

DẠNG 3**Các phép toán số phức**

- Câu 1:** Cho số phức $z = 1 + 2i$. Tìm tổng phần thực và phần ảo của số phức $w = 2z + \bar{z}$.
A. 3. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 2.
- Câu 2:** Trên tập số phức, cho biểu thức $A = (a - bi)(1 - i)$ (a, b là số thực). Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $A = a + b - (a + b)i$. **B.** $A = -a + b + (b - a)i$.
C. $A = a - b - (a - b)i$. **D.** $A = a - b - (a + b)i$.
- Câu 3:** Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của $|z_1|^2 + |z_2|^2$ bằng
A. 6. **B.** 10. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** 4.
- Câu 4:** Tìm các số thực x, y thỏa mãn $2x - 1 + (y - 2)i = 1 + i$ với i là đơn vị ảo.
A. $x = 1; y = 1$. **B.** $x = 1; y = 2$. **C.** $x = 1; y = 3$. **D.** $x = -1; y = 3$.
- Câu 5:** Tìm số phức z biết $4z + 5\bar{z} = 27 - 7i$.
A. $z = -3 + 7i$. **B.** $z = -3 - 7i$. **C.** $z = 3 - 7i$. **D.** $z = 3 + 7i$.
- Câu 6:** Cho số phức $z = \frac{3i}{3+i} - i$. Môđun của số phức $\bar{z}$ là
A. $\frac{\sqrt{370}}{10}$. **B.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $-\frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$.
- Câu 7:** Cho $z_1 = 2 + 4i, z_2 = 3 - 5i$. Xác định phần thực của $w = z_1 \cdot z_2^{-2}$
A. -120. **B.** -32. **C.** 88. **D.** -152.
- Câu 8:** Cho các số thực x, y thỏa mãn $4(3i - 2) = 4x + 2yi$. Tính giá trị của $P = x + y$.
A. $P = 4$. **B.** $P = 7$. **C.** $P = -1$. **D.** $P = 8$.
- Câu 9:** Cho $w = \frac{z^2 - (\bar{z})^2}{1 + z \cdot \bar{z}}$ với z là số phức tùy ý cho trước với phần thực và phần ảo khác 0. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
A. w là số ảo. **B.** $w = -1$. **C.** $w = 1$. **D.** w là số thực.
- Câu 10:** Các số thực x, y thỏa mãn đẳng thức $x(3 + 5i) - y(1 + 2i) = 9 + 16i$ trong đó $i^2 = -1$. Giá trị của biểu thức $T = |x - y|$ là
A. 3. **B.** 5. **C.** 0. **D.** 1.
- Câu 11:** Biết phương trình $z^2 + bz + c = 0$ ($b, c \in \mathbb{R}$) có một nghiệm phức là $z_1 = 1 + 2i$. Khi đó.
A. $b + c = 2$. **B.** $b + c = 3$. **C.** $b + c = 1$. **D.** $b + c = 7$.
- Câu 12:** Cho ba số phức $z_1; z_2; z_3$ thỏa mãn $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ |z_1| = |z_2| = |z_3| = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$. Tính

$$A = |z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2$$

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

B. $2\sqrt{2}$.

C. $\frac{8}{3}$.

D. $\frac{3}{8}$.

Câu 13: Kí hiệu $z_1; z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2 - z + 1 = 0$. Tính $P = |z_1| + |z_2|$.

A. $P = \frac{\sqrt{14}}{3}$.

B. $P = \frac{2}{3}$.

C. $P = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $P = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 14: Cho số phức z thỏa mãn phương trình $(3 + 2i)z + (2 - i)^2 = 4 + i$. Tìm tọa độ điểm M biểu diễn số phức z .

A. $M(-1; 1)$.

B. $M(-1; -1)$.

C. $M(1; 1)$.

D. $M(1; -1)$.

Câu 15: Tìm số phức z thỏa mãn $z + (2 + i)\bar{z} = 3 - 5i$.

A. $z = 2 + 3i$.

B. $z = -2 + 3i$.

C. $z = 2 - 3i$.

D. $z = -2 - 3i$.

Câu 16: Cho số phức $z = (1 + i)^2(1 + 2i)$. Số phức z có phần ảo là

A. $2i$.

B. 4 .

C. 2 .

D. -4 .

Câu 17: Cho số phức $z \neq 1$ thỏa mãn $z^3 = 1$. Tính $(1 - z + z^{2018})(1 + z - z^{2018})$.

