

CHỦ ĐỀ 5. TÍNH CHẤT TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC

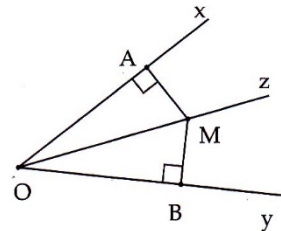
I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định lý thuận

Điểm nằm trên tia phân giác của một góc thì cách đều hai cạnh của góc đó.

2. Định lý đảo

Điểm nằm bên trong một góc và cách đều hai cạnh của góc thì nằm trên tia phân giác của góc đó.



II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Vận dụng tính chất phân giác của một góc để chứng minh các đoạn thẳng bằng nhau

Phương pháp giải: Áp dụng Định lý thuận.

1A. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 3\text{cm}$, $AC = 6\text{cm}$. Gọi E là trung điểm AC, tia phân giác của $\angle A$ cắt BC tại D.

a) Tính BC.

b) Chứng minh: $\triangle BAD = \triangle EAD$.

c) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của D trên AB, AC. Chứng minh điểm D cách đều AB và AC.

1B. Cho $\angle xOy$ khác 180° . Trên tia phân giác Ot của $\angle xOy$ lấy điểm M bất kì. Chứng minh điểm M cách đều Ox và Oy.

2A. Cho $\triangle ABC$ có $\angle A = 120^\circ$. Tia phân giác của A cắt BC tại D. Tia phân giác của $\angle ADC$ cắt AC tại I. Gọi H, K, E lần lượt là hình chiếu của I trên đường thẳng AB, BC, AD. Chứng minh:

a) AC là tia phân giác của $\angle BAH$.

b) $IH = IK$

2B. Cho $\triangle ABC$. Hai tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh B và đỉnh C cắt nhau tại I. Chứng minh điểm I cách đều hai cạnh AB, AC.

3A. Cho $\triangle ABC$ có trung tuyến AM đồng thời là đường phân giác. Trên tia AM lấy điểm D sao cho $MD = MA$. Chứng minh:

- a) $AB = CD$.
- b) $\triangle ACD$ cân tại C.
- c) Chứng minh $\triangle ABC$ cân tại A.

3B. Cho tam giác ABC vuông tại A. Từ một điểm K bất kì trên cạnh BC, vẽ $KH \perp AC$ ($H \in AC$). Trên tia đối của tia HK lấy điểm I sao cho $HI = HK$. Chứng minh:

- a) Chứng minh $AB \parallel HK$;
- b) Chứng minh $\angle KAH = \angle IAH$
- c) Chứng minh $\triangle AKI$ cân,

Dạng 2. Chứng minh một tia là tia phân giác của một góc

Phương pháp giải: Để chứng minh một tia là tia phân giác của một góc, ta có thể sử dụng các cách sau:

Cách 1. Áp dụng Định lí đảo.

Cách 2. Chứng minh hai góc bằng nhau dựa vào hai tam giác bằng nhau.

Cách 3. Đường trung tuyến trong tam giác cân đồng thời là đường phân giác.

4A. Cho $\angle xOy$ có tia phân giác Ot. Trên tia Ot lấy điểm C bất kì. Lấy

$A \in Ox$, $B \in Oy$ sao cho $OA = OB$. Gọi H là giao điểm của AB và Ot. Chứng minh:

- a) $CA = CB$ và CO là phân giác của $\angle ACB$;
- b) OC vuông góc với AB tại trung điểm của AB;
- c) Biết $AB = 6$ cm, $OA = 5$ cm. Tính OH

4B. Cho $\triangle ABC$, $AB = AC$. Trên cạnh AB lấy điểm D, trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AD = AE$. Gọi M là giao điểm của BE và CD. Chứng minh:

- a) $BE = CD$;

b) $\triangle BMD = \triangle CME$;

c) Đường vuông góc với OE tại E cắt Ox, Oy lần lượt tại M, N. Chứng minh $MN \parallel AC \parallel BD$.

5A. Cho $\angle xOy$. Lấy các điểm A, B thuộc tia Ox sao cho $OA > OB$. Lấy các điểm C, D thuộc Oy sao cho $OC = OA$, $OD = OB$. Gọi E là giao điểm của AD và BC. Chứng minh.:

a) $AD = BC$;

b) $\triangle ABE = \triangle CDE$;

c) OE là tia phân giác của góc xOy .

5B. Cho góc nhọn xOy . Trên cạnh Ox lấy điểm A và trên cạnh Oy lấy điểm B sao cho $OA = OB$. Đường vuông góc với Ox kẻ từ A cắt Oy tại điểm C. Đường vuông góc với Oy kẻ từ B cắt Ox tại D và cắt AC tại I. Đường vuông góc với Ox kẻ qua D cắt Oy tại E. Đường vuông góc với Oy kẻ qua C cắt Ox tại F và cắt DE tại J.

a) Chứng minh OI là tia phân giác $\angle xOy$.

b) Chứng minh $OC = OD$. Từ đó suy ra OJ là tia phân giác của $\angle xOy$

c) Chứng minh ba điểm O, I, J thẳng hàng.

