỘI DUNG	Điểm																																																		
1.1	Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - x - 2)$. Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $g(x) = f(x^2 - 4x + 2)$?																																																			
	TXĐ: $D = \mathbb{R}$ $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - x - 2)$ ta có bảng xét dấu $f'(x)$: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td></td><td>1</td><td></td><td>2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr></table> $g'(x) = (2x-4)f'(x^2 - 4x + 2) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ f'(x^2 - 4x + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0, x = 4, x = 3, x = 1 \\ x = 2 \pm \sqrt{3} \end{cases}$ Bảng xét dấu $g'(x)$: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$2 - \sqrt{3}$</td><td></td><td>1</td><td></td><td>2</td><td></td><td>3</td><td></td><td>$2 + \sqrt{3}$</td><td></td><td>4</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$g'(x)$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table> $\Rightarrow$ Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(0;1), (2;3)$ và $(4;+\infty)$.	x	$-\infty$	-1		1		2		$+\infty$	$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$		x	$-\infty$	0	$2 - \sqrt{3}$		1		2		3		$2 + \sqrt{3}$		4		$+\infty$	$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	1.0 1.0 1.0 0.5
x	$-\infty$	-1		1		2		$+\infty$																																												
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$																																													
x	$-\infty$	0	$2 - \sqrt{3}$		1		2		3		$2 + \sqrt{3}$		4		$+\infty$																																					
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$																																					
1.2	Ta có $(1-m^3)x^3 + 3mx^2 + (3m^2 - 2m + 2)x + m^3 + 2m \geq 0$ $\Leftrightarrow (x+m)^3 + 2(x+m) \geq (mx)^3 + 2mx$ (1) Xét hàm số $g(t) = t^3 + 2t$ trên $\mathbb{R}$, có $g'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vì vậy (1) $\Leftrightarrow g(x+m) \geq g(mx) \Leftrightarrow x+m \geq mx \Leftrightarrow m \leq \frac{x}{x-1}, \forall x \in [2;5]$. Vì hàm số $h(x) = \frac{x}{x-1}$ nghịch biến trên đoạn $[2;5]$ nên $\min_{[2;5]} h(x) = h(5) = \frac{5}{4}$. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \min_{[2;5]} h(x) \geq m \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{4}$	1.0 1.0 1.0																																																		



2.1

Kẻ đường cao SO của hình chóp đều $S.ABCD$. Ta có
 $\widehat{((ABCD), (SCD))} = \widehat{SIO} = 60^\circ$

0,5

Xét $\triangle SOI$ vuông tại O ta có: $SO = OI \cdot \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

0.5

$$d(O, (SCD)) = OH : \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{3}}{4}a$$

1,0

$$\frac{d(G, (SCD))}{d(O, (SCD))} = \frac{SG}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow d(G, (SCD)) = \frac{2}{3}d(O, (SCD)) = \frac{\sqrt{3}}{6}a.$$

1.0

2.2

Đặt $k = \frac{SM}{SA}$. Ta có: $MNPQ$ và $ABCD$ đồng dạng với tỉ số $k = \frac{SM}{SA}$ ($0 < k < 1$).

$$\text{Thể tích khối chóp } SABCD : V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot a^2 = \frac{\sqrt{3}}{6}a^3.$$

$$\text{Do đó } S_{MNPQ} = k^2 S_{ABCD}.$$

1.0

$$\text{Ta có: } \frac{MM'}{SO} = \frac{MA}{SA} = \frac{SA - SM}{SA} = 1 - k.$$

$$V_{MNPQM'N'P'Q'} = S_{MNPQ} \cdot MM' = S_{ABCD} \cdot k^2 \cdot (1 - k) \cdot SO = 3V \cdot k^2 \cdot (1 - k)$$

$$= \frac{3V}{2} \cdot k \cdot k \cdot (2 - 2k) \leq \frac{3V}{2} \cdot \left(\frac{k + k + 2 - 2k}{3} \right)^3 = \frac{4}{9}V = \frac{\sqrt{3}}{27}a^3.$$

1.0

Vậy thể tích lớn nhất của khối đa diện $MNPQM'N'P'Q'$ là $\frac{\sqrt{3}}{27}a^3$ khi