A. 1 .

B. Đáp số khác.

C. 4 .

D. 2 .

Câu 18: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + i\sqrt{5}| + |z - i\sqrt{5}| = 6$, biết z có môđun bằng $\sqrt{5}$?

A. 3 .

B. 4 .

C. 2 .

D. 0 .

Câu 19: Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z + w| = \sqrt{17}$, $|z + 2w| = \sqrt{58}$ và $|z - 2w| = 5\sqrt{2}$. Giá trị của biểu thức $P = \bar{z}.w + z.\bar{w}$ bằng

A. 1 .

B. 2 .

C. 4 .

D. 3 .

Câu 20: Tính tổng phần thực của tất cả các số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $\left(z + \frac{5}{|z|}\right)i = 7 - z$.

A. 2 .

B. -2 .

C. -3 .

D. 3 .

Câu 21: Cho hai số phức z_1, z_2 khác 0 thỏa mãn $\frac{z_1}{z_2}$ là số thuần ảo và $|z_1 - z_2| = 10$. Giá trị lớn nhất của

$|z_1| + |z_2|$ bằng

A. 10 .

B. $10\sqrt{2}$.

C. $10\sqrt{3}$.

D. 20 .

Câu 22: Cho các số phức z thỏa mãn $|2iz - 2i^{2021}| = |3\bar{z} - 1|$ và $|\bar{z}| = 1$. Điểm biểu diễn cho số phức z có hoành độ bằng

A. -4 .

B. 4 .

C. -1 .

D. 1 .

Câu 23: Tìm số phức z thỏa mãn $z + 2 - 3i = 2\bar{z}$.

A. $z = 2 + i$.

B. $z = 2 - i$.

C. $z = 3 - 2i$.

D. $z = 3 + i$.

Câu 24: Môđun của số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 5$ và $17(z + \bar{z}) - 5z.\bar{z} = 0$ bằng

A. $\sqrt{53}$. B. $\sqrt{34}$. C. $\sqrt{29}$ và $\sqrt{13}$. D. $\sqrt{29}$.

Câu 25: Cho số phức u, v thỏa mãn: $|u| = |v| = 10$ và $|3u - 4v| = \sqrt{2019}$. Ta có $|4u + 3v|$ là

A. $\sqrt{2890}$. B. $\sqrt{2981}$. C. $\sqrt{2891}$. D. $\sqrt{2982}$.

Câu 26: Cho khai triển $(\sqrt{3} + x)^{2019} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{2019}x^{2019}$. Hãy tính tổng

$$S = a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \dots + a_{2016} - a_{2018}.$$

A. 0. B. 2^{2019} . C. $(\sqrt{3})^{1009}$. D. 2^{1009} .

Câu 27: Biết rằng $a; b$ là các số thực thỏa mãn $a + bi = (1 + \sqrt{3}i)^{2017}$. Giá trị của $a + b$ bằng:

A. $(1 + \sqrt{3}) \cdot 8^{672}$. B. $(1 + \sqrt{3}) \cdot 8^{671}$. C. $(\sqrt{3} - 1) \cdot 8^{672}$. D. $(\sqrt{3} - 1) \cdot 8^{671}$.

Câu 28: Cho số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 4$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $P = |z - 2 - 2i|$. Đặt $A = M + n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $A \in [4; 3\sqrt{3})$. B. $A \in (\sqrt{34}; 6)$. C. $A \in (2\sqrt{7}; \sqrt{33})$. D. $A \in (6; \sqrt{42})$.

Câu 29: Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 6$ và $|z_2| = 2$. Gọi M, N lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức z_1 và iz_2 . Biết $\angle MON = 60^\circ$. Tính $T = |z_1^2 + 9z_2^2|$.

A. $T = 36\sqrt{2}$. B. $T = 36\sqrt{3}$. C. $24\sqrt{3}$. D. 18.

Câu 30: Xét các số phức z thỏa mãn $(2 - z)(\bar{z} + i)$ là số thuần ảo. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ là

A. Đường tròn có tâm $I\left(1; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

B. Đường tròn có tâm $I\left(1; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$ nhưng bỏ đi hai điểm $A(2; 0)$, $B(0; 1)$.

C. Đường tròn có tâm $I\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

D. Đường tròn có tâm $I(2; 1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

Câu 31: Cho số phức z thỏa mãn $(3 + i)|z| = \frac{-2 + 14i}{z} + 1 - 3i$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\frac{3}{2} < |z| < 2$. B. $\frac{13}{4} < |z| < 4$. C. $\frac{7}{4} < |z| < \frac{11}{5}$. D. $1 < |z| < \frac{3}{2}$.

