

CHUYÊN ĐỀ 3: PHÉP CHIA HẾT VÀ PHÉP CHI CỐ DƯ

CHỦ ĐỀ 3: DÙNG TÍNH CHẤT CHỨNG MINH BÀI TOÁN CHIA HẾT

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. TÍNH CHẤT CHUNG

1) $a \vdots b$ và $b \vdots c$ thì $a \vdots c$

2) $a \vdots a$ với mọi a khác 0

3) $0 \vdots b$ với mọi b khác 0

4) Bất cứ số nào cũng chia hết cho 1

2. TÍNH CHẤT CHIA HẾT CỦA TỔNG, HIỆU

- Nếu a, b cùng chia hết cho m thì $a + b$ chia hết cho m và $a - b$ chia hết cho m

- Tổng (Hiệu) của 2 số chia hết cho m và 1 trong 2 số ấy chia hết cho m thì số còn lại cũng chia hết cho m .

- Nếu 1 trong 2 số a, b chia hết cho m số kia không chia hết cho m thì tổng, hiệu của chúng không chia hết cho m .

3. TÍNH CHẤT CHIA HẾT CỦA 1 TÍCH

- Nếu một thừa số của tích chia hết cho m thì tích chia hết cho m

- Nếu a chia hết cho m thì bội của a cũng chia hết cho m

- Nếu a chia hết cho m , b chia hết cho n thì $a.b$ chia hết cho $m.n$

- Nếu a chia hết cho b thì: $a^m \vdots b^m$

4. CÁC TÍNH CHẤT KHÁC:

1) $0 \vdots a$ ($a \neq 0$)

2) $a \vdots a; a \vdots 1$ ($a \neq 0$)

3) $a \vdots b; b \vdots c \Rightarrow a \vdots c$

4) $a \vdots m; b \vdots m \Rightarrow pa \pm qb \vdots m$

5) $a \vdots (m.n) \Rightarrow a \vdots m; a \vdots n$

6) $a \vdots m; a \vdots n; (m, n) = 1 \Rightarrow a \vdots mn$

7) $a \vdots m; b \vdots n \Rightarrow ab \vdots mn$

8) $ab \vdots m; (b, m) = 1 \Rightarrow a \vdots m$

9) $ab : p$ (p là số nguyên tố) thì hoặc $a : p$ hoặc $b : p$

5. CÁC TÍNH CHẤT SUY LUẬN ĐƯỢC

- Trong hai số tự nhiên liên tiếp có một số chẵn và một số lẻ.
- Tổng hai số tự nhiên liên tiếp là một số lẻ.
- Tích hai số tự nhiên liên tiếp là một số chẵn.
- Tích hai số chẵn liên tiếp chia hết cho 8.
- Tổng của hai số tự nhiên bất kỳ là một số lẻ thì có một số tự nhiên là số chẵn.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

- 1, **Dạng 1: Chứng minh một biểu thức chia hết cho một số.**
- 2, **Dạng 2: Cho một biểu thức chia hết cho m chứng minh một biểu thức khác chia hết cho m .**
- 3, **Dạng 3: Tìm n để biểu thức $A(n)$ chia hết cho biểu thức $B(n)$**
- 4, **Dạng 4: Bài toán chứng minh chia hết liên quan đến số chính phương.**
- 5, **Dạng 5: Chứng minh một biểu thức chia hết cho một biểu thức.**
- 6, **Dạng 6: Chứng minh chia hết từ một đẳng thức cho trước.**

Dạng 1: Chứng minh một biểu thức chia hết cho một số

I. Phương pháp giải: Chứng minh biểu thức A chia hết cho số m .

- Viết biểu thức A thành một tổng(hiệu) các số trong đó mỗi số đều chia hết cho m từ đó suy ra A chia hết cho m .
- Viết biểu thức A thành một tích các thừa số trong đó có thừa số chia hết cho m từ đó suy ra A chia hết cho m .
- Viết m thành một tích các thừa số nguyên tố cùng nhau và chỉ ra biểu thức A chia hết cho các thừa số của m từ đó suy ra A chia hết cho m .
- Viết biểu thức A và m thành một tích các thừa số và chỉ ra mỗi thừa số của A chia hết cho một thừa số của m từ đó suy ra A chia hết cho m .
- Viết A thành một tổng hoặc hiệu các số mà có tổng hoặc hiệu các số dư chia hết cho m từ đó suy ra A chia hết cho m .

