

Người làm: Nguyễn Doãn Tuấn
Zalo: Nguyễn Doãn Tuấn
Email: tuan797@gmail.com

- số đt zalo: 0972442797

CĐ13: HÌNH HỌC**Dạng 1. Tính số đo góc, chứng minh góc bằng nhau****A. Trắc nghiệm (nếu có)****Câu 1. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, tỉnh Bình Định 2018 - 2019)**

Cho tam giác ABC cân tại A , $\angle A = 20^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = BC$. Số đo của góc BDC là:

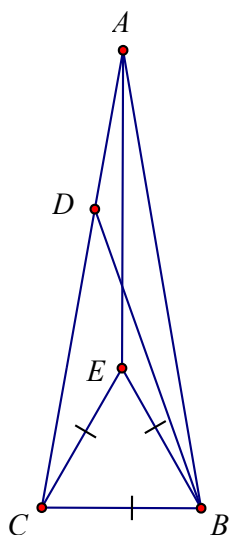
A. 50°

B. 70°

C. 30°

D. 80°

Lời giải



Vẽ tam giác đều EBC . Ta có: $BC = CE = EB$
Mà $AD = BC$ (gt)
Nên $AD = BE$.

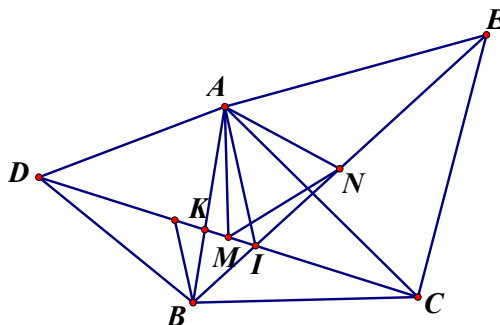
$\Delta AEB = \Delta AEC (c.c.c) \Rightarrow \widehat{EAB} = \widehat{EAC}$ $\widehat{EAB} = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$
 Chứng minh , do đó
 ΔABC cân tại A, mà $\widehat{A} = 20^\circ (gt) \Rightarrow \widehat{ABC} = (180^\circ - 20^\circ) : 2 = 80^\circ$
 ΔEBC đều nên $\widehat{EBC} = 60^\circ$, tia BE nằm giữa hai tia $BA, BC \Rightarrow \widehat{ABE} = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$
 Xét ΔABE và ΔBAD có AB cạnh chung; $\widehat{ABE} = \widehat{BAD} = 20^\circ; BE = AD$
 Vậy $\Delta ABE = \Delta BAD (c.g.g) \Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{ABD} = 10^\circ$
 Mà $\widehat{BDC} = \widehat{BAD} + \widehat{ABD}$ (góc ngoài của ΔABD)
 Nên $\widehat{BDC} = 20^\circ + 10^\circ = 30^\circ$.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Kinh Môn, tỉnh Hải Dương 2018 - 2019)

- Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao của CD và BE , K là giao của AB, DC và M, N lần lượt là trung điểm của CD và BE . Tính số đo $\widehat{BIK}, \widehat{AMN}$.
- 1) Chứng minh rằng: $DC = BE$.
- 2) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE . Tính số đo $\widehat{BIK}, \widehat{AMN}$.
- 3) Chứng minh rằng AI là phân giác của $\widehat{DIE}$.

Lời giải



- 1) Ta có $\widehat{DAC} = 60^\circ + \widehat{BAC} = \widehat{EAB}$ (1)
- Xét ΔADC và ΔABE có: $AD = AB$ (ΔABD đều); $\widehat{DAC} = \widehat{EAB}$ (cmt)
 $AC = AE$ (ΔAEC đều) $\Rightarrow \Delta DAC = \Delta BAE (c.g.c) \Rightarrow DC = BE$
- 2) $\Delta ADC = \Delta ABE$ (cm câu a) $\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{AEB}$
- Lại có trong ΔBIK : $\widehat{KBI} + \widehat{BKI} + \widehat{KIB} = 180^\circ$
- Ta có trong ΔDAK : $\widehat{ADK} + \widehat{DKA} + \widehat{DAK} = 180^\circ$; $\widehat{BKI} = \widehat{DKA}$ (đối đỉnh)
 $\Rightarrow \widehat{BIK} = \widehat{DAK}$ mà $\widehat{DAK} = 60^\circ$ (ΔABD đều) $\Rightarrow \widehat{BIK} = 60^\circ$

$$\begin{aligned} \Delta ADC &= \Delta ABE \quad (\text{câu a}) \Rightarrow \angle ACM = \angle AEN \\ \text{Có } DC &= BE \quad (\text{câu a}) \Rightarrow \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}BE \Rightarrow CM = EN \Rightarrow \Delta ACM = \Delta AEN \text{ (c.g.c)} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \angle CAM = \angle EAN \Rightarrow \angle CAM + \angle CAN = \angle EAN + \angle CAN \Rightarrow \angle MAN = \angle EAC$$

$$\text{Mà } \Delta EAC \text{ đều} \Rightarrow \angle EAC = 60^\circ \Rightarrow \angle MAN = 60^\circ$$

$$(1) \Rightarrow AM = AN \Rightarrow \Delta AMN \text{ cân tại A} \Rightarrow \Delta AMN \text{ đều} \Rightarrow \angle AMN = 60^\circ$$

$$\begin{aligned} 3) \text{ Trên tia } ID \text{ lấy } T \text{ sao cho } IT &= IB \Rightarrow \Delta BIT \text{ cân tại } I \text{ mà } \angle BIK = 60^\circ \text{ (cmt)} \Rightarrow \Delta BIT \text{ đều} \\ \Rightarrow BT &= BI; \angle IBT = 60^\circ \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \angle FBI = \angle DBA \quad (60^\circ) \text{ (cùng bằng)}$$

$$\Rightarrow \angle FBI - \angle FBK = \angle DBA - \angle FBK \Rightarrow \angle FBA = \angle FBD$$

$$\text{Lại có } BA = BD, BT = BI \Rightarrow \Delta IBA = \Delta ITD \text{ (c.g.c)}$$