Câu 32: Cho các số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = \sqrt{3}$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Môđun $|z_1 + z_2|$ bằng

A. 2. B. 3. C. $\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{2}$.

Câu 33: Gọi S là tập hợp tất cả các số phức z có phần thực và phần ảo là các số nguyên thỏa mãn hai điều kiện: $|z - 3 - 4i| \leq 2$ và $|z + \bar{z}| \leq |z - \bar{z}|$. Số phần tử của tập S là

A. 11. B. 12. C. 13. D. 10.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.D	3.B	4.C	5.D	6.B	7.D	8.A	9.A	10.B
11.B	12.C	13.D	14.C	15.C	16.C	17.C	18.B	19.B	20.D
21.B	22.C	23.A	24.B	25.B	26.A	27.A	28.B	29.B	30.A
31.C	32.D	33.D							

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn B

Ta có $z = 1 + 2i \Rightarrow \bar{z} = 1 - 2i$, khi đó $w = 2z + \bar{z} = 2(1 + 2i) + (1 - 2i) = 3 + 2i$.

Phần thực của số phức w là 3, phần ảo của số phức w là 2.

$\Rightarrow$ Tổng phần thực và phần ảo là: $3 + 2 = 5$.

Câu 2: Chọn D

$$A = (a - bi)(1 - i) = a - ai - bi + bi^2 = (a - b) - (a + b)i.$$

Câu 3: Chọn B

$$\text{Ta có } z^2 - 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 2 + i \\ z_2 = 2 - i \end{cases} \text{ nên } |z_1|^2 + |z_2|^2 = 10.$$

Câu 4: Chọn C

$$\text{Ta có } 2x - 1 + (y - 2)i = 1 + i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 1 \\ y - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Câu 5: Chọn D

Giả sử $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), khi đó $4(a + bi) + 5(a - bi) = 27 - 7i \Leftrightarrow 9a - bi = 27 - 7i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9a = 27 \\ -b = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 7 \end{cases} \Rightarrow z = 3 + 7i.$$

Câu 6: Chọn B

$$\text{Ta có: } z = \frac{3i}{3+i} - i \Leftrightarrow z = \frac{1}{3+i} = \frac{3-i}{10} \Rightarrow \bar{z} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i \Rightarrow |\bar{z}| = \sqrt{\frac{9}{100} + \frac{1}{100}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Câu 7: Chọn D

$$\text{Ta có } \bar{z_2} = 3 + 5i \Rightarrow \bar{z_2}^2 = -16 + 30i \Rightarrow w = z_1 \cdot \bar{z_2}^2 = (2 + 4i)(-16 + 30i) = -152 - 4i.$$

Vậy phần thực của w là -152 .

Câu 8: Chọn A

$$\text{Ta có } 4(3i - 2) = 4x + 2yi \Leftrightarrow -8 + 12i = 4x + 2yi \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = -8 \\ 2y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow P = x + y = 4.$$

Câu 9: Chọn A

$$\text{Gọi số phức } z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = x - yi.$$

$$\text{Ta có: } w = \frac{z^2 - (\bar{z})^2}{1 + z\bar{z}} = \frac{(x+yi)^2 - (x-yi)^2}{1+x^2+y^2} = \frac{x^2+2xyi-y^2-x^2+2xyi+y^2}{1+x^2+y^2} = \frac{4xy}{1+x^2+y^2}i.$$

Vậy w là số ảo.

Câu 10: Chọn B

$$\text{Ta có } x(3+5i) - y(1+2i) = 9+16i \Leftrightarrow (3x-y-9) + (5x-2y-16)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y-9=0 \\ 5x-2y-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}. \text{ Suy ra } T = |x-y| = 5.$$

Câu 11: Chọn B

Vì phương trình $z^2 + bz + c = 0$ nhận $z_1 = 1+2i$ là nghiệm nên ta có:

$$(1+2i)^2 + b(1+2i) + c = 0 \Leftrightarrow -3 + 4i + b + 2bi + c = 0$$

$$\Leftrightarrow (b+c-3) + (2b+4)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b+c-3=0 \\ 2b+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c=3 \\ b=-2 \end{cases}$$

Câu 12: Chọn C

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = -z_3 \\ z_1 + z_3 = -z_2 \\ z_3 + z_2 = -z_1 \end{cases}$$

$$A = |z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 = |-z_1|^2 + |-z_2|^2 + |-z_3|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 3 \cdot \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{8}{3}.$$