Cụ thể ta có thể vận dụng các PHƯƠNG PHÁP sau:

- + PHƯƠNG PHÁP 1: Nếu A là một số cụ thể ta vận dụng dấu hiệu chia hết 2; 3; 4; 8; 9; 11; ... để chứng minh.
- + PHƯƠNG PHÁP 2: Nếu A có tổng hoặc hiệu các số, ta cần phân tích A để đưa A về hoặc hiệu hoặc tích của các số có dấu hiệu chia hết rồi áp dụng tính chất chia hết của tổng (hiệu) hoặc tích để chứng minh.
- + PHƯƠNG PHÁP 3: Để chứng minh A chia hết cho P , ta xét mọi trường hợp về số dư khi chia A cho P .

+ PHƯƠNG PHÁP 4: Ngoài ra ta cũng có thể dùng cách tìm chữ số tận cùng của A để chứng minh A chia hết cho một số.

+ PHƯƠNG PHÁP 5: Nếu $A \div m$ và $A \div n$ mà m và n là hai số nguyên tố cùng nhau thì $A \div m.n$

II. Bài toán

Bài 1: Chứng minh rằng

a. $A = 10^{28} + 8 \div 72$ b. $B = 81^7 - 27^9 - 9^{13} \div 45$

Lời giải

a) **Cách 1:**

Ta có: $10^{28} = 2^{28} \cdot 5^{28} = 2^3 \cdot 2^{25} \cdot 5^{28} \div 8$ và $8 \div 8 \Rightarrow A \div 8$

Lại có $10^{28} + 8$ có tổng các chữ số là 9 nên chia hết cho 9. Vậy A chia hết cho 72

Cách 2:

$10^{28} + 8$ có ba chữ số tận cùng là 008 nên chia hết cho 8

$$10^{28} + 8 = \underbrace{10^{28}}_{\div 9} \cdot \underbrace{1}_{\div 9} + \underbrace{8}_{\div 9} \Rightarrow A \div 9 \Rightarrow A \div 72$$

b) Ta có $81^7 \div 9$; $27^9 \div 9$; $9^{13} \div 9$ chia hết cho 9 nên B chia hết cho 9

Lại có 81^7 có tận cùng là 1

$27^9 = 27^8 \cdot 27 = \overline{\dots 1} \cdot 27$ có tận cùng là 7

$9^{13} = 9^{12} \cdot 9 = \overline{\dots 1} \cdot 9$ có tận cùng là 9

nên B có tận cùng là 5 nên B chia hết cho 5.

Mà $(5; 9) = 1 \Rightarrow B \div 5 \cdot 9 \Rightarrow B \div 45$

Bài 2: Chứng minh : $A = 2^{20} \cdot 2^4 + 2^{20}$ chia hết cho 17.

Lời giải

$$A = 2^{20} \cdot (16 + 1) = 2^{20} \cdot 17$$

$$\Rightarrow A \div 17$$

Bài 3: Chứng minh rằng: $A = 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$ chia hết cho 19

Lời giải

Thêm bớt $7 \cdot 6^n$, ta được: $A = 7 \cdot 25^n - 7 \cdot 6^n + 19 \cdot 6^n = 7 \cdot (25^n - 6^n) + 19 \cdot 6^n$

Ta có: $25^n \equiv 6^n \pmod{19}$

$$\Rightarrow (25^n - 6^n) \equiv 0 \pmod{19}$$

$$\Rightarrow 7.(25^n - 6^n) + 19.6^n \equiv 19.6^n \pmod{19}$$

$$\Rightarrow A \equiv 0 \pmod{19}$$

Vậy $A : 19$

Ghi chú: Đối với một số bài toán lớp 8 nếu ta sử dụng đến hằng đẳng thức: $a^n - b^n : a - b$ với $(n \in \mathbb{N})$

$a^n + b^n : a + b$ với $(n \in \mathbb{N}; n \text{ lẻ})$. Thì ta có thể giải được một cách dễ dàng, tuy nhiên với

học sinh lớp 6 thì chưa thể sử dụng những hằng đẳng thức đó. Vì vậy, ta có thể sử dụng Đồng dư thức để có được lời giải phù hợp với trình độ của học sinh lớp 6.

Bài 4: Chứng minh rằng: a) $A = 2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7.

b) $B = 1961^{1962} + 1963^{1964} + 1965^{1966} + 2$ chia hết cho 7.