6A. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Gọi M là trung điểm của BC. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A dựng tia $Mx \perp BC$. Trên tia Mx lấy E sao cho $ME = MB$.

a) Tam giác BEC là tam giác gì?

b) Gọi H và K là chân các đường vuông góc kẻ từ E đến các đường thẳng AB, AC. Chứng minh $\angle BEH = \angle CEK$.

c) Chứng minh rằng AE là tia phân giác của góc A

6B. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa A dựng $\triangle BCD$ vuông cân tại D. Hạ $DI \perp AB$, $DH \perp AC$.

Chứng minh AD là tia phân giác của $\angle A$

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

7. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\angle B = 60^\circ$. Trên cạnh BC lấy điểm H sao cho $HB = AB$. Đường thẳng vuông góc với BC tại H cắt AC tại D. Chứng minh:

- a) BD là tia phân giác của $\angle ABC$; b) $\triangle BDC$ cân.

8. Cho $\angle xOy$ khác góc bẹt.

a) Từ điểm M trên tia phân giác của $\angle xOy$, kẻ các đường vuông góc MA, MB đến hai cạnh Ox, Oy ($A \in Ox, B \in Oy$), OM cắt AB tại H. Chứng minh $AB \perp OM$.

b) Trên tia đối của tia Ox, Oy lần lượt lấy hai điểm C và D, sao cho $OC = OD$. Hai đường thẳng lần lượt vuông góc với Ox, Oy tại C và D cắt nhau ở E. Chứng minh ba điểm O, H, E thẳng hàng.

9. Cho hai góc nhọn $\angle xOy$ và $\angle zO't$ có các cạnh cắt nhau tạo thành hình ABCD như hình vẽ. Xét hình ABCD.

a) Chứng minh tổng bốn góc $A + B + C + D$ bằng 360° .

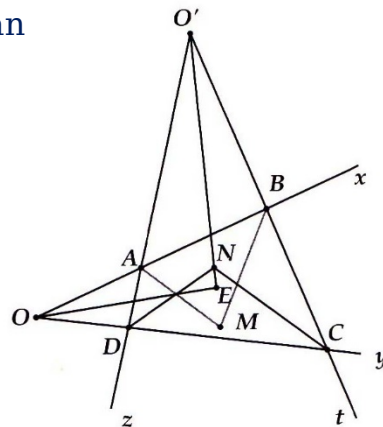
b) Cho biết $\angle A = 130^\circ, \angle B = 120^\circ, \angle C = 50^\circ$. Các tia phân giác của $\angle A, \angle B$ cắt nhau tại M, các tia phân

giác của $\angle D, \angle C$ cắt nhau tại N.

Tính $\angle AMB, \angle DNC$.

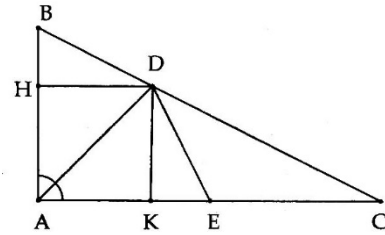
c) Chứng minh tia phân

giác của hai góc $\angle xOy$ và $\angle zO't$ vuông góc với nhau.



HƯỚNG DẪN

- 1A.** a) Áp dụng Định lý Pytago trong tam giác vuông ABC tính, được $BC = \sqrt{45}$ cm.
Vì E là trung điểm AC nên



$$AE = \frac{1}{2} AC = 3 \text{ cm} \Rightarrow AE = AB \\ \Rightarrow \triangle BAD = \triangle EAD \text{ (c.g.c).}$$

- c) Do $DH \perp AB$ nên DH là khoảng cách từ D đến AB.
Tương tự DK là khoảng cách từ D đến AC.
Suy ra $DH = DK$.

- 1B.** Hạ ME, MF lần lượt vuông góc với Ox, Oy ($E \in Ox, F \in Oy$). Chứng minh được $\triangle OME = \triangle OMF$ (ch-gn) $\Rightarrow ME = MF$. Vậy M cách đều hai cạnh Ox, Oy.

- 2A.** a) Vì $\angle BAC = 120^\circ$ nên $\angle AHC = 60^\circ$.

Do AD là phân giác $\angle BAC$ nên

$$\angle DAC = \frac{1}{2} \angle BAC = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \angle DAC = \angle AHC$$

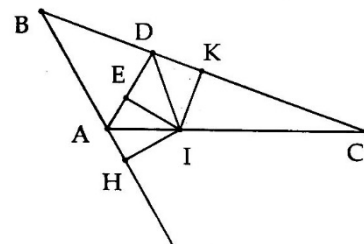
$\Rightarrow AC$ là phân giác $\angle AHC$.