Câu 13: Chọn D

Cách 1:

$$\text{Ta có } 3z^2 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 - \frac{1}{3}z + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \left(z - \frac{1}{6}\right)^2 = -\frac{11}{36}$$

$$\Leftrightarrow \left(z - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}i^2 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{11}}{6}i \\ z = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{11}}{6}i \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } P = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Cách 2:

Theo tính chất phương trình bậc 2 với hệ số thực, ta có $z_1; z_2$ là hai số phức liên hợp nên

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|^2 = |z_2|^2. \text{ Mà } z_1 \cdot z_2 = \frac{1}{3} \text{ suy ra } |z_1| = |z_2| = \frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ Vậy } P = |z_1| + |z_2| = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 14: Chọn C

$$\text{Ta có phương trình: } (3+2i)z + (2-i)^2 = 4+i \Leftrightarrow (3+2i)z = -(2-i)^2 + 4+i$$

$$\Leftrightarrow (3+2i)z = 1+5i \Leftrightarrow z = \frac{1+5i}{3+2i} \Leftrightarrow z = 1+i.$$

Vậy điểm M biểu diễn số phức z có tọa độ là $M(1;1)$.

Câu 15: Chọn C

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), theo đề bài ta có:

$$a + bi + (2 + i)(a - bi) = 3 + 5i \Leftrightarrow a + bi + 2a + b + ai - 2bi = 3 + 5i$$

$$\Leftrightarrow 3a + b + ai - bi = 3 + 5i \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = 3 \\ a - b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}. \text{ Vậy } z = 2 - 3i.$$

Câu 16: Chọn C

$$\text{Ta có } z = (1 + i)^2 (1 + 2i) = 2i(1 + 2i) = -4 + 2i.$$

Do đó phần ảo của z là 2.

Câu 17: Chọn C

$$\text{Ta có: } z^3 = 1 \Rightarrow z^{2018} = (z^3)^{672} \cdot z^2 = z^2$$

$$z^3 = 1 \Leftrightarrow (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0, \text{ mà } z \neq 1 \text{ nên } z^2 + z + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó, } (1 - z + z^{2018})(1 + z - z^{2018}) &= (1 - z + z^2)(1 + z - z^2) \\ &= (1 + z + z^2 - 2z)(1 + z + z^2 - 2z^2) = -2z \cdot (-2z^2) = 4z^3 = 4. \end{aligned}$$

Câu 18: Chọn B

Gọi $z = a + bi$ với $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$. Ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} |z + i\sqrt{5}| + |z - i\sqrt{5}| = 6 \\ |z| = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a + (b + \sqrt{5})i| + |a + (b - \sqrt{5})i| = 6 \\ |a + bi| = \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + (b + \sqrt{5})^2} + \sqrt{a^2 + (b - \sqrt{5})^2} = 6 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2 + 2\sqrt{5}b + 5} + \sqrt{a^2 + b^2 - 2\sqrt{5}b + 5} = 6 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}b} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}b} = 6 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases},$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20 + 2\sqrt{100 - 20b^2} = 36 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{100 - 20b^2} = 8 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 100 - 20b^2 = 64 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = \frac{16}{5} \\ b^2 = \frac{9}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ a = -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ b = \frac{3}{\sqrt{5}} \\ b = -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ b = \frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases} \vee \begin{cases} a = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ b = -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases} \vee \begin{cases} a = -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ b = \frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases} \vee \begin{cases} a = -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ b = -\frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases}.$$

Kết hợp với điều kiện ta có bốn số phức cần tìm là: $z = \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}}i$, $z = \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}}i$,
 $z = -\frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}}i$, $z = -\frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}}i$.

Câu 19: Chọn B

Ta có $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, $\overline{az_1 + bz_2} = a\bar{z}_1 + b\bar{z}_2$ nên

$$|z + 2w| = \sqrt{58} \Leftrightarrow |z + 2w|^2 = 58 \Leftrightarrow (z + 2w)(\bar{z} + 2\bar{w}) = 58$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 + 2\bar{z} \cdot w + 2z \cdot \bar{w} + 4|w|^2 = 58 \Leftrightarrow |z|^2 + 2P + 4|w|^2 = 58.$$

$$\text{Tương tự } |z - 2w| = 5\sqrt{2} \Leftrightarrow |z|^2 - 2P + 4|w|^2 = 50.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} |z|^2 + 2P + 4|w|^2 = 58 \\ |z|^2 - 2P + 4|w|^2 = 50 \end{cases} \Rightarrow 4P = 8 \Rightarrow P = 2.$$

