

PHẦN E GHI PHÍA DƯỚI ĐÂY ANH THÊM VÀO SAU CHỖ ĐỊNH NGHĨA
3.2.2 TRANG 23

Ý tưởng phương pháp hàm sinh như sau: Giả sử ta cần tìm công thức tổng quát của một dãy số $\{a_n\}$. nào đó. Từ công thức truy hồi hoặc những lý luận tổ hợp trực tiếp, ta tìm được hàm sinh :

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

Khai triển $A(x)$ thành chuỗi và tìm hệ số của x^n trong khai triển đó ta tìm được a_n . Công thức khai triển thường sử dụng

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

BÀI TẬP NÀY ANH THÊM VÀO SAU BÀI TẬP 3.2.4 TRANG 29

Bài toán 3.2.5. *Bài toán chọn quả*

Có bao nhiêu cách sắp xếp một giỏ n trái cây thỏa mãn các điều kiện sau :

Số táo phải chẵn.

Số chuối phải chia hết cho 5.

Chỉ có thể có nhiều nhất 4 quả cam.

Chỉ có thể có nhiều nhất một quả đào.

Bài toán có những điều kiện ràng buộc rất phức tạp và ta có cảm giác như việc giải bài toán là vô vọng. Nhưng hàm sinh lại cho ta cách giải nhanh gọn.

Lời giải. Trước tiên ta đi tìm hàm sinh cho từng loại quả

Chọn táo

1 cách chọn 0 quả táo.

0 cách chọn 1 quả táo.

1 cách chọn 2 quả táo.

0 cách chọn 3 quả táo.

.....

Như thế ta có hàm sinh $A(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1 - x^2}$.

Tương tự ta tìm được hàm sinh cho cách chọn chuối là :

$$B(x) = 1 + x^5 + x^{10} + \dots = \frac{1}{1 - x^5}$$

Hàm sinh cho cách chọn cam và đào hơi khác một chút.

Chọn cam

1 cách chọn 0 quả cam.

1 cách chọn 1 quả cam.

1 cách chọn 2 quả cam.

1 cách chọn 3 quả cam.

1 cách chọn 4 quả cam.

0 cách chọn 5 quả cam.

Như thế ta có hàm sinh $C(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1 - x^5}{1 - x}$.

Tương tự ta tìm được hàm sinh cho cách chọn đào là :

$$D(x) = 1 + x = \frac{1 - x^2}{1 - x}$$

Áp dụng *Quy tắc xoắn* suy ra hàm sinh cho cách chọn từ cả 4 loại quả là:

$$A(x).B(x).C(x).D(x) = \frac{1}{1 - x^2} \cdot \frac{1}{1 - x^5} \cdot \frac{1 - x^5}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^2}{1 - x} = \frac{1}{(1 - x^2)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

Như vậy cách xếp giỏ trái cây gồm n trái đơn giản là $n + 1$ cách.