Lại có

$$\text{Mà } \angle AIB = \angle ITB = 120^\circ, \text{ lại có } \angle BID = 60^\circ \Rightarrow \angle DIA = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BID = \angle DIA \Rightarrow IA \text{ là tia phân giác của } \angle DIE$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Tam Nông, tỉnh Thanh Hóa, 2018 - 2019)

Cho ΔABC cân tại A và có $\angle A = 100^\circ$, tia phân giác của $\angle B$ cắt AC tại D. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BD cắt BC tại I

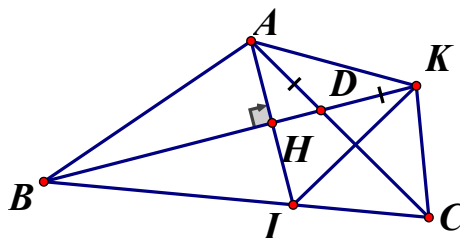
$$BA = BI$$

a) Chứng minh

b) Trên tia đối của tia DB lấy điểm K sao cho $DA = DK$. Chứng minh ΔAIK đều.

c) Tính các góc của tam giác BCK .

Lời giải



a) Gọi H là giao điểm của BD và AI

$$\begin{aligned} \text{Xét } \Delta ABH \text{ và } \Delta IBH \text{ có: } \angle AHB &= \angle IHB = 90^\circ; BH \text{ chung; } \angle B_1 = \angle B_2 \text{ (gt)} \\ \Rightarrow \Delta ABH &= \Delta IBH \text{ (g.c.g)} \Rightarrow BA = BI \end{aligned}$$

b) Xét ΔABK và ΔIBK có:

$$BK \text{ cạnh chung; } \angle B_1 = \angle B_2; BA = BI \text{ (cmt)} \Rightarrow \Delta ABK = \Delta IBK \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AK = IK$$

Vì $\triangle ABC$ cân tại A mà $\angle A = 100^\circ$ nên $\angle B = 40^\circ$

Vì $\triangle ABI$ cân tại B mà $\angle B = 40^\circ \Rightarrow \angle BAI = \angle BIA = 70^\circ$

$\Rightarrow \angle IAC = 30^\circ \Rightarrow \angle ADH = 60^\circ \Rightarrow \angle ADK = 120^\circ$

$\triangle ADK$ cân tại K mà $\angle ADK = 120^\circ \Rightarrow \angle BAK = 30^\circ \Rightarrow \angle IAK = 60^\circ$

Suy ra $\triangle AIK$ đều

$$\angle B_2 = 20^\circ$$

b) Ta có:

Xét $\triangle AIC$ và $\triangle AKC$ có: $AI = AK$; $\angle IAC = \angle KAC = 30^\circ$; AC chung

$\Rightarrow \triangle AIC = \triangle AKC (c.g.c)$

$\Rightarrow \angle AKC = \angle AIC = 110^\circ \Rightarrow \angle BKC = 110^\circ - 30^\circ = 80^\circ$

Xét $\triangle BCK$ ta suy ra được $\angle BCK = 80^\circ$.

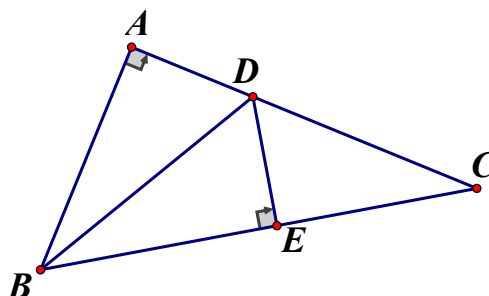
Câu 3. (HSG 7 trường Hiền Quan 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC có $\angle A = 90^\circ$, trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$. Tia phân giác của $\angle B$ cắt AC ở D.

a) So sánh các độ dài DA và DE .

b) Tính số đo $\angle BED$.

Lời giải



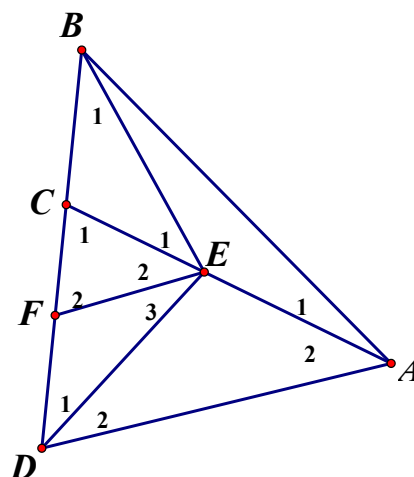
a) $\triangle ABD = \triangle EBD (c.g.c) \Rightarrow DA = DE$

b) Vì $\triangle ABD = \triangle EBD$ nên $\angle A = \angle BED \Rightarrow \angle BED = 90^\circ$

Câu 4. (HSG 7 huyện Phù Ninh 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC có góc B bằng 45° , góc C bằng 120° . Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 2CB$. Tính góc ADB .