Câu 20: Chọn D

Ta có: $\left(z + \frac{5}{|z|}\right)i = 7 - z$. Chia hai vế cho i ta được: $z + \frac{5}{|z|} = -7i + zi$.

$$\text{Hay } z(1-i) = -7i - \frac{5}{|z|} \Rightarrow |z(1-i)| = \left|-7i - \frac{5}{|z|}\right| \Leftrightarrow \sqrt{2}|z| = \sqrt{49 + \frac{25}{(|z|)^2}}$$

$$\text{Bình phương 2 vế, ta được: } 2|z|^2 = 49 + \frac{25}{|z|^2} \Rightarrow 2|z|^4 - 49|z|^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = 25 \quad (\text{t/m}) \\ |z|^2 = -\frac{1}{2} \quad (\text{kt/m}) \end{cases}.$$

Do $|z| > 0$ nên $|z| = 5$. Thế $|z| = 5$ vào đề bài ta được: $\left(z + \frac{5}{5}\right)i = 7 - z \Leftrightarrow (z+1)i = 7 - z$.

Đặt $z = x + yi$, với $x, y \in \mathbb{R}$.

Thế vào ta được: $(x + yi + 1)i = 7 - x - yi \Leftrightarrow -y + (x+1)i = 7 - x - yi$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y = 7 - x \\ x + 1 = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 7 \\ x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \end{cases}.$$

Dễ thấy số phức $3 - 4i$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy tổng phần thực của các số phức cần tìm là 3.

Câu 21: Chọn B

Cách 1:

Vì $\frac{z_1}{z_2}$ là số thuần ảo nên $\frac{z_1}{z_2} = ai \Leftrightarrow z_1 = aiz_2$.

$$\text{Ta có } |z_1 - z_2| = 10 \Leftrightarrow |aiz_2 - z_2| = 10 \Leftrightarrow |z_2||ai - 1| = 10 \Leftrightarrow |z_2|\sqrt{1+a^2} = 10 \Leftrightarrow |z_2| = \frac{10}{\sqrt{1+a^2}}.$$

$$\text{Từ } z_1 = aiz_2 \Rightarrow |z_1| = |aiz_2| = \frac{10|a|}{\sqrt{1+a^2}}.$$

$$\text{Do đó } |z_1| + |z_2| = \frac{10|a|}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{10}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{10(1+|a|)}{\sqrt{1+a^2}} \leq \frac{10\sqrt{(1+1)(1+a^2)}}{\sqrt{1+a^2}} \leq 10\sqrt{2}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow a = \pm 1 \Leftrightarrow z_1 = \pm iz_2. \text{ Vậy } \max(|z_1| + |z_2|) = 10\sqrt{2}.$$

Cách 2:

Đặt $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$. Gọi A , B lần lượt là điểm biểu diễn của z_1 , z_2 .

$$\Rightarrow A(a_1; b_1), B(a_2; b_2) \Rightarrow \overline{OA}(a_1; b_1), \overline{OB}(a_2; b_2).$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{|z_2|^2} \text{ là số thuần ảo } \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0 \Leftrightarrow \Delta OAB \text{ vuông}$$

tại O .

$$|z_1 - z_2| = AB = 10.$$

$$|z_1| + |z_2| = OA + OB \leq \sqrt{(OA^2 + OB^2) \cdot (1^2 + 1^2)} = \sqrt{2AB^2} = 10\sqrt{2}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow OA = OB. \text{ Vậy } \max(|z_1| + |z_2|) = 10\sqrt{2}.$$

Câu 22: Chọn C

Giả sử $z = a + bi$ ($a; b \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có } |2iz - 2i^{2021}| = |3\bar{z} - 1| \Leftrightarrow |2i(a + bi) - 2(i^2)^{1010}i| = |3(a - bi) - 1|$$

$$\Leftrightarrow |(2a - 2)i - 2b| = |(3a - 1) - 3bi| \Leftrightarrow \sqrt{(2a - 2)^2 + 4b^2} = \sqrt{(3a - 1)^2 + 9b^2}$$

$$\Leftrightarrow 5(a^2 + b^2) + 2a - 3 = 0 \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác: } |\bar{z}| = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 \quad (2). \text{ Thay vào được } 5 \cdot 1 + 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = -1.$$

Câu 23: Chọn A

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), suy ra $\bar{z} = x - yi$.

$$\text{Ta có } z + 2 - 3i = 2\bar{z} \Leftrightarrow (x + 2) + (y - 3)i = 2x - 2yi.$$

$$\text{Đồng nhất hệ số ta có } \begin{cases} x + 2 = 2x \\ y - 3 = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}. \text{ Vậy số phức } z = 2 + i.$$

