

Bài 1. (2 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x^3 \cdot (x^2 - 7)^2 - 36x$

b) Dựa vào kết quả trên hãy chứng minh:

$A = n^3 \cdot (n^2 - 7) - 36n$ chia hết cho 210 với mọi số tự nhiên n

Bài 2. (2 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3} \quad (x \neq -1; 1)$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tính giá trị của biểu thức tại $x = -1\frac{2}{3}$

c) Tìm giá trị của x để $A < 0$

Bài 3. (1,0 điểm) Cho ba số a, b, c thỏa mãn $abc = 2004$

Tính: $M = \frac{2004a}{ab + 2004a + 2004} + \frac{b}{bc + b + 2004} + \frac{c}{ac + c + 1}$.

Bài 4. (4 điểm)

Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 4cm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC . Gọi P là giao điểm của AN với DM

a) Chứng minh : tam giác APM là tam giác vuông.

b) Tính diện tích của tam giác APM

c) Chứng minh tam giác CPD là tam giác cân.

Bài 5. (1 điểm) Tìm các giá trị x, y nguyên dương sao cho: $x^2 = y^2 + 2y + 13$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$\begin{aligned}a) x^3(x^2 - 7)^2 - 36x &= x \left[(x^3 - 7x)^2 - 36 \right] \\&= x(x^3 - 7x - 6)(x^3 - 7x + 6) = x(x^3 - x - 6x - 6)(x^3 - x - 6x + 6) \\&= x \left[x(x - 1)(x + 1) - 6(x + 1) \right] \left[x(x - 1)(x + 1) - 6(x - 1) \right] \\&= x(x + 1)(x^2 - x - 6)(x - 1)(x^2 + x - 6) \\&= x(x + 1)(x^2 - 3x + 2x - 6)(x - 1)(x^2 + 3x - 2x - 6) \\&= x(x + 1)(x - 1) \left[x(x - 3) + 2(x - 3) \right] \left[x(x + 3) - 2(x + 3) \right] \\&= x(x + 1)(x - 1)(x - 3)(x + 2)(x - 2)(x + 3)\end{aligned}$$

b) Theo phần a) ta có:

$$A = n^3(n^2 - 7)^2 - 36n = n(n + 1)(n - 1)(n - 3)(n + 2)(n - 2)(n + 3)$$

Đây là tích của 7 số nguyên liên tiếp. Trong 7 số nguyên liên tiếp có:

- Một bội của 2 nên A chia hết cho 2
- Một bội của 3 nên A chia hết cho 3
- Một bội của 5 nên A chia hết cho 5
- Một bội của 7 nên A chia hết cho 7.

Mà $2; 3; 5; 7$ đôi một nguyên tố cùng nhau nên $A \vdots (2.3.5.7)$ hay $A \vdots 210$

Câu 2.

a) Với $x \neq 1; -1$ thì:

$$\begin{aligned}A &= \frac{1 - x^3 - x + x^2}{1 - x} : \frac{(1 - x)(1 + x)}{(1 + x)(1 - x + x^2) - x(1 + x)} \\&= \frac{(1 - x)(1 + x + x^2 - x)}{1 - x} : \frac{(1 - x)(1 + x)}{(1 + x)(1 - 2x + x^2)} \\&= (1 + x^2) : \frac{1}{1 - x} = (1 + x^2).(1 - x)\end{aligned}$$

b) Tại $x = -1\frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$ thì A có giá trị là

$$\left[1 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2\right] \cdot \left(1 - \left(\frac{5}{3}\right)\right) = \left(1 + \frac{25}{9}\right) \cdot \left(1 + \frac{5}{3}\right) = 10 \frac{2}{27}$$