- b) Khi đó $IE = IH$.

Mặt khác DI là phân giác

$\angle ADC$ nên $IE = IK$.

Vậy $IH = IK$.



- 2B.** Gọi E, F, P lần lượt là hình chiếu của I trên các đường thẳng AB, BC, CA.

Theo Định lý thuận ta có $IE = IF$ và $IF = IP \Rightarrow IE = IP$.

Vậy I cách đều hai cạnh AB, AC.

3A. a) Trên tia đối của tia MA lấy D sao cho $MA = MD$.

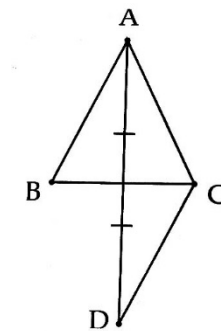
$$\Rightarrow \triangle MAB = \triangle MDC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow AB = CD$$

b) AM là phân giác $\angle BAC$ nên $\angle BAM = \angle CAM$

Lại có $\angle BAM = \angle DCM$ (hai góc tương ứng bằng nhau).

Do đó $\angle CAM = \angle DCM \Rightarrow \triangle CAD$ cân tại C $\Rightarrow CA = CD$.

c) Vậy $AB = AC \Rightarrow \triangle ABC$ cân tại A



3B. a) Ta có: $AB \perp AC$, $KH \perp AC$

$$\Rightarrow AB \parallel KH.$$

b) $\triangle AHK = \triangle AHI$ (ch-cgv)

$$\Rightarrow \angle KAH = \angle IAH.$$

c) $\triangle AKI$ có AH vừa là đường trung tuyến, vừa là đường phân giác nên $\triangle AKI$ cân tại A.

4A. a) Vì Ot là phân giác $\angle xOy$ nên $\angle AOC = \angle BOC$

$$\Rightarrow \triangle AOC = \triangle BOC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow CA = CB, \angle OCA = \angle OCB$$

$\Rightarrow CO$ là phân giác $\angle ACB$.

b) Chúng minh được: $\triangle OAH = \triangle OBH$ (c.g.c).

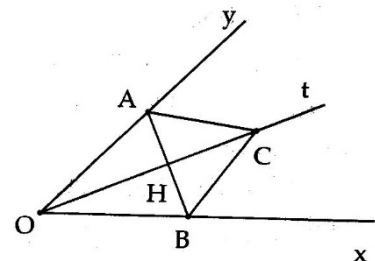
$$\Rightarrow \angle OAH = \angle OHB = 90^\circ, AH = BH.$$

Vậy OC vuông góc với AB tại trung điểm của AB.

c) Vì H là trung điểm của AB

$$\Rightarrow AH = \frac{1}{2} AB = 3 \text{ cm.}$$

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông OHA, tính được $OH = 4 \text{ cm}$.



4B. a) $\triangle ABE = \triangle ACD$ (c.g.c) $\Rightarrow BE = CD$.

b) Do $\triangle ABE = \triangle ACD \Rightarrow \angle ABE = \angle ACD \Rightarrow \angle BDC = \angle ECB$.

Mặt khác $AB = AC, AD = AE \Rightarrow BD = CE$.

Lại có: $\triangle ABE = \triangle ACD \Rightarrow \angle ABE = \angle ACD \Rightarrow \angle BBM = \angle ECM$
 $\Rightarrow \triangle BMD = \triangle CME$ (g.c.g).

c) Vì $\triangle BMD = \triangle CME \Rightarrow MD = ME \Rightarrow \triangle ADM = \triangle AEM$ (c.c.c).

$\Rightarrow \angle MAD = \angle MAE \Rightarrow AM$ là phân giác của $\angle BAC$.

5A. a) $\triangle OAD = \triangle OCB$ (c.g.c) $\Rightarrow AD = CB$.

b) Do $OA = OC, OB = OD \Rightarrow AB = CD$.

Lại có $\triangle OAD = \triangle OCB$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle OBC = \angle ODA \Rightarrow \angle ABE = \angle CDE$

Mà $\angle BAD = \angle CDB$. Vậy $\triangle ABE = \triangle CDE$ (g.c.g)

c) Vì $\triangle ABE = \triangle CDE$ (g.c. g) $\Rightarrow \angle BOE = \angle DOE$

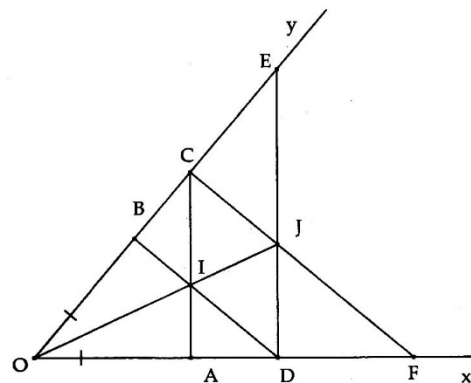
$\Rightarrow OE$ là tia phân giác của góc xOy .