Lời giải

a) Ta có $A = (5555^{2222} - 4^{2222}) + (2222^{5555} + 4^{5555}) - (4^{5555} - 4^{2222})$

Mà $(5555^{2222} - 4^{2222}) : (5555 - 4) \Rightarrow (5555^{2222} - 4^{2222}) : 7$

Tương tự: $(2222^{5555} + 4^{5555}) : 7$

$$4^{5555} - 4^{2222} = (4^5)^{1111} - (4^2)^{1111} : (4^5 - 4^2) \Rightarrow 4^{5555} - 4^{2222} : 7$$

Vậy $A = 2222^{5555} + 5555^{2222}$ chia hết cho 7.

b) $B = 1961^{1962} + 1963^{1964} + 1965^{1966} + 2 : 7$

Sử dụng tính chất: $(a+b)^n$ khi chia cho a có số dư là b^n

Ta có $B = (1960+1)^{1962} + (1960+3)^{1964} + (1965-2)^{1966} + 2$

$$B = (7m+1)^{1962} + (7n+3)^{1964} + (7p-2)^{1966} + 2$$

$$B = 7q+1+3^{1964}+2^{1966}+2$$

$$B = 7q+9.27^{654}+2.2^{3.655}+3$$

$$B = 7r+9+2+3$$

$$B = 7r+14 : 7$$

Bài 5 : Chứng minh rằng: $A = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{200}$ chia hết cho 6

Lời giải

Ta có:

$$\text{Tổng của hai số hạng : } 2 + 2^2 = 2 + 4 = 6$$

Tổng A có 200 số hạng ta chia thành 100 nhóm chứa hai số hạng có tổng 6.

Nên:
$$A = (2 + 2^2) + (2^3 + 2^4) + \dots + (2^{199} + 2^{200})$$

$$A = 6 + 2^2(2 + 2^2) + \dots + 2^{198}(2 + 2^2)$$

$$A = 6 + 2^2(6) + \dots + 2^{198}(6)$$

$$A = 6(1 + 2^2 + \dots + 2^{198})$$

Vậy A chia hết cho 6

Bài 6 : Chứng minh rằng: $A = 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{20}$ chia hết cho 4 và 5.

Lời giải

$$A = (2^2 + 2^4) + (2^6 + 2^8) + \dots + (2^{18} + 2^{20})$$

$$\Rightarrow A = 20 + 2^4(2^2 + 2^4) + \dots + 2^{16}(2^2 + 2^4)$$

$$\Rightarrow A = 20 + 2^4(20) + \dots + 2^{16}(20)$$

$$\Rightarrow A = 20.(1 + 2^4 + \dots + 2^{16})$$

$$\Rightarrow A = 5.4.(1 + 2^4 + \dots + 2^{16})$$

Vậy A chia hết cho 5 và 4.

Bài 7 : Chứng minh rằng:

a, $(n+10)(n+15) : 2$

b, $n(n+1)(n+2) : 2; 3$

c, $n^2 + n + 1 \not\vdots 4; 2; 5$

Lời giải

a, Ta có:

Nếu n là số lẻ thì $n+15 : 2$

Nếu n là số chẵn thì $n+10 : 2$

Như vậy với mọi n là số tự nhiên thì : $(n+10)(n+15) : 2$

b, Ta có: $n(n+1)(n+2)$ là tích ba số tự nhiên liên tiếp nên sẽ có một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3.

c, Ta có: $n(n+1)+1$ là 1 số lẻ nên $n(n+1)+1 \not\vdots 4; 2$ và có chữ số tận cùng khác 0 và 5

Bài 8: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì:

a. $A = n(2n+1)(7n+1) : 6$

b. $B = n^3 - 13n : 6$

Lời giải

a) Ta có: $n + 7n + 1 = 8n + 1$ là số lẻ nên n chẵn hoặc $7n$ chẵn,

$$\Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 2 \quad (1)$$

Xét các trường hợp :

$$n = 3k \Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 3$$

$$n = 3k + 1 \Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 3 \quad (\text{do } 2n+1 : 3)$$

$$n = 3k + 2 \Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 3 \quad (\text{do } 7n+1 : 3)$$

$$\Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 3 \quad \text{với mọi số tự nhiên } n \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 2.3$ (Do 2; 3 là hai số nguyên tố cùng nhau)

$$\Rightarrow n(2n+1)(7n+1) : 6$$

$$B = n^3 - 13n = n^3 - n - 12n = \underbrace{n(n-1)(n+1)}_{\text{chia hết cho 6}} - \underbrace{12n}_{\text{chia hết cho 6}}$$

b) Vậy $B = n^3 - 13n : 6$

Bài 9: Chứng minh rằng tổng của ba số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 3.

Lời giải

Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là: $a, a+1, a+2$

Tổng của ba số tự nhiên liên tiếp là

$$a + a + 1 + a + 2 = (a + a + a) + (1 + 2) = (3a + 3) : 3 \quad (\text{Tính chất chia hết của một tổng}).$$

Nâng cao: Có phải tổng của n số tự nhiên liên tiếp luôn luôn chia hết cho n hay không?