Lời giải

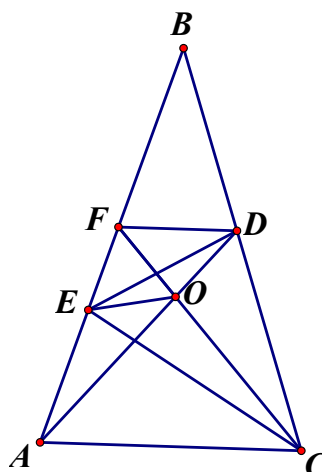


Trên CA lấy điểm E sao cho $\angle EBA = 15^\circ \Rightarrow \angle B_1 = 30^\circ$
 Ta có: $\angle E_1 = \angle A_1 + \angle EBA = 30^\circ$, do đó $\triangle CBE$ cân tại C $\Rightarrow CB = CE$
 Gọi F là trung điểm CD $\Rightarrow CB = CE = CF = FD$
 Tam giác CEF cân tại C, lại có $\angle E_1 = 180^\circ - \angle BCA = 60^\circ$ nên là tam giác đều
 Như vậy $CB = CE = CF = FD = EF$
 Suy ra $\angle D_1 = \angle E_3 = \angle F_2 = 60^\circ$ ($\triangle CEF$ đều) $\Rightarrow \angle D_1 = 30^\circ$
 Xét tam giác CDE ta có: $\angle CED = 180^\circ - (\angle E_1 + \angle D_1) = 90^\circ$ (1)
 Ta có: $\angle D_1 = \angle B_1 \Rightarrow EB = ED, \angle A = \angle EBA \Rightarrow EA = EB \Rightarrow EA = ED$ (2)
 Từ (1) và (2) suy ra $\triangle EDA$ vuông cân tại E $\Rightarrow \angle D_2 = 45^\circ$
 Vậy $\angle ADB = \angle D_1 + \angle D_2 = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Như Xuân, 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC có $\angle BAC = \angle BCA = 80^\circ$. Ở miền trong của tam giác vẽ hai tia Ax và Cy cắt BC, BA lần lượt tại D và E . Cho biết $\angle CAD = 60^\circ, \angle ECA = 50^\circ$.
 Tính số đo $\angle ADE$.

Lời giải



Kẻ tia CF sao cho $\angle ACF = 60^\circ (F \in AB)$, Tia CF cắt AD tại $O \Rightarrow \triangle AOC; \triangle FOD$ đều
 $\Rightarrow OA = OC = AC; OF = OD = FD$.

$\triangle AEC$ có: $\angle EAC = 80^\circ, \angle ACE = 50^\circ \Rightarrow \angle ECA = 50^\circ \Rightarrow \triangle AEC$ cân tại A

Có $\angle EAO = 20^\circ \Rightarrow \angle AEO = \angle AOE = 80^\circ \Rightarrow \angle EOF = 40^\circ$

Suy ra $\angle AFC = 180^\circ - 80^\circ - 60^\circ = 40^\circ = \angle EOF$

$\Rightarrow \triangle EOF$ cân tại E

$\Rightarrow EO = EF \Rightarrow \triangle FDE = \triangle ODE (c.c.c)$

$\Rightarrow \angle ODE = \angle FDE = \frac{1}{2} \angle FDA = \frac{1}{2} 60^\circ = 30^\circ$

Vậy $\angle ADE = 30^\circ$.

Dạng 2. Chứng minh đoạn bằng nhau

Câu 1. (HSG 7 huyện Hiệp Đức, 2018 - 2019)

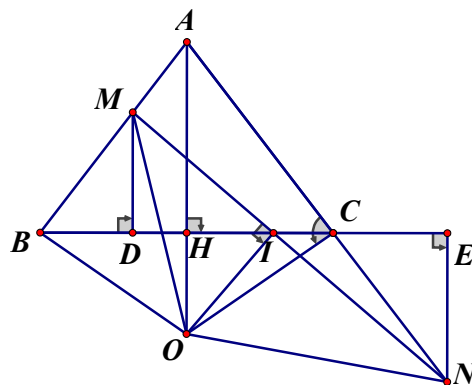
Cho tam giác cân $ABC, AB = AC$. Trên cạnh BC lấy điểm D , trên tia đối của CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB, AC lần lượt ở M, N . Chứng minh rằng:

a) $DM = EN$.

b) Đường thẳng BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN .

c) Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC .

Lời giải



$$\triangle MDB = \triangle NEC (g.c.g) \Rightarrow DM = EN$$

a) (cặp cạnh tương ứng)

$\Rightarrow MB = NC$ (cặp cạnh tương ứng)

b) Ta có:

$\triangle MDI$ vuông tại D : $\angle BMD + \angle MID = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn trong tam giác vuông)

$\triangle NEI$ vuông tại E : $\angle ENI + \angle NIE = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn trong tam giác vuông)

Mà $\angle MID = \angle NIE$ (đối đỉnh) nên $\angle BMD = \angle ENI$

$\Rightarrow \triangle MDI = \triangle NEI (g.c.g) \Rightarrow IM = IN$ (cặp cạnh tương ứng)

Vậy BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN

c) Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC .

$\triangle AHB = \triangle AHC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) $\Rightarrow \widehat{HAB} = \widehat{HAC}$ (cặp góc tương ứng)

Gọi O là giao điểm của AH với đường thẳng vuông góc với MN kẻ từ I

$\triangle OAB = \triangle OAC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OBA} = \widehat{OCA}$ (cặp góc tương ứng) (1)

$\Rightarrow OC = OB$ (cặp cạnh tương ứng)

$\triangle OIM = \triangle OIN$ (c.g.c) $\Rightarrow OM = ON$ (cặp cạnh tương ứng)

$\triangle OBM = \triangle OCN$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{OBM} = \widehat{OCN}$ (cặp góc tương ứng) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{OCA} = \widehat{OCN} = 90^\circ$, do đó $OC \perp AC$

Vậy điểm O cố định.

Câu 2. (HSG 7 huyện Như Xuân, 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy điểm D , trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D cắt AB tại M . Đường vuông góc với BE tại E cắt AC tại N

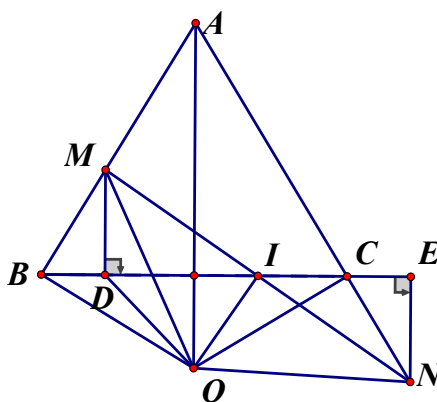
$$\triangle MBD = \triangle NCE$$

1) Chứng minh

2) Cạnh BC cắt MN tại I . Chứng minh I là trung điểm của MN .

3) Chứng minh đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên đoạn BC .