Tam giác AOC và BOD đều

cân ở O nên $OE \perp BD$

và $OE \perp AC$. Suy ra

$AC \parallel MN \parallel BD$.



5B. a) b) Tương tự **5A.**

c) Vì OI, OJ cùng là phân giác

của $\angle xOy$ nên ba điểm O, I, J

thẳng hàng.

6A. a) $\triangle BEC$ có trung tuyến

$ME = \frac{1}{2} BC \Rightarrow \triangle BEC$ vuông tại E . Mặt khác



7. Đường tuy gần không đi sẽ không đến-Việc tuy nhỏ không làm sẽ không nên

$\triangle BME$ vuông cân tại M nên $\widehat{MBE} = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle BEC$ vuông cân tại E.

b) Từ ý (a) suy ra $BE = CE$. (1)

$AB \perp AC, EK \perp AC \Rightarrow AB \parallel EK$.

Mà $EH \perp AB$ nên $EH \perp EK \Rightarrow \widehat{HEK} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{HEB} = \widehat{KEC}$ (cùng phụ $\widehat{HEK}$). (2)

c) Từ (1) và (2) suy ra $\triangle BHE = \triangle CKE$ (Ch-gn)

$\Rightarrow EH = EK$.

Chúng minh được $\triangle AHE = \triangle AKE \Rightarrow \widehat{HAE} = \widehat{KAE}$. Vậy AE là tia phân giác của góc A.

6B. Tương tự **6A**.

Chúng minh được $\triangle BID = \triangle CHD \Rightarrow DI = DH$.

Suy ra $\triangle ADI = \triangle ADH \Rightarrow \widehat{DAI} = \widehat{DAH}$

Vậy AD là tia phân giác của $\widehat{A}$

7. a) Chúng minh được $\triangle ABD$ và $\triangle HBD$

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle HBD \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{HBD}$

$\Rightarrow BD$ là tia phân giác của $\widehat{ABC}$

b) $\widehat{BDH} = \frac{1}{2} \widehat{ABC} = 30^\circ, \widehat{DCB} = 90^\circ - \widehat{ABC} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

$\Rightarrow \widehat{DBH} = \widehat{DCB} \Rightarrow \triangle DBC$ cân tại D.

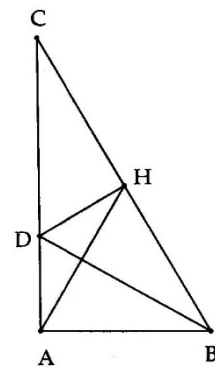
8. Tương tự **4A**.

a) Ta có $MA = MB$ suy ra $\triangle OAM = \triangle OBM \Rightarrow OA = OB$.

Do đó $\triangle OAH = \triangle OBH$ nên $\widehat{OHA} = \widehat{OHB} = 90^\circ$.

Vậy $AB \perp OM$ tại H.

b) $\triangle OCE = \triangle ODE \Rightarrow \widehat{EOC} = \widehat{EOD}$. Vậy E thuộc đường thẳng chứa tia phân giác của $\widehat{Oxy}$.



9. a) $\triangle ABD$ có tổng các góc là 180° . Tương tự, $\triangle DBC$ có tổng các góc là 180° . Cộng lại ta được ĐPCM.

b) Sử dụng kết quả của ý a) suy ra $\hat{D} = 60^\circ$.

$\triangle AMB$ có $\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = 125^\circ$ nên

$$\hat{AMB} = 55^\circ.$$

Tương tự $\hat{BNC} = 125^\circ$.

c) Gọi I là giao điểm tia phân giác

góc $\hat{xOy}$ với AD và E là giao điểm

của hai tia phân giác góc $\hat{xOy}$ và

$\hat{zO't}$. Ta có:

$$\hat{EO'E} = \frac{1}{2} \hat{zO't} = \frac{1}{2} (180^\circ - \hat{D} - \hat{C}) = 35^\circ.$$

$$\hat{EOA} = \frac{1}{2} \hat{xOy} = \frac{1}{2} (180^\circ - \hat{B} - \hat{C}) = 5^\circ.$$

$$\hat{OAI} = 180^\circ - \hat{A} = 50^\circ$$

$$\text{Suy ra } \hat{AIE} = \hat{EOA} + \hat{OAI} = 55^\circ$$

$$\text{Vậy } \hat{O'EI} = 180^\circ - (35^\circ + 55^\circ) = 90^\circ$$