Bài 10: Tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp có chia hết cho 4 hay không ?

Lời giải

Gọi 4 số tự nhiên liên tiếp là $a, a+1, a+2, a+3$.

Tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp là:

$$a + a + 1 + a + 2 + a + 3 = (a + a + a + a) + (1 + 2 + 3) = (4a + 6).$$

Do 4 chia hết cho 4 nên $4a$ chia hết cho 4 mà 6 không chia hết cho 4 nên $(4a + 6)$ không chia hết cho 4 $\Rightarrow$ Tổng của 4 số tự nhiên liên tiếp không chia hết cho 4.

Kết luận nâng cao: Vậy không phải lúc nào tổng n số tự nhiên liên tiếp cũng chia hết cho n

Bài 11: Chứng minh $(495a + 1035b)$ chia hết cho 45 với mọi a, b là số tự nhiên.

Lời giải

Vì 495 chia hết cho 9 nên $1980.a$ chia hết cho 9 với mọi a .

Vì 1035 chia hết cho 9 nên $1035b$ chia hết cho 9 với mọi b .

Nên: $(495a + 1035b)$ chia hết cho 9.

Chúng minh tương tự ta có: $(1980a + 1995b)$ chia hết cho 5 với mọi a, b

Mà $(9; 5) = 1 \Rightarrow (495a + 1035b)$ chia hết cho 45.

Bài 12: Chứng minh rằng tích của hai số chẵn liên tiếp luôn chia hết cho 8.

Lời giải

Gọi hai số chẵn liên tiếp là $2n, 2n + 2$.

Tích của hai số chẵn liên tiếp là: $2n.(2n + 2) = 4n.(n + 1)$

Vì $n, n + 1$ không cùng tính chẵn lẻ nên $n, n + 1$ chia hết cho 2.

Mà 4 chia hết cho 4 nên $4n.(n + 1)$ chia hết cho (4.2)

$\Rightarrow 4n.(n + 1)$ chia hết cho 8.

$\Rightarrow 2n.(2n + 2)$ chia hết cho 8.

Bài 13: Chứng minh rằng:

- a) Tích của ba số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 3.
- b) Tích của bốn số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho 4.

Lời giải

a) Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là $n, n + 1, n + 2$.

Tích của ba số tự nhiên liên tiếp là: $n.(n + 1).(n + 2)$.

Một số tự nhiên khi chia cho 3 có thể nhận một trong các số dư 0; 1; 2.

+) Nếu $r = 0$ thì n chia hết cho 3 $\Rightarrow n.(n + 1).(n + 2)$ chia hết cho 3.

+) Nếu $r = 1$ thì $n = 3k + 1$ (k là số tự nhiên).

$\Rightarrow n + 2 = 3k + 1 + 2 = (3k + 3)$ chia hết cho 3.

$\Rightarrow n.(n + 1).(n + 2)$ chia hết cho 3.

+) Nếu $r = 2$ thì $n = 3k + 2$ (k là số tự nhiên).

$\Rightarrow n + 1 = 3k + 2 + 1 = (3k + 3)$ chia hết cho 3.

$\Rightarrow n.(n + 1).(n + 2)$ chia hết cho 3.

Tóm lại: $n.(n + 1).(n + 2)$ chia hết cho 3 với mọi n là số tự nhiên.

- b) Chứng minh tương tự ta có $n.(n+1).(n+2).(n+3)$ chia hết cho 4 với mọi n là số tự nhiên.
Kết luận: Tích của n số tự nhiên liên tiếp luôn chia hết cho n .

Dạng 2: Cho một biểu thức chia hết cho m chứng minh một biểu thức khác chia hết cho m

I. Phương pháp giải

- Vận dụng tính chất: $A:C; B:C \Rightarrow pA+qB:C$ từ đó tìm giá trị p và q thích hợp.