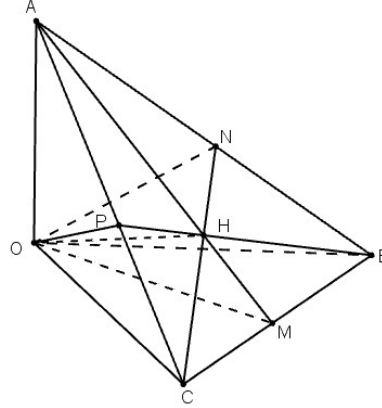
	$k = 2 - 2k \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}.$	
3.1	Đặt $M = \max_{[-1;4]} f(x)$ ta có $M \geq x^3 - 15x - m + 12x + 1 \quad \forall x \in [-1;4] \Leftrightarrow x^3 - 15x - m \leq m - 12x - 1$ $\Leftrightarrow -M + 12x + 1 \leq x^3 - 15x - m \leq M - 12x - 1$ $\begin{cases} m \leq x^3 - 27x - 1 + M & (1) \\ m \geq x^3 - 3x + 1 - M & (2) \end{cases} \quad \forall x \in [-1;4]$ $(1) \Leftrightarrow m \leq \min_{[-1;4]} \{x^3 - 27x - 1 + M\} = -55 + M$ $(2) \Leftrightarrow m \geq \min_{[-1;4]} \{x^3 - 3x + 1 - M\} = 53 - M$ Do đó: $M - 55 \geq 53 - M \Leftrightarrow M \geq 54 \Rightarrow \min M = 54$ khi $m = -1$.	0.5 1.0 1.0
3.2	Số phần tử không gian mẫu là số cách xếp $(2n+3)$ học sinh vào ghế. Khi đó $n(\Omega) = (2n+3)!$. Gọi T là biến cố: “Hoa, Hồng, Cúc được sắp xếp ngồi vào các ghế được đánh số lần lượt là x, y, z sao cho $y = \frac{x+z}{2}$”. Suy ra $x+z$ chia hết cho 2. Khi đó, bài toán trở thành: xếp Hoa và Cúc vào 2 chỗ x và z thỏa mãn tổng $x+z$ là số chẵn (khi đó $y = \frac{x+z}{2}$ là duy nhất nên sẽ có duy nhất một cách xếp cho Hồng). Ta có 2 trường hợp sau: Trường hợp 1: x, z cùng lẻ. Từ 1 đến $2n+3$ có $n+2$ số lẻ, nên trường hợp này có $A_{n+2}^2 \cdot (2n)!$ cách xếp. Trường hợp 2: x, z cùng chẵn. Do từ 1 đến $2n+3$ có $n+1$ số chẵn, nên trường hợp này có $A_{n+1}^2 \cdot (2n)!$ cách xếp. Khi đó số phần tử của biến cố T là: $n(T) = (A_{n+2}^2 + A_{n+1}^2) \cdot (2n)!$. Theo bài ra ta có: $p = \frac{n(T)}{n(\Omega)} = \frac{(A_{n+2}^2 + A_{n+1}^2) \cdot (2n)!}{(2n+3)!} = \frac{12}{575} (*)$. Ta có: $(*) \Leftrightarrow \frac{(n+1)(n+2) + n(n+1)}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)} = \frac{12}{575} \Leftrightarrow \frac{n+2+n}{2(2n+1)(2n+3)} = \frac{12}{575}$ (do $n+1 > 0$).	1.0 0.5 0.5

$$\Leftrightarrow 48n^2 - 479n - 539 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 11(\text{tm}) \\ n = -\frac{49}{48}(l) \end{cases}$$

Vậy Lớp có 25 học sinh.

0.5

4



Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên các cạnh BC, BA, AC . Suy ra $AM \perp BC$ hay $\widehat{AMO} = \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta ABC}}$

$$CN \perp AB \text{ hay } \widehat{CNO} = \gamma \Rightarrow \cos \gamma = \frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta ABC}}$$

$$BP \perp AC \text{ hay } \widehat{BPO} = \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{S_{\Delta OAC}}{S_{\Delta ABC}}$$

$$\text{Ta có: } \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta ABC}} + \frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta ABC}} + \frac{S_{\Delta OAC}}{S_{\Delta ABC}}$$

Mặt khác ta có:

$$ON^2 = NH \cdot NC \Leftrightarrow ON^2 \cdot AB^2 = NH \cdot AB \cdot NC \cdot AB \Leftrightarrow S_{\Delta OAB}^2 = S_{\Delta HAB} \cdot S_{\Delta ABC}$$

$$\text{Tương tự: } S_{\Delta OBC}^2 = S_{\Delta HCB} \cdot S_{\Delta ABC}, S_{\Delta OAC}^2 = S_{\Delta HCA} \cdot S_{\Delta ABC}$$

$$\text{Suy ra: } S_{\Delta OBC}^2 + S_{\Delta OCA}^2 + S_{\Delta OAB}^2 = S_{\Delta ABC}^2$$

Ta lại có:

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)^2 &= \left(\frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta ABC}} + \frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta ABC}} + \frac{S_{\Delta OAC}}{S_{\Delta ABC}} \right)^2 \leq 3 \left(\frac{S_{\Delta OBC}^2}{S_{\Delta ABC}^2} + \frac{S_{\Delta OCA}^2}{S_{\Delta ABC}^2} + \frac{S_{\Delta OAB}^2}{S_{\Delta ABC}^2} \right) \\ &= 3 \cdot \frac{S_{\Delta OBC}^2 + S_{\Delta OCA}^2 + S_{\Delta OAB}^2}{S_{\Delta ABC}^2} = 3 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \sqrt{3} \text{ (đpcm).}$$

0,5

0.5

0.5

5	Đặt $a = x - 3, b = y - 2, c = z$. Khi đó: $a, b, c > 0$ và $P = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 1}} - \frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)}$ Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(c+1)^2}{2} \geq \frac{1}{4}(a+b+c+1)^2$ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. Mặt khác $(a+1)(b+1)(c+1) \leq \frac{(a+b+c+3)^3}{27}$ Khi đó $P \leq \frac{1}{a+b+c+1} - \frac{27}{(a+b+c+3)^3}$ Đặt $t = a+b+c+1 \Rightarrow t > 1$. Khi đó $P \leq \frac{1}{t} - \frac{27}{(t+2)^3}, t > 1$ Xét hàm: $f(t) = \frac{1}{t} - \frac{27}{(t+2)^3}, t > 1 \Rightarrow f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{81}{(t+2)^4} = 0$ $\Leftrightarrow (t+2)^4 = 81t^2 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 4 (t > 1)$ suy ra: $\max f(t) = f(4) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow t = 4$ $\Rightarrow \max P = f(4) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c = 1 \\ a + b + c + 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1 \Leftrightarrow x = 4; y = 3; z = 1$	0.5 0.5 0.5
---	---	----------------------------------