Câu 24: Chọn B

Đặt $z = a + bi$ ($a; b \in \mathbb{R}$)

$$\text{Ta có } \begin{cases} |z - 1| = 5 \\ 17(z + \bar{z}) - 5z \cdot \bar{z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 1)^2 + b^2 = 25 \\ 17.2a - 5(a^2 + b^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a^2 + b^2) - 2a - 24 = 0 \\ 17.2a - 5(a^2 + b^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5[(a^2 + b^2) - 2a - 24] = 0 \\ 17.2a - 5(a^2 + b^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 34a + 5(-2a - 24) = 0 \\ 5(a^2 + b^2) = 17.2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ a^2 + b^2 = 34 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{34}.$$

Câu 25: Chọn B

$$\text{Ta có } |3u - 4v| = \sqrt{2019} \Leftrightarrow |3u - 4v|^2 = 2019 \Leftrightarrow (3u - 4v)(\overline{3u - 4v}) = 2019$$

$$\Leftrightarrow (3u - 4v)(3\bar{u} - 4\bar{v}) = 2019 \Leftrightarrow 9(\bar{u})^2 - 12(u\bar{v} + \bar{u}v) + 16(\bar{v})^2 = 2019. \text{ Suy ra } u\bar{v} + \bar{u}v = \frac{481}{12}.$$

Tương tự như trên ta có

$$|4u + 3v|^2 = (4u + 3v)(\overline{4u + 3v}) = (4u + 3v)(4\bar{u} + 3\bar{v}) = 16(\bar{u})^2 + 12(u\bar{v} + \bar{u}v) + 9(\bar{v})^2 = 2981.$$

$$\text{Do đó: } |4u + 3v| = \sqrt{2981}.$$

Câu 26: Chọn A

Với mọi $k \in \mathbb{N}$, ta có:

$$i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i \text{ và } (-i)^{4k} = 1, (-i)^{4k+1} = -i, (-i)^{4k+2} = -1, (-i)^{4k+3} = i$$

$$\text{Xét khai triển } (\sqrt{3} + x)^{2019} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{2019}x^{2019}$$

$$\text{Thay } x = i \text{ ta được: } (\sqrt{3} + i)^{2019} = a_0 + a_1i - a_2 - a_3i + a_4 + a_5i - a_6 - \dots - a_{2018} - a_{2019}i$$

$$= (a_0 - a_2 + a_4 - \dots - a_{2018}) + (a_1 - a_3 + a_5 - \dots - a_{2019})i$$

$$\text{Mà } (\sqrt{3} + i)^{2019} = 2^{2019} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^{2019} = 2^{2019} \cos \frac{2019\pi}{6} + i \sin \frac{2019\pi}{6} = 0 + i$$

$$\text{Suy ra } a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \dots - a_{2018} = 0$$

Câu 27: Chọn A

$$\text{Ta có: } 1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\Rightarrow (1 + \sqrt{3}i)^{2017} = 2^{2017} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{2017} = 2^{2017} \left(\cos \frac{2017\pi}{3} + i \sin \frac{2017\pi}{3} \right)$$

$$= 2^{2016} \cdot 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 8^{672} (1 + \sqrt{3}i) = 8^{672} + 8^{672} \sqrt{3}i \Rightarrow \begin{cases} a = 8^{672} \\ b = 8^{672} \sqrt{3} \end{cases}$$

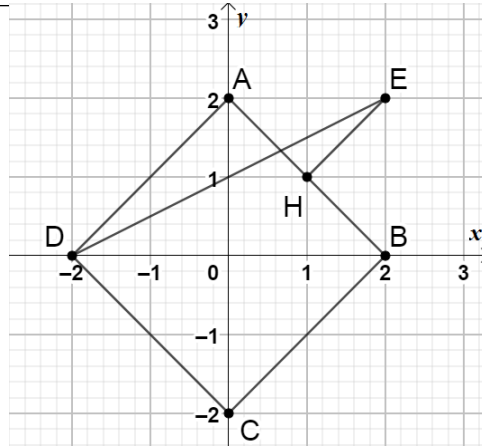
$$\Rightarrow a + b = (1 + \sqrt{3})8^{672}.$$