II. Bài toán

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên x, y thì:

- a. $2x+3y:17 \Leftrightarrow 9x+5y:17$ b. $7x+9y:13 \Leftrightarrow x+5y:13$
 c. $x+4y:19 \Leftrightarrow 13x+14y:19$ d. $20x+7y:31 \Leftrightarrow x+5y:31$

Lời giải

a) *Gợi ý:* Tìm p, q sao cho

$$p(2x+3y)+q(9x+5y):17 \forall x, y \Leftrightarrow (2p+9q)x+(3p+5q)y:17 \forall x, y \Leftrightarrow \begin{cases} 2p+9q:17 \\ 3p+5q:17 \end{cases}$$

$$p=4; q=1 \Rightarrow 4(2x+3y)+(9x+5y):17 \quad \forall x, y$$

Chọn

Trình bày bài:

Cách 1:

* Chứng minh: $2x+3y:17 \Rightarrow 9x+5y:17$

$$2x+3y:17 \Rightarrow 4(2x+3y):17$$

Từ

$$\text{Mà } 17x+17y:17 \quad \text{nên } 17x+17y-4(2x+3y):17 \Rightarrow 9x+5y:17$$

* Chứng minh: $9x+5y:17 \Rightarrow 2x+3y:17$

$$9x+5y:17 \Rightarrow 17x+17y-(9x+5y):17 \Rightarrow 8x+12y:17$$

Từ

$$\Rightarrow 4(2x+3y):17 \Rightarrow 2x+3y:17 \quad (\text{Vì 4 và 17 nguyên tố cùng nhau})$$

Cách 2:

$$2x+3y:17 \Rightarrow 9x+5y:17$$

* Chứng minh:

$$\text{Vì } 17x+17y:17 \Rightarrow (8x+12y)+(9x+5y):17 \Rightarrow 4(2x+3y)+(9x+5y):17 \quad (1)$$

$$\text{Mà } (2x+3y):17 \Rightarrow 4(2x+3y):17 \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $9x+5y:17$

$$9x + 5y : 17 \Rightarrow 2x + 3y : 17$$

* Chứng minh:

Vì $17x + 17y : 17 \Rightarrow (8x + 12y) + (9x + 5y) : 17 \Rightarrow 4(2x + 3y) + (9x + 5y) : 17$

Mà $(9x + 5y) : 17 \Rightarrow 4(2x + 3y) : 17 \Rightarrow 2x + 3y : 17$ (Vì 4 và 17 nguyên tố cùng nhau)

b) $\begin{cases} 7p + q : 13 \\ 9p + 5q : 13 \end{cases} \Rightarrow$ chọn $p = 1; q = 6$

c) $\begin{cases} p = 6 \\ q = 13 \end{cases}$

d) $\begin{cases} p = 3 \\ q = 1 \end{cases}$

Bài 2: Chứng minh rằng: Nếu $2x + y : 9$ thì $5x + 7y : 9$

Lời giải

$$2x + y : 9 \Rightarrow 7(2x + y) : 9 \Rightarrow 14x + 7y : 9 \Rightarrow 9x + 5x + 7y : 9 \Rightarrow 5x + 7y : 9$$

Ta có :

Bài 3: Chứng minh rằng:

a, Nếu $\overline{ab + cd} : 11$ thì $\overline{abcd} : 11$

b, Nếu $\overline{abc - deg} : 7$ thì $\overline{abcdeg} : 7$

Lời giải

a, Ta có: $\overline{ab + cd} = a.10 + b + 10c + d = (a + c)10 + b + d = (a + c)(b + d) : 11$

hay $(a + c) - (b + d) : 11$

Khi đó $\overline{abcd} : 11$ vì có $(a + c) - (b + d) : 11$

b, Ta có: $\overline{abcdeg} = 1000\overline{abc} + \overline{deg} = 1001\overline{abc} - (\overline{abc} - \overline{deg})$

mà $\overline{abc} - \overline{deg} : 7$ nên $\overline{abcdeg} : 7$

Bài 4: Chứng minh rằng:

a, Nếu $\overline{ab} = 2.\overline{cd}$ thì $\overline{abcd} : 67$

b, Nếu $\overline{abc} : 27$ thì $\overline{bca} : 27$

Lời giải

a, Ta có: $\overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd} = 200\overline{cd} + \overline{cd} = 201\overline{cd} : 67$

b, Ta có:

$$\overline{abc} : 27 \Rightarrow \overline{abc0} : 27 \Rightarrow 1000a + \overline{bc0} : 27$$

$$\Rightarrow 999a + a + \overline{bc0} : 27 \Rightarrow 27.37a + \overline{bca} : 27$$

Mà $27.37a : 27$ nên $\overline{bca} : 27$

Bài 5: Chứng minh rằng:

- a, Nếu $(\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}) : 11$ thì $\overline{abcdeg} : 11$
- b, Nếu $\overline{abc} + \overline{deg} : 37$ thì $\overline{abcdeg} : 37$
- c, Nếu $\overline{abcd} : 99$ thì $\overline{ab} + \overline{cd} : 99$