Lời giải



$$\triangle ABC = \triangle NCE (= \triangle ACB) \Rightarrow \triangle MBD = \triangle NCE \text{ (cgv - gn)}$$

1) Ta có:

$$\Rightarrow MD = EN \Rightarrow \triangle IMD = \triangle INE \text{ (cgv - gn)}$$

2) Theo câu a)

$\Rightarrow IM = IN \Rightarrow I$ là trung điểm MN .

$$AH \perp BC \Rightarrow \triangle ABH = \triangle ACH \text{ (ch - gn)} \Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{CAH} \quad (1)$$

3) Kẻ

Đường vuông góc với MN tại I cắt AH tại O

$$\Rightarrow \triangle OAB = \triangle OAC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{OBA} = \widehat{OCA} \quad (2)$$

Mặt khác :

$$\triangle OBH = \triangle OCH \text{ (2cgv)} \Rightarrow OB = OC \quad (*)$$

$$\triangle OMI = \triangle ONI \text{ (2cgv)} \Rightarrow OM = ON \quad (**)$$

$$BM = CN \quad (***)$$

Từ (*), (**), (***) suy ra : $\triangle OBM = \triangle OCN (c.c.c) \Rightarrow \widehat{OBM} = \widehat{OCN} \quad (3)$

$$\Rightarrow \widehat{OCA} = \widehat{OCN} (= \widehat{OBA}) = 90^\circ \Rightarrow OC \perp AC$$

Từ (2) (3)

Vì $\widehat{AC}$ cố định mà $OC \perp AC \Rightarrow O$ cố định

Vậy đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua điểm O cố định.

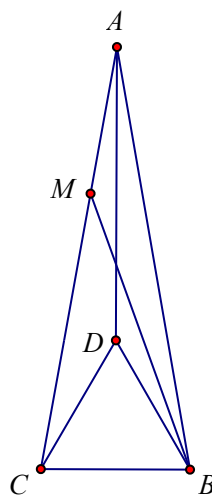
Câu 3. (HSG 7)

Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{A} = 20^\circ$, vẽ tam giác đều DBC (D nằm trong tam giác ABC). Tia phân giác của $\widehat{ABD}$ cắt AC tại M . Chứng minh:

a) Tia AD là phân giác của $\widehat{BAC}$.

b) $AM = BC$.

Lời giải



a) Chứng minh $\triangle ADB = \triangle ADC (c.c.c) \Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{DAC}$, do đó $\widehat{DAB} = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$

$\triangle ABC$ cân tại A, mà $\widehat{A} = 20^\circ (gt) \Rightarrow \widehat{ABC} = (180^\circ - 20^\circ) : 2 = 80^\circ$

b) $\triangle ABC$ cân tại A, mà

$\triangle ABC$ đều nên $\widehat{DBC} = 60^\circ$, tia BD nằm giữa hai tia $BA, BC \Rightarrow \widehat{ABD} = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$

Tia BM là phân giác của $\widehat{ABD} \Rightarrow \widehat{ABM} = 10^\circ$

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle BAD$ có AB cạnh chung; $\widehat{BAM} = \widehat{ABD} = 20^\circ$; $\widehat{ABM} = \widehat{DAB} = 10^\circ$

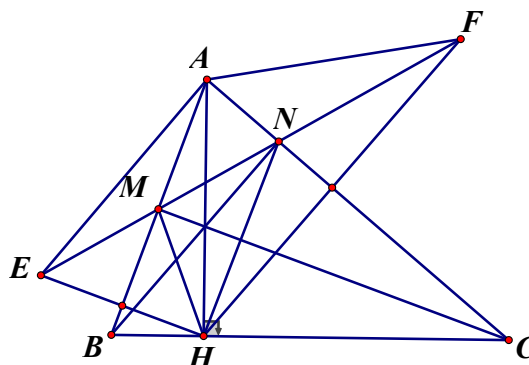
Vậy $\triangle ABM = \triangle BAD (g.c.g) \Rightarrow AM = BD$, mà $BD = BC (gt) \Rightarrow AM = BC$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Tân Tạo, 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC ($\angle BAC < 90^\circ$), đường cao AH . Gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng của H qua AB, AC , đường thẳng EF cắt AB, AC lần lượt tại M và N . Chứng minh rằng:

- a) $AE = AF$
- b) $\angle HAN$ là phân giác của $\angle MHN$
- c) Chứng minh $CM \parallel EH, BN \parallel FH$

Lời giải



- a) Vì AB là trung trực của EH nên ta có: $AE = AH$ (1)
 Vì AC là trung trực của HF nên ta có: $AH = AF$ (2)
 Từ (1) và (2) suy ra $AE = AF$
- b) Vì $M \in AB$ nên MB là phân giác $\angle EMH \Rightarrow MB$ là phân giác ngoài góc M của tam giác MNH
 Vì $N \in AC$ nên NC là phân giác $\angle FNH \Rightarrow NC$ là phân giác ngoài $\angle N$ của tam giác MNH
 Do MB, NC cắt nhau tại A nên HA là phân giác trong góc H của tam giác HMN hay HA là phân giác của $\angle MHN$.
- c) Ta có: $AH \perp BC$ (gt) mà HM là phân giác $\angle MHN \Rightarrow HB$ là phân giác ngoài của $\angle H$ của tam giác HMN
 MB là phân giác ngoài của $\angle M$ của tam giác HMN (cmt) $\Rightarrow NB$ là phân giác trong góc N của tam giác $HMN \Rightarrow BN \perp AC$ (hai đường phân giác của hai góc kề bù thì vuông góc với nhau) $\Rightarrow BN \parallel HF$ (cùng vuông góc với AC)
 Chứng minh tương tự ta có: $EH \parallel CM$.