Câu 28: Chọn B

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Khi đó

$$|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 4 \Leftrightarrow 2|x| + 2|y| = 4 \Leftrightarrow |x| + |y| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \text{ khi } x \geq 0, y \geq 0 \\ x + y = -2 \text{ khi } x \leq 0, y \leq 0 \\ x - y = 2 \text{ khi } x \geq 0, y \leq 0 \\ -x + y = 2 \text{ khi } x \leq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Hình biểu diễn hệ nói trên là hình vuông $ABCD$ như trong hình vẽ

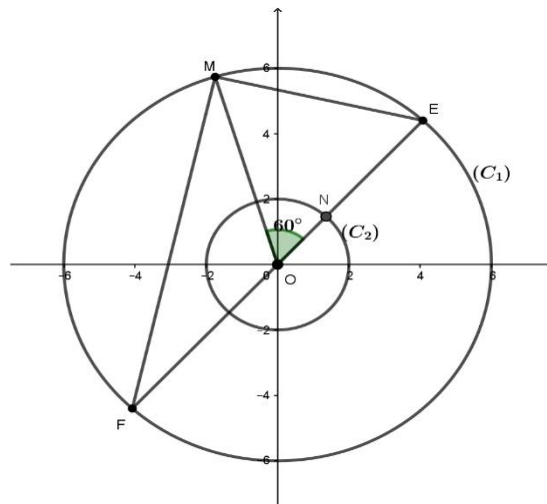


Khi đó $P = |z - 2 - 2i| = EM$ với $E(2; 2)$ và $M(x; y)$.

Dễ thấy $m = \min P = d(E; AB) = EH = \sqrt{2}$; $M = \max P = ED = \sqrt{20}$.

Do đó $M + m = \sqrt{2} + \sqrt{20} \in (\sqrt{34}; 6)$.

Câu 29: Chọn B



Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn các số phức z_1 và iz_2 , gọi E, F lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $3iz_2$ và $-3iz_2$.

Theo bài ra ta có:

$|z_1| = 6$ nên tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O , bán kính $R = 6$, gọi là đường tròn (C_1) ; $|z_2| = 2 \Rightarrow |iz_2| = |i| \cdot |z_2| = 2$ do đó tập hợp các điểm N biểu diễn số phức iz_2 thuộc đường tròn tâm O , bán kính $r = 2$, gọi là đường tròn (C_2) .

Lại thấy: $|3iz_2| = 6$ và $|-3iz_2| = 6$ suy ra các điểm E, F thuộc đường tròn (C_1) .

Hơn nữa: $3iz_2$ và $-3iz_2$ là các số phức đối nên EF là một đường kính của (C_1) .

Mặt khác: $\overrightarrow{OE} = 3\overrightarrow{ON}$ nên N nằm giữa O và $E \Rightarrow \angle MOE = 60^\circ$, suy ra tam giác MOE là tam giác đều cạnh bằng 6 và tam giác MEF vuông tại M .

Khi đó: $T = |z_1^2 + 9z_2^2| = |z_1^2 - (3iz_2)^2| = |z_1 - 3iz_2| \cdot |z_1 + 3iz_2| = ME \cdot MF$.

Nhận thấy: $ME.MF = 2.S_{\Delta MEF} = 4.S_{\Delta MOE} = 4 \cdot \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$. Vậy $T = 36\sqrt{3}$.

Câu 30: Chọn A

Gọi $z = x + yi$, ($x; y \in \mathbb{R}$).

Ta có $(2 - z)(\bar{z} + i) = (2 - x - yi)(x - yi + i) = -x^2 - y^2 + 2x + y - (x + 2y - 2)i$.

Các số phức z thỏa mãn $(2 - z)(\bar{z} + i)$ là số thuần ảo khi $-x^2 - y^2 + 2x + y = 0$

Hay $(x - 1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

Suy ra tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ là đường tròn có tâm

$I\left(1; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 31: Chọn C

Phân tích: Nếu đặt $z = x + yi$ ($x; y \in \mathbb{R}$) thì thấy khối lượng tính toán lớn và đi đến một phương trình rất phức tạp. Nghĩ đến phép lấy mô đun hai vế của một biểu thức số phức là phép suy ra.

Ta có: $(3 + i)|z| = \frac{-2 + 14i}{z} + 1 - 3i$ ($z \neq 0$) $\Leftrightarrow z((3|z| - 1) + (3 + |z|)i) = -2 + 14i$.

Sau khi lấy mô đun hai vế ta được một phương trình theo ẩn $|z| > 0$.

$|z| \cdot |(3|z| - 1) + (3 + |z|)i| = |-2 + 14i| \Leftrightarrow |z| \cdot \sqrt{(3|z| - 1)^2 + (3 + |z|)^2} = 10\sqrt{2}$.