Lời giải

- a, Ta có : $\overline{abcdeg} = 10000.\overline{ab} + 100\overline{cd} + \overline{eg} = 9999\overline{ab} + 99\overline{cd} + (\overline{ab} + \overline{cd} + \overline{eg}) : 11$
- b, Ta có : $\overline{abcdeg} = 1000\overline{abc} + \overline{deg} = 999\overline{abc} + (\overline{abc} + \overline{deg}) : 37$
- c, Ta có : $\overline{abcd} = 100.\overline{ab} + \overline{cd} = 99.\overline{ab} + (\overline{ab} + \overline{cd}) : 99 \Rightarrow \overline{ab} + \overline{cd} : 99$

Bài 6: Chứng minh rằng: Nếu $\overline{abcd} : 101$ thì $\overline{ab} - \overline{cd} : 101$

Lời giải

$$\overline{abcd} : 101 \Rightarrow 100.\overline{ab} + \overline{cd} = 101.\overline{ab} - \overline{ab} + \overline{cd} = 101.\overline{ab} - (\overline{ab} - \overline{cd}) : 101$$

Ta có :

$$\Rightarrow \overline{ab} - \overline{cd} : 101$$

Bài 7: Chứng minh rằng:

- a, $2a - 5b + 6c : 17$ nếu $a - 11b + 3c : 17$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$)
- b, $3a + 2b : 17$ nếu $10a + b : 17$ ($a, b \in \mathbb{Z}$)

Lời giải

- a, Ta có: $a - 11b + 3c : 17$ và $17a - 34b + 51c : 17$
- nên $18a - 45b + 54c : 17 \Rightarrow 9(2a - 5b + 6c) : 17$
- b, Ta có: $3a + 2b : 17$ và $17a - 34b : 17$
- nên $20a - 32b : 17 \Rightarrow 10a - 16b : 17$
- $$\Rightarrow 10a + 17b - 16b : 17$$
- $$\Rightarrow 10a + b : 17$$

Bài 8: Chứng minh rằng:

a, $\overline{abcd} : 29$ thì $a + 3b + 9c + 27d : 29$

b, $\overline{abc} : 21$ thì $a - 2b + 4c : 21$

Lời giải

a, Ta có: $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d : 29 \Rightarrow 2000a + 200b + 20c + 2d : 29$

$$\Rightarrow 2001a - a + 203b - 3b + 29c - 9c + 29d - 27d : 29$$

$$\Rightarrow (2001a + 203b + 29c + 29d) - (a + 3b + 9c + 27d) : 29$$

$$\Rightarrow (a + 3b + 9c + 27d) : 29$$

b, Ta có: $\overline{abc} = 100a + 10b + c : 21$

$$\Rightarrow 100a - 84a + 10b - 42b + c + 63c : 21$$

$$\Rightarrow 16a - 32b + 64c : 21 \Rightarrow 16(a - 2b + 4c) : 21$$

Bài 9: Cho a, b là các số nguyên. CMR nếu $6a + 11b$ chia hết cho 31 thì $a + 7b$ cũng chia hết cho 31

Lời giải

Ta có: $6a + 11b : 31 \Rightarrow 6(a + 7b) - 31b : 31 \Rightarrow a + 7b : 31$

Bài 10: Cho a, b là các số nguyên. CMR : $5a + 2b : 17 \Leftrightarrow 9a + 7b : 17$

Lời giải

Ta có: $5a + 2b : 17$

$$\Rightarrow 5a - 68a + 2b - 51b : 17 \Rightarrow -63a - 49b : 17 \Rightarrow -7(9a + 7b) : 17 \Rightarrow 9a + 7b : 17$$

Ngược lại ta có: $9a + 7b : 17 \Rightarrow 7(9a + 7b) : 17 \Rightarrow 63a + 49b : 17$

$$\Rightarrow 68a - 5a + 51b - 2b : 17 \Rightarrow -5a - 2b : 17 \Rightarrow -(5a + 2b) : 17 \Rightarrow (5a + 2b) : 17$$

Bài 11: Cho a, b là các số nguyên. CMR nếu $2a + 3b : 7$ thì $8a + 5b : 7$ và ngược lại.

Lời giải

Ta có: $2a + 3b : 7 \Rightarrow 4(2a + 3b) : 7 \Rightarrow 8a + 12b : 7 \Rightarrow 8a + 12b - 7b : 7 \Rightarrow 8a + 5b : 7$

Ngược lại ta có: $8a + 5b : 7 \Rightarrow 8a + 12b - 7b : 7 \Rightarrow 8a + 12b : 7 \Rightarrow 4(2a + 3b) : 7 \Rightarrow 2a + 3b : 7$

Bài 12: Cho a, b là các số nguyên. CMR nếu $a - 2b : 7$ thì $a - 9b : 7$

điều ngược lại có đúng không?