Câu 5. (HSG 7, trường Hiền Quan, 2018 - 2019)

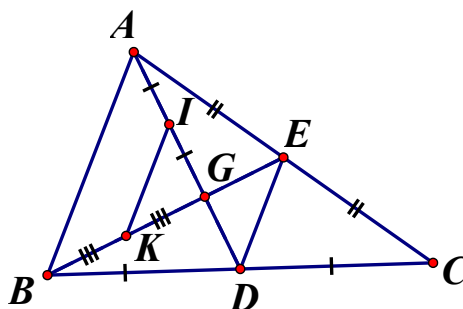
Cho tam giác ABC , đường trung tuyến AD . Kẻ đường trung tuyến BE cắt AD ở G . Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của GA, GB . Chứng minh rằng:

- a) $IK \parallel DE, IK = DE$

$$AG = \frac{2}{3} AD.$$

b)

Lời giải



a) $\triangle ABC$ và $\triangle ABG$ có:

$$DE \parallel AB, DE = \frac{1}{2} AB, IK \parallel AB, IK = \frac{1}{2} AB \text{ do đó } DE \parallel IK \text{ và } DE = IK$$

b) $\triangle GDE = \triangle GIK$ (g.c.g) vì có $DE = IK$ (câu a); $\angle GDE = \angle GIK$; $\angle GED = \angle GKI$ (slt)
 $\Rightarrow GD = GI$.

$$GD = GI = IA \Rightarrow AG = \frac{2}{3} AD.$$

Ta có:

Câu 6. (HSG 7 trường Lý Tự Trọng 2018 - 2019)

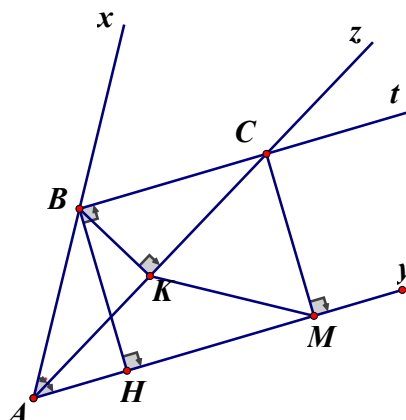
Cho $\angle Ay = 60^\circ$ có tia phân giác Az . Từ điểm B trên Ax kẻ BH vuông góc với Ay tại H , kẻ BK vuông góc với Az và Bt song song với Ay , Bt cắt Az tại C . Từ C kẻ CM vuông góc với Ay tại M . Chứng minh:

a) K là trung điểm của AC .

b) $\triangle KMC$ là tam giác đều.

c) Cho $BK = 2 \text{ cm}$. Tính các cạnh $\triangle AKM$.

Lời giải



a) $\triangle ABC$ cân tại B do $\angle CAB = \angle CBA (= \angle MAC)$ và BK là đường cao $\Rightarrow BK$ là đường trung tuyến
 $\Rightarrow K$ là trung điểm của AC .

$$\triangle ABH = \triangle BAK \text{ (cạnh huyền, góc nhọn)}$$

b)

$$\Rightarrow BH = AK \text{ (hai cạnh tương ứng) mà } AK = \frac{1}{2} AC \Rightarrow BH = \frac{1}{2} AC$$

Ta có : $BH = CM$ (tính chất cặp đoạn chắn) mà

$$CK = BH = \frac{1}{2} AC \Rightarrow CM = CK \Rightarrow \triangle MKC \text{ là tam giác cân (1)}$$

$$\text{Mặt khác: } \angle MCB = 90^\circ \text{ và } \angle ACB = 30^\circ \Rightarrow \angle MCK = 60^\circ \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle MKC$ là tam giác đều

$$\text{Vì } \triangle ABK \text{ vuông tại } K \text{ mà } \angle KAB = 30^\circ \Rightarrow AB = 2BK = 2.2 = 4 \text{ cm}$$

$$\text{Vì } \triangle ABK \text{ vuông tại } K \text{ nên theo Pytago ta có: } AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$$

$$\text{Mà } KC = \frac{1}{2} AC \Rightarrow KC = AK = \sqrt{12}$$

$$\triangle KCM \text{ đều} \Rightarrow KC = KM = \sqrt{12}$$

$$\text{Theo phần b) } AB = BC = 4; AH = BK = 2$$

$$HM = BC \text{ (HMBC là hình chữ nhật)}$$

$$\Rightarrow AM = AH + HM = 6$$

Câu 7. (HSG 7 huyện Phù Ninh, 2018 - 2019)

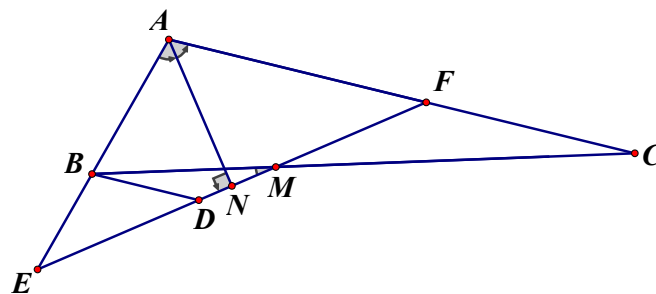
Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC . Từ M kẻ đường vuông góc với tia phân giác của góc BAC tại N , cắt tia AB tại E và cắt tia AC tại F .

Chứng minh rằng:

$$\text{a) } BE = CF.$$

$$\text{b) } AE = \frac{AB + AC}{2}$$

Lời giải



a) Qua B kẻ đường thẳng song song với AC , cắt EF tại D
 Xét $\triangle MBD$ và $\triangle MCF$ có : $\angle DBM = \angle FCM$ (so le trong)

$MB = MC$ (giả thiết); $\widehat{BMD} = \widehat{CMF}$ (đối đỉnh)

Do đó: $\triangle MBD = \triangle MCF$ (c.g.c) suy ra $BD = CF$ (1)

Mặt khác $\triangle AEF$ có AN vừa là đường cao, vừa là đường phân giác nên cân tại A, suy ra

$\widehat{E} = \widehat{MFA}$. Mà $\widehat{BDE} = \widehat{MFA}$ (đồng vị) nên $\widehat{BDE} = \widehat{E}$, Do đó $\triangle BDE$ cân tại B, suy ra $BD = BE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BE = CF$ (dpcm)

b) Tam giác AEF cân tại A suy ra $AE = AF$

Ta có: $2AE = AE + AF = (AB + BD) + (AC - CF)$

$= (AB + AC) + (BD - CF) = AB + AC$ (do $BE = CF$)