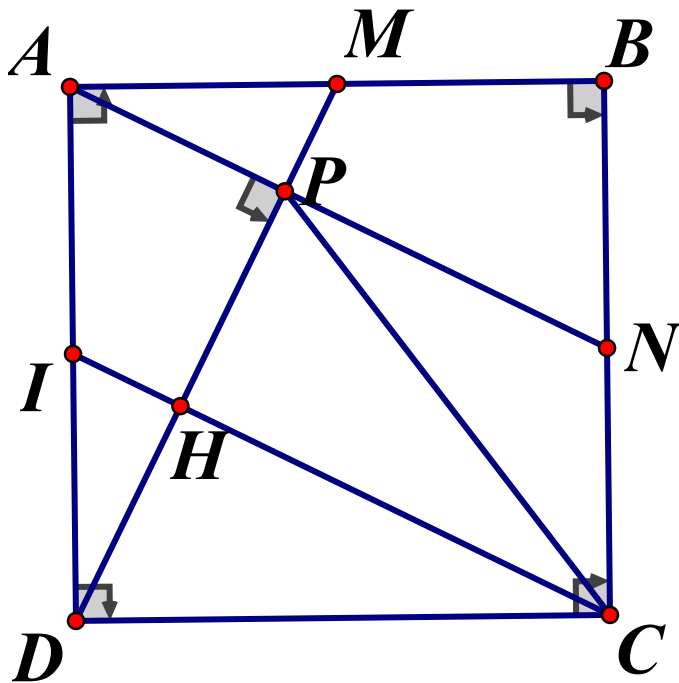
c) Với $x \neq -1; 1$ thì $A < 0 \Leftrightarrow (1+x^2)(1-x) < 0$ (1)

Vì $1+x^2 > 0$ nên (1) $\Leftrightarrow 1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$

Câu 3. Thay $2004 = abc$ vào M ta có:

$$\begin{aligned} M &= \frac{a^2bc}{ab + a^2bc + abc} + \frac{b}{bc + b + abc} + \frac{c}{ac + c + 1} \\ &= \frac{a^2bc}{ab(1+ac+c)} + \frac{b}{b(c+1+ac)} + \frac{c}{ac+c+1} \\ &= \frac{ac}{1+ac+c} + \frac{1}{c+1+ac} + \frac{c}{ac+c+1} \\ &= \frac{ac+1+c}{1+ac+c} = 1 \end{aligned}$$

Câu 4.



a) Chứng minh $\triangle ADM = \triangle BAN$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle A_1 = \angle B_1$

Mà $\angle B_1 + \angle M_1 = 90^\circ$ ($\triangle ADM$ vuông tại A)

Do đó: $\angle A_1 + \angle M_1 = 90^\circ \Rightarrow \angle APM = 90^\circ$. Hay $\triangle APM$ vuông tại A

$$AP = \frac{4\sqrt{5}}{5} \text{ cm}, AM = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ cm} \Rightarrow S_{APM} = \frac{4}{5} (\text{cm}^2)$$

b) Tính được:

c) Gọi I là trung điểm của AD. Nối C với I ; CI cắt DM tại H

Chứng minh tứ giác $AICN$ là hình bình hành

$$\Rightarrow AN \parallel CI \text{ mà } AN \perp DM \text{ nên } CI \perp DM$$

Hay CH là đường cao trong tam giác CPD (1)

Vận dụng định lý về đường trung bình trong $\triangle ADP$ chứng minh được H là trung điểm của $DP \Rightarrow CH$ là trung tuyến trong $\triangle CPD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle CPD$ cân tại C.

Câu 5.

Biến đổi đẳng thức đã cho về dạng $(x+y+1)(x-y-1)=12$

Lập luận để có $x+y+1 > x-y-1$ và $x+y+1; x-y-1$ là các ước dương của 12.

Từ đó ta có các trường hợp:

$x+y+1$	12	6	4
$x-y-1$	1	2	3
x	$\frac{13}{2}$	4	$\frac{7}{2}$
y	$\frac{9}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$

Mà x, y nguyên dương nên $(x; y) = (4; 1)$