Lời giải

Ta có: $a - 2b : 7 \Rightarrow a - 2b - 7b : 7 \Rightarrow a - 9b : 7$

Điều ngược lại vẫn đúng

Bài 13: Cho a, b là các số nguyên và $5a + 8b \vdots 3$. Chứng minh rằng:

a, $-a + 2b \vdots 3$

b, $10a + b \vdots 3$

c, $a + 16b \vdots 3$

Lời giải

a, Ta có: $5a + 8b \vdots 3 \Rightarrow 5a - 6a + 8b - 6b \vdots 3 \Rightarrow -a + 2b \vdots 3$

b, Ta có: $5a + 8b \vdots 3 \Rightarrow 2(5a + 8b) \vdots 3 \Rightarrow 10a + 16b \vdots 3 \Rightarrow 10a + 16b - 15b \vdots 3$

c, Ta có: $5a + 8b \vdots 3 \Rightarrow 5(a + 16b) - 72b \vdots 3 \Rightarrow a + 16b \vdots 3$

Bài 14: Cho biết $a - b \vdots 6$. CMR các biểu thức sau cũng chia hết cho 6

a, $a + 5b$

b, $a + 17b$

c, $a - 13b$

Lời giải

a, Ta có: $a - b \vdots 6 \Rightarrow a - b + 6b \vdots 6 \Rightarrow a + 5b \vdots 6$

b, Ta có: $a - b \vdots 6 \Rightarrow a - b + 18b \vdots 6 \Rightarrow a + 17b \vdots 6$

c, Ta có: $a - b \vdots 6 \Rightarrow a - b - 12b \vdots 6 \Rightarrow a - 13b \vdots 6$

Dạng 3: Tìm n để biểu thức $A(n)$ chia hết cho biểu thức $B(n)$

Bài 1: Tìm số tự nhiên n để $(3n + 14)$ chia hết cho $(n + 2)$.

Lời giải

Ta có $5n + 14 = 5 \cdot (n + 2) + 4$

Mà $5 \cdot (n + 2) \vdots (n + 2)$

Do đó $(5n + 14) \vdots (n + 2) \Leftrightarrow 4 \vdots (n + 2) \Leftrightarrow (n + 2)$ là ước của 4.

$\Leftrightarrow (n + 2) \in \{1; 2; 4\} \Rightarrow n \in \{0; 2\}$

Vậy với $n \in \{0; 2\}$ thì $(5n + 14) \vdots (n + 2)$

Bài 2: Tìm số tự nhiên n để $\frac{n + 15}{n + 3}$ là số tự nhiên.

Lời giải

Để $\frac{n + 15}{n + 3}$ là số tự nhiên thì $(n + 15) \vdots (n + 3)$.

$$\Rightarrow [(n+15) - (n+3)] : (n+3).$$

$$\Leftrightarrow 12 : (n+3) \Leftrightarrow (n+3) \in \bigcup (12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

$$\Leftrightarrow n \in \{0; 1; 3; 9\}$$

Vậy với $n \in \{0; 1; 3; 9\}$ thì $\frac{n+15}{n+3}$ là số tự nhiên.

Bài 3: Tìm số tự nhiên n sao cho $4n-5 : 2n-1$

Lời giải

Ta có $4n-5 = 2(2n-1) - 3$

Để $4n-5 : 2n-1$ thì $3 : 2n-1$

Với $2n-1=1 \Rightarrow n=1$

Với $2n-1=3 \Rightarrow n=2$

Vậy $n = 1; 2$

Bài 4: Tìm số tự nhiên n để $n^2+3n+6 : n+3$.

Lời giải

$$n^2+3n+6 : n+3$$

$$n(n+3)+6 : n+3 \Leftrightarrow 6 : n+3$$

$$\Rightarrow n+3 \in \bigcup (6) = \{1; 2; 3; 6\}$$

$$\Rightarrow n=0; n=3$$

Bài 5: Tìm $a \in \mathbb{N}$ để $a+1$ là bội của $a-1$

Lời giải

Để $a+1$ là bội của $a-1$ thì $\frac{a+1}{a-1}$ là số nguyên $\frac{a+1}{a-1} = 1 + \frac{2}{a-1}$

$$\Rightarrow a-1 \in \bigcup (2) = \{-1; 1; 2\}$$

$$\Rightarrow a = \{0; 2; 3\} \quad (\text{thỏa mãn } a \in \mathbb{N})$$

Bài 6: Tìm số nguyên n để: $5+n^2-2n$ chia hết cho $n-2$

Lời giải

Ta có $5+n^2-2n = 5+n(n-2)$

$$\Rightarrow 5+n^2-2n : (n-2) \quad \text{khi } 5 : (n-2)$$

$$\Rightarrow n-2 \in {}_U(5) = \{-5; -1; 1; 5\}$$

$$\Rightarrow n \in \{-3; 1; 3; 7\}$$

Bài 7: Tìm tất cả các số nguyên n để phân số $\frac{n+1}{n-2}$ có giá trị là một số nguyên