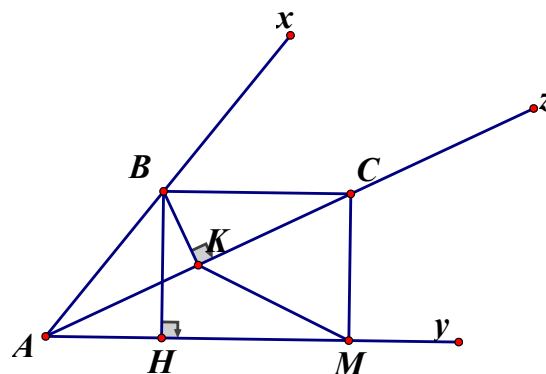
Vậy $AE = \frac{AB + AC}{2}$ (dpcm)

Câu 8. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, 2018 - 2019)

Cho $\widehat{xAy} = 60^\circ$, vẽ tia phân giác Az của góc đó. Từ một điểm B trên tia Ax vẽ đường thẳng song song với Ay cắt Az tại C . Kẻ $BH \perp Ay$ tại H , $CM \perp Ay$ tại M , $BK \perp AC$ tại K . Chứng minh

- a) $KC = KA$ b) $BH = \frac{AC}{2}$ c) $\triangle KMC$ đều

Lời giải



$$\widehat{yAz} = \widehat{xAx} = 30^\circ (\text{Az là tia phân giác của } \widehat{xAy})$$

a) Ta có: $\widehat{yAz} = \widehat{xAx} = 30^\circ$ là tia phân giác của

Mà $\widehat{yAz} = \widehat{ACB}$ ($Ay \parallel BC$, so le trong) $\Rightarrow \widehat{xAx} = \widehat{ACB} \Rightarrow \triangle ABC$ cân tại B

Trong tam giác cân ABC có BK là đường cao ứng với cạnh đáy $\Rightarrow BK$ cũng là đường trung tuyến của $\triangle ABC \Rightarrow KC = KA$

$$\widehat{ABH} = 90^\circ - \widehat{xAy} = 30^\circ (\triangle ABH$$

b) Ta có: $\widehat{ABH} = 30^\circ$ vuông tại H)

Xét hai tam giác vuông $\triangle ABH$ và $\triangle BAK$ có:

AB chung; $\widehat{xAx} = \widehat{ABH} (= 30^\circ) \Rightarrow \triangle ABH = \triangle BAK \Rightarrow BH = AK$

Mà $AK = \frac{AC}{2}$ (cmt) $\Rightarrow BH = \frac{AC}{2}$

c) Ta có: $\triangle AMC$ vuông tại M có $\widehat{MCK} = 30^\circ$ là trung tuyến ứng với cạnh huyền

$$\Rightarrow KM = \frac{AC}{2} \quad (1) \quad \text{mà} \quad AK = KC = \frac{AC}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow KM = KC \Rightarrow \triangle KMC$ cân tại K (3)

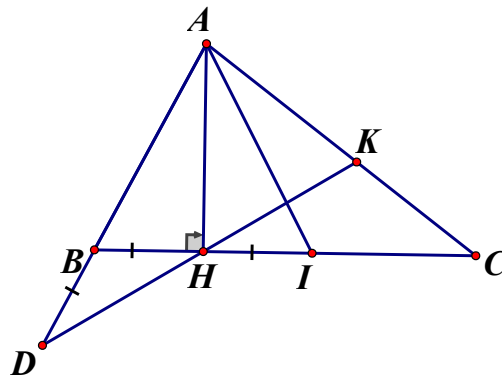
Mặt khác $\triangle AMC$ có $\angle AMC = 90^\circ, \angle Az = 30^\circ \Rightarrow \angle MCK = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\triangle AMC$ đều.

Câu 9. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, 2018 - 2019)

Cho $\triangle ABC$ có $\angle B = 2\angle C < 90^\circ$ Vẽ AH vuông góc với BC tại H. Trên tia AB lấy điểm D sao cho $AD = HC$. Chứng minh rằng đường thẳng DH đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC .

Lời giải



Ta có: $\angle B = 2\angle C \Rightarrow \angle B > \angle C$ nên $AC > AB \Rightarrow HC > HB$

Trên đoạn thẳng HC lấy điểm I sao cho $IH = IB \Rightarrow \triangle AHI = \triangle AHB$

$\Rightarrow AI = AB$ và $\angle AIB = \angle ABC = 2\angle ACB$

Mặt khác: $\angle AIB = \angle ACB + \angle IAC \Rightarrow \angle IAC = \angle ACB$

Do đó: $IA = IC < HC$ hay $AB < HC = AD$

Gọi K là giao điểm của DH với AC .

Vì $AD = HC, AB = IC$ nên $BD = HI = HB \Rightarrow \triangle DBH$ cân tại B

$$\angle BDH = \angle BHD = \frac{1}{2} \angle ABC = \angle ACB$$

Do đó:

$$\Rightarrow \angle KHC = \angle ACB (= \angle BHD) \Rightarrow \angle KAH = \angle KHA \quad (\text{phụ hai góc bằng nhau})$$

Suy ra $KA = KH = KC$ hay K là trung điểm của đoạn thẳng AC

Vậy đường thẳng DH đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC.

Câu 10. (HSG 7 huyện Lộc Hà, 2018 - 2019)

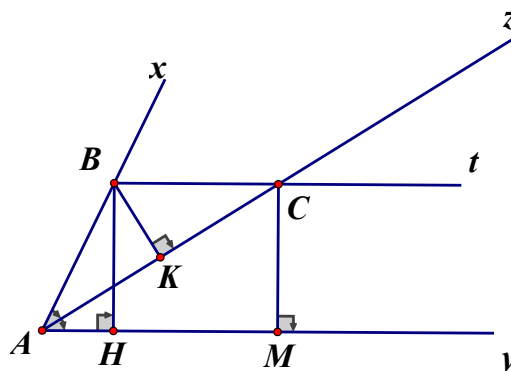
Cho $\angle Ay = 60^\circ$ có tia phân giác Az . Từ điểm B trên Ax kẻ BH vuông góc với Ay tại H, kẻ BK vuông góc với Az và Bt song song với Ay , Bt cắt Az tại C. Từ C kẻ CM vuông góc với Ay tại M. Chứng minh:

a) K là trung điểm của AC.

b) $\triangle KMC$ là tam giác đều.

c) Cho $BK = 2\text{cm}$, tính các cạnh của $\triangle AKM$.