$|z|^4 + |z|^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = 4 \\ |z|^2 = -5 \text{ (L)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 2 \\ |z| = -2 \text{ (L)} \end{cases}$.

Thử lại $|z| = 2$ ta được $z = \frac{6}{5} + \frac{8}{5}i$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 32: Chọn D

Cách 1:

Gọi các số phức $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ ($a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$).

Ta có: $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$; $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

Ta có: $|z_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{3} \Rightarrow a_1^2 + b_1^2 = 3$; $|z_2| = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \sqrt{3} \Rightarrow a_2^2 + b_2^2 = 3$.

$|z_1 - z_2| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} = 2$

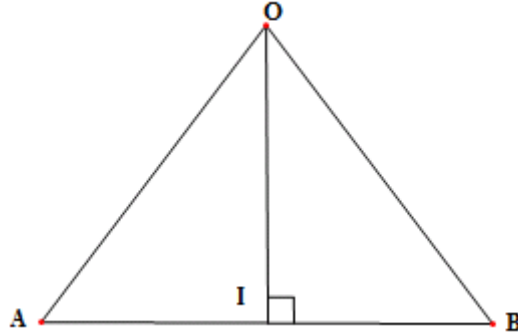
$\Leftrightarrow (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 4 \Leftrightarrow a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 - 2a_1a_2 - 2b_1b_2 = 4 \Leftrightarrow 2a_1a_2 + 2b_1b_2 = 2$.

Do đó: $|z_1 + z_2| = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + 2a_1a_2 + 2b_1b_2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Cách 2:

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1}) = 4$$

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} = 8 \Rightarrow |z_1 + z_2| = 2\sqrt{2}$$

Cách 3:

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn 2 số phức z_1, z_2 . Khi đó tam giác OAB cân có $OA = OB = \sqrt{3}, AB = 2$. Gọi I là trung điểm của AB . Khi đó OI là đường cao của tam giác OAB ; $OI = \sqrt{OA^2 - AI^2} = \sqrt{2}$; $|z_1 + z_2| = 2|OI| = 2\sqrt{2}$.

Cách 4:

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn 2 số phức z_1, z_2 . Khi đó tam giác OAB có $OA = OB = \sqrt{3}, AB = 2$; $T = |z_1 + z_2| = |\vec{OA} + \vec{OB}| \Rightarrow T^2 = OA^2 + OB^2 + 2\vec{OA} \cdot \vec{OB}$.

$$\text{Mà } \vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \cdot OB \cdot \cos(\angle AOB) = OA \cdot OB \cdot \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2} = 1.$$

$$\text{Vậy } T^2 = 8 \Rightarrow T = 2\sqrt{2}.$$

Cách 5:

$$\text{Ta có } |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.$$

$$\Rightarrow T = |z_1 + z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 - 4 = 8.$$

$$T = 2\sqrt{2}.$$

Cách 6: Chọn đại diện

$$\text{Chọn } \begin{cases} z_1 = \sqrt{3} \\ z_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{6}}{3}i \end{cases} \Rightarrow |z_1 + z_2| = \left| \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{6}}{3}i \right| = 2\sqrt{2}.$$

Cách 7:

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn 2 số phức z_1, z_2 . Khi đó tam giác OAB có $OA = OB = \sqrt{3}, AB = 2$. Gọi I là trung điểm của AB .

$$\text{Ta có } T = |z_1 + z_2| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = 2|\overrightarrow{OI}| = 2OI = 2\sqrt{\frac{OA^2 + OB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}} = 2\sqrt{2}.$$

Cách 8: Tính nhanh.

$$\text{Tổng quát } |mz_1 + nz_2|^2 = m^2|z_1|^2 + n^2|z_2|^2 + mn(|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2)$$

$$\text{Vậy } T^2 = |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + (|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2) = 8 \Rightarrow T = 2\sqrt{2}.$$

Câu 33: Chọn D

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) là số phức thỏa mãn bài toán.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sqrt{(a-3)^2 + (b-4)^2} \leq 2 \\ |2a| \leq |2b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-3)^2 + (b-4)^2 \leq 4 \\ |a| \leq |b| \end{cases}. \text{ Suy ra } \begin{cases} a, b \in \mathbb{Z} \\ 1 \leq a \leq 5 \\ 2 \leq b \leq 6 \\ a \leq b \end{cases}.$$

Bảng giá trị thỏa mãn

a	1	2			3				4	
b	4	3	4	5	3	4	5	6	4	5

Vậy tập S có tất cả 10 phần tử.