Lời giải

$$\frac{n+1}{n-2} \text{ là số nguyên khi } (n+1):(n-2)$$

$$\text{Ta có } (n+1) = [(n-2)+3]$$

$$\text{Vậy } (n+1):(n-2) \text{ khi } 3:(n-2)$$

$$(n-2) \in {}_U(3) = \{-3; -1; 1; 3\}$$

$$\Rightarrow n \in \{-1; 1; 3; 5\}$$

Bài 8: Cho $A = \frac{n-1}{n+4}$. Tìm n nguyên để A là một số nguyên.

Lời giải

$$A = \frac{n-1}{n+4} = \frac{n+4-5}{n+4} = 1 - \frac{5}{n+4}$$

$$\text{Với } n \text{ nguyên, } A \text{ nhận giá trị nguyên} \Leftrightarrow 5:n+4 \text{ hay } n+4 \in {}_U(5)$$

$$\text{Lập luận tìm ra được } n \in \{-9; -5; -3; 1\}$$

Bài 9: Tìm số nguyên n để phân số $\frac{4n+5}{2n-1}$ có giá trị là một số nguyên

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{4n+5}{2n-1} = \frac{4n-2+7}{2n-1} = \frac{n(2n-1)+7}{2n-1} = n + \frac{7}{2n-1}$$

$$\text{Vì } n \text{ nguyên nên để } \frac{4n+5}{2n-1} \text{ nguyên thì } \frac{7}{2n-1} \text{ nguyên}$$

$$\Rightarrow 2n-1 \in {}_U(7) = \{-7; -1; 1; 7\}$$

$$\Leftrightarrow 2n \in \{-6; 0; 2; 8\} \Leftrightarrow n \in \{-3; 0; 1; 4\}$$

$$\text{Vậy với } n \in \{-3; 0; 1; 4\} \text{ thì } \frac{4n+5}{2n-1} \text{ có giá trị là một số nguyên}$$

Bài 10: Tìm số tự nhiên n để biểu thức sau là số tự nhiên:

$$B = \frac{2n+2}{n+2} + \frac{5n+17}{n+2} - \frac{3n}{n+2}$$

Lời giải

$$B = \frac{2n+2}{n+2} + \frac{5n+17}{n+2} - \frac{3n}{n+2} = \frac{2n+2+5n+17-3n}{n+2} = \frac{4n+19}{n+2}$$

$$B = \frac{4n+19}{n+2} = \frac{4(n+2)+11}{n+2} = 4 + \frac{11}{n+2}$$

Để B là số tự nhiên thì $\frac{11}{n+2}$ là số tự nhiên

$$\Rightarrow 11 : (n+2) \Rightarrow n+2 \in \cup (11) = \{ \pm 1; \pm 11 \}$$

Do $n+2 > 1$ nên $n+2 = 11 \Rightarrow n = 9$

Vậy $n = 9$ thì B là số tự nhiên

Dạng 3: Bài toán chứng minh chia hết liên quan đến số chính phương

I. Phương pháp giải

- Kết hợp các tính chất chia hết với tính chất của số chính phương để giải bài tập.

- Tính chất của số chính phương :

Số chính phương chỉ có tận cùng là một trong các chữ số 0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9.

Khi phân tích ra TSNT thì số chính phương chỉ chứa TSNT với số mũ chẵn.

Một số chính phương chia hết cho số nguyên tố p thì cũng chia hết cho p^2

Một số là số chính phương khi và chỉ khi có số ước lẻ.

II. Bài toán

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n(n^2 + 1)(n^2 + 4) : 5$

Lời giải

Nhận xét: Số chính phương chỉ có tận cùng là một trong các chữ số 0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9 nên một số chính phương khi chia cho 5 có số dư là: 0, 1, 4. Ta xét các trường hợp sau :

Nếu n^2 chia 5 dư 0 hay $n^2 : 5$ thì $n : 5$ (vì 5 là số nguyên tố) $\Rightarrow n(n^2 + 1)(n^2 + 4) : 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Nếu n^2 chia 5 dư 1 thì $n^2 + 4 : 5 \Rightarrow n