Lời giải



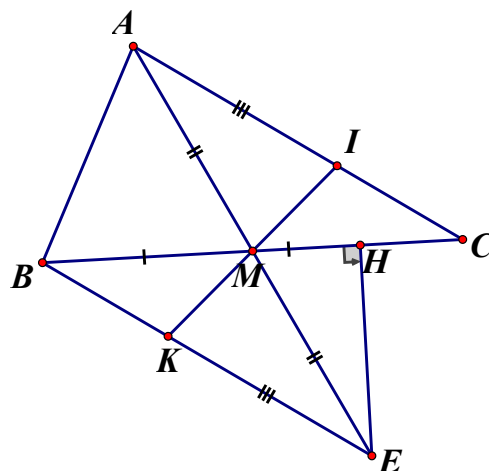
- $\triangle ABC$ cân tại B do $\angle ABC = \angle ACB (= \angle MAC)$ và BK là đường cao $\Rightarrow BK$ là đường trung tuyến $\Rightarrow K$ là trung điểm của AC
 $\triangle ABH = \triangle BAK$ (cạnh huyền – góc nhọn)
 $\Rightarrow BH = AK$ (hai cạnh tương ứng) mà $AK = \frac{1}{2} AC \Rightarrow BH = \frac{1}{2} AC$
 Ta có: $BH = CM$ (tính chất đoạn chắn) mà $CK = BH = \frac{1}{2} AC \Rightarrow CM = CK \Rightarrow \triangle MKC$ là tam giác cân (1)
 Mặt khác: $\angle MCB = 90^\circ$ và $\angle ACB = 30^\circ \Rightarrow \angle MCK = 60^\circ$ (2)
 Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle MKC$ là tam giác đều
 $\triangle ABK$ vuông tại K mà $\angle KAB = 30^\circ \Rightarrow AB = 2BK = 2.2 = 4cm$
 Vì $\triangle ABK$ vuông tại K nên theo pytago ta có: $AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$
 Mà $KC = \frac{1}{2} AC \Rightarrow KC = AK = \sqrt{12}$
 $\triangle KCM$ đều $\Rightarrow KC = KM = \sqrt{12}$
 Theo phần b, $AB = BC = 4, AH = BK = 2, HM = BC$ ($HBCM$ là hình chữ nhật)
 $\Rightarrow AM = AH + HM = 6$

Câu 11. (HSG 7 huyện Việt Yên, 2018 - 2019)

Cho tam giác $ABC (AB > AC)$, M là trung điểm của BC . Đường thẳng đi qua M vuông góc với tia phân giác của $\angle A$ tại H cắt cạnh AB, AC lần lượt tại E và F
 Chứng minh:

- $2\angle BME = \angle ACB - \angle B$
 a) $\frac{FE^2}{4} + AH^2 = AE^2$
 b) $BE = CF$
 c)

Lời giải



a) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có: $AM = EM(gt); \angle AMC = \angle EMB$; $BM = MC(gt)$ (đối đỉnh)

Nên $\triangle AMC = \triangle EMB(c.g.c) \Rightarrow AC = EB$

Vì $\triangle AMC = \triangle EMB \Rightarrow \angle MAC = \angle MEB$, 2 góc ở vị trí so le trong được tạo bởi đường thẳng AC, EB cắt đường thẳng $AE) \Rightarrow AC \parallel BE$

b) Xét $\triangle AMI$ và $\triangle EMK$ có: $AM = EM(gt); \angle MAI = \angle MEK(do \triangle AMC = \triangle EMB)$;

$AI = EK(gt) \Rightarrow \triangle AMI = \triangle EMK(c.g.c) \Rightarrow \angle AMI = \angle EMK$

Mà $\angle AMI + \angle EME = 180^\circ$ (Kề bù) $\Rightarrow \angle EMK + \angle EME = 180^\circ \Rightarrow$ ba điểm I, M, K thẳng hàng.

$$\angle BHE(\angle H = 90^\circ) \quad \angle HBE = 50^\circ \Rightarrow \angle HEB = 40^\circ$$

c) Trong tam giác vuông có

$$\Rightarrow \angle HEM = \angle HEB - \angle MEB = 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ$$

$\angle BME$ là góc ngoài tại đỉnh M của $\triangle HEM$ nên $\angle BME = \angle HEM + \angle MHE = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$ (định lý góc ngoài của tam giác)

Câu 2. (HSG 7 trường Lê Hồng Phong 2018 - 2019)

Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn, $AB < AC < BC$. Các tia phân giác của góc A và góc C cắt nhau tại O. Gọi F là hình chiếu của O trên BC; H là hình chiếu của O trên AC. Lấy điểm I trên đoạn FC sao cho $FI = AH$. Gọi K là giao điểm của FH và AI.

$$\triangle FCH$$

a) Chứng minh cân

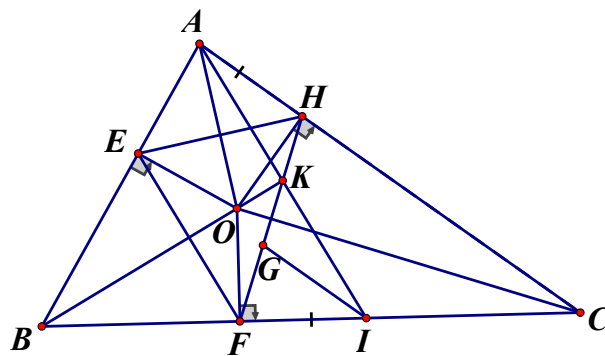
$$AK = KI$$

b) Chứng minh

$$B, O, K$$

c) Chứng minh 3 điểm thẳng hàng.

