

Câu 1. (3,0 điểm)

Giải phương trình sau $\frac{x^2}{1+\sqrt{x^2-3x+1}}=x+1$.

Câu 2. (3,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{3-a}{\sqrt{a^2+9-2bc}}+\frac{3-b}{\sqrt{b^2+9-2ac}}+\frac{3-c}{\sqrt{c^2+9-2ab}}>2.$$

Câu 3. (3,0 điểm)

Cho k là số thực, tìm tất cả các hàm đơn điệu $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+f(y))=k^2y+f(x),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Câu 4. (3,0 điểm)

a) Chứng minh rằng số $A=\sqrt{n^4+6n^3+13n^2+12n+4}$ ($n\in\mathbb{N}^*$) không phải là số chính phương.

b) Cho đa thức $f(x)=a_{2023}x^{2023}+a_{2022}x^{2022}+...+a_1x+a_0$ với hệ số nguyên và $a_{2023}\neq 0$ xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng phương trình $f^2(x)=4$ có số nghiệm nguyên không lớn hơn 2026.

Câu 5. (5,0 điểm).

a) Cho ABC là tam giác nhọn, D là điểm bất kỳ trên cạnh BC thỏa $AB>AD$; $AC>AD$. Trên các cạnh AC, AB lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $EC=ED, FB=FD$. Gọi I, J, K lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, BDF, CDE . Gọi H là trực tâm của tam giác JDK . Chứng minh tứ giác $IJHK$ nội tiếp.

b) Cho tam giác nhọn ABC ($AB<BC$) có đường cao AK . Gọi điểm D trên cạnh AC thỏa $\frac{AD}{DC}=\frac{BK}{BC}$, điểm E di động trên đoạn DC . Gọi F là giao điểm của BE và KD , I là giao điểm của FC và KE . Chứng minh rằng điểm I thuộc đường thẳng cố định.

Câu 6. (3,0 điểm)

Cho đa giác đều n cạnh ($n\in\mathbb{N}; n\geq 8$). Gọi x, y lần lượt là số tam giác và số tứ giác lập ra từ các đường chéo của đa giác đều đã cho. Tìm n biết $x=2y$.

----- HẾT -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu, không được sử dụng máy tính cầm tay.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh:.....