|  |  |
| --- | --- |
| **ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI**  **TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN**  **ĐỀ CHÍNH THỨC** | **ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10**  **TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2022**  **MÔN THI : TOÁN (Vòng II)**  **Thời gian làm bài : 150 phút (không kể giao đề)** |

**Câu I. (3,5 điểm)**

1) Với là những số thực dương thỏa mãn điều kiện Chứng minh rằng : 

2) Giải hệ phương trình  **Câu II. (2,5 điểm)**

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương thỏa mãn đẳng thức :



2) Với là những số thực dương thỏa mãn các điều kiện sau

. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:  
  **Câu III. (3 điểm)**

Cho tam giác nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O). Điểm nằm trong tam giác . Gọi lần lượt là hình chiếu vuông góc của trên các cạnh . Giả sử tứ giác nội tiếp trong đường tròn 

1. Chứng minh rằng AP vuông góc với 
2. Chứng minh rằng 
3. Đường thẳng qua P vuông góc với cắt đường tròn tại hai điểm . Chứng minh rằng đường tròn tâm bán kính AP tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp 

**Câu IV. (1 điểm)**

Cho các điểm theo thứ tự nằm trên một đường thẳng sao cho độ dài các đoạn bằng k (đơn vị dài), với . Ta tô màu mỗi đoạn thẳng bởi 1 trong 3 màu (mỗi đoạn được tô bởi đúng 1 màu). Chứng minh rằng với mọi cách tô màu,, ta luôn chọn được hai số nguyên dương sao cho hai đoạn và được tô cùng màu và là bình phương của số nguyên dương.

**ĐÁP ÁN**

**Câu I. (3,5 điểm)**

**1) Với là những số thực dương thỏa mãn điều kiện Chứng minh rằng : **

Từ giả thiết suy ra Ta có :



Tương tự, ta có: . Từ đó suy ra

, Và :



Từ (1), (2) suy ra điều phải chứng minh

**2) Giải hệ phương trình **Điều kiện . Nhân 4 vào phương trình thứ nhất của hệ ta có :



Phương trình thứ hai của hệ tương đương với :

. Ta viết lại thành hệ mới :



Lấy phương trình (3) trừ đi phương trình (2), vế với vế, ta thu được :





Vậy 

**Câu II. (2,5 điểm)**

**1) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương thỏa mãn đẳng thức :**

****

Ta biến đổi như sau :



Vì là hai số nguyên dương nên . Do đó, ta suy ra : 

Do đó, ta suy ra cũng là lập phương của một số nguyên dương.Đặt , ta có:



Nếu (ktm). Xét . Khi đó, ta có . Vì 

Từ đây ta tìm được . Suy ra :



**2) Với là những số thực dương thỏa mãn các điều kiện sau**

****

**Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: ** Ta có :





Ta có : . Do đó :





Do đó Vậy  **Câu III. (3 điểm)**

**Cho tam giác nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O). Điểm nằm trong tam giác . Gọi lần lượt là hình chiếu vuông góc của trên các cạnh . Giả sử tứ giác nội tiếp trong đường tròn **

****

1. **Chứng minh rằng AP vuông góc với **

Do tứ giác nội tiếp dẫn đến 

Để ý rằng dẫn đến 

Ta có (do AP là đường kính của 

Do đó dẫn đến 

1. **Chứng minh rằng **

Gọi cắt (O) tại điểm thứ hai là J. Gọi lần lượt là trung điểm của và FB, ta có 

Đồng thời, do đó : 



Do đó cùng thuộc một đường tròn

Dẫn đến thẳng hàng và đường thẳng này đi qua X là đối xứng của qua O

Do đó chú ý rằng là hình thang vuông mà là đường trung bình nên dẫn đến là trung điểm PX hay 

1. **Đường thẳng qua P vuông góc với cắt đường tròn tại hai điểm . Chứng minh rằng đường tròn tâm bán kính AP tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp **

Gọi G đối xứng với P qua J

Ta có dẫn đến hay G thuộc 

Ta có là trung điểm của do đó

(do tứ giác nội tiếp (O))

Suy ra 

**Câu IV. (1 điểm)**

**Cho các điểm theo thứ tự nằm trên một đường thẳng sao cho độ dài các đoạn bằng k (đơn vị dài), với . Ta tô màu mỗi đoạn thẳng bởi 1 trong 3 màu (mỗi đoạn được tô bởi đúng 1 màu). Chứng minh rằng với mọi cách tô màu,, ta luôn chọn được hai số nguyên dương sao cho hai đoạn và được tô cùng màu và là bình phương của số nguyên dương.**

Gọi là màu 

Phản chứng là số chính phương



Mà trong có hai số bằng nhau, nên 

Không mất tính tổng quát, giả sử Có .

* Nếu 



Suy ra (mâu thuẫn)

* Nếu 



Suy ra do 



nhưng do , ta có điều mâu thuẫn

Vậy tồn tại sao cho là số chính phương và 