Lời giải



$$\angle HO = \angle FO = 90^\circ \quad (OH \perp AC, OF \perp BC)$$

a) Ta có vì

Xét $\triangle CHO$ vuông và $\triangle CFO$ vuông có: OC chung; $\angle HCO = \angle FCO$ (OC là phân giác $\angle C$)
 Vậy $\triangle CHO = \triangle CFO$ (cạnh huyền – góc nhọn)
 $\Rightarrow CH = CF$ (hai cạnh tương ứng). Vậy $\triangle FCH$ cân tại C.

$$I \quad IG \parallel AC \quad (G \in FH)$$

b) Qua vẽ

Ta có $\triangle FCH$ cân tại C (cmt) $\Rightarrow \angle HCF = \angle FCH$ (1)

Mà $\angle HCF = \angle FGI$ (đồng vị, $IG \parallel AC$) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle FCH = \angle FGI$ hay $\angle FGH = \angle FGI$, Vậy $\triangle FGI$ cân tại I
 $\Rightarrow FI = GI$, mặt khác: $FI = HI$ nên $GI = HI (= FI)$

Ta lại có: $\angle GIK = \angle HKI$; $\angle HAK = \angle GIK$ (so le trong, $IG \parallel AC$)

Xét $\triangle AHK$ và $\triangle IGK$ có: $\angle GIK = \angle HKI$ (cmt); $GI = HI$ (cmt); $\angle HAK = \angle GIK$ (cmt)
 $\Rightarrow \triangle AHK = \triangle IGK$ (g.c.g) $\Rightarrow AK = KI$ (d.c.m)

$$OE \perp AB \quad BO \quad \angle ABC \quad (*)$$

c) Vẽ tại E, Chứng minh được là tia phân giác của
 Chứng minh được $AB = BI$

Chứng minh được: $\triangle ABK = \triangle BIK$ (c.c.c) $\Rightarrow \angle ABK = \angle BIK$

Từ đó suy ra BK là tia phân giác của $\angle ABC$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra tia BK, BO trùng nhau

Hay B, O, K là ba điểm thẳng hàng.

Câu 3. (HSG 7 huyện Tiên Phước 2018 - 2019)

Cho tam giác cân $ABC, AB = AC$. Trên tia đối của các tia BC, CB lấy theo thứ tự hai điểm D và E sao cho $BD = CE$.

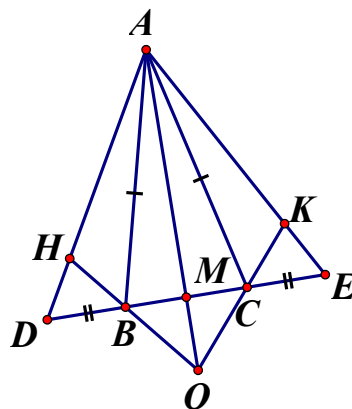
a) Chứng minh tam giác ADE là tam giác cân

b) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh AM là tia phân giác của $\angle DAE$

c) Từ B và C vẽ theo thứ tự vuông góc với AD, AE . Chứng minh $BH = CK$

d) Chứng minh 3 đường thẳng AM, BH, CK gặp nhau tại 1 điểm.

Lời giải



a) $\triangle ABC$ cân nên $\angle ABC = \angle ACB \Rightarrow \angle ABD = \angle ACE$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có: $AB = AC(gt)$; $\angle ABD = \angle ACE(cmt)$; $DB = CE(gt)$
 $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACE(c.g.c) \Rightarrow AD = AE \Rightarrow \triangle ADE$ cân tại A

b) Xét $\triangle AMD$ và $\triangle AME$ có:
 $MD = ME(DB = CE; MB = MC)$; AM chung; $AD = AE(cmt)$
 $\Rightarrow \triangle AMD = \triangle AME(c.c.c) \Rightarrow \angle MAD = \angle MAE$

Vậy AM là tia phân giác của $\angle DAE$

b) Vì $\triangle ADE$ cân tại A (cm câu a) nên $\angle ADE = \angle AED$

Xét $\triangle BHD$ và $\triangle CKE$ có: $\angle BDH = \angle CEK(do \angle ADE = \angle AED)$; $DB = CE(gt)$
 $\Rightarrow \triangle BHD = \triangle CKE(ch - gn) \Rightarrow BH = CK$

c) Gọi giao điểm của BH và CK là O

Xét $\triangle AHO$ và $\triangle AKO$ có: OA cạnh chung;
 $AH = AK(AD = AE, DH = KE(do \triangle BHD = \triangle CKE))$
 $\Rightarrow \triangle AHO = \triangle AKO(ch - cv)$

Do đó $\angle OAH = \angle OAK$ nên AO là tia phân giác của $\angle HAK$ hay AO là tia phân giác của $\angle DAE$,
 mặt khác theo câu b) AM là tia phân giác của $\angle DAE$

Do đó $AO \equiv AM$, suy ra ba đường thẳng AM, BH, CK cắt nhau tại O.

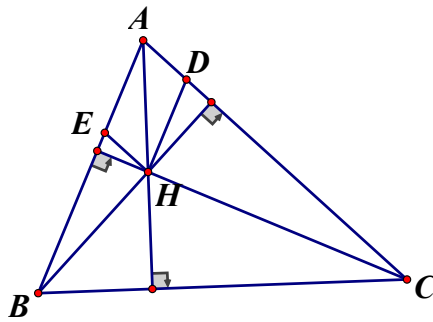
Dạng 4. Bất đẳng thức trong tam giác

Câu 1. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, tỉnh Bình Định 2018 - 2019)

Cho tam giác nhọn ABC , trực tâm H . Chứng minh rằng:

$$HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$$

Lời giải



Qua H kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại $D \Rightarrow CH \perp HD$

Đường thẳng song song với AC cắt AB tại $E \Rightarrow BH \perp HE$

Ta có $\triangle AHD = \triangle HAE (g.c.g) \Rightarrow AD = HE, AE = HD$.

Trong $\triangle AHD$ có $HA < HD + AD$ nên $HA < AE + AD$ (1)

Từ $BH \perp HE \Rightarrow \triangle HBE$ vuông cân nên $HB < BE$ (2)

Tương tự, ta có: $HC < DC$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có: $HA + HB + HC < AB + AC$ (4)

Tương tự: $HA + HB + HC < AB + BC$ (5) và $HA + HB + HC < AB + BC$ (6)

Từ (4), (5) và (6) suy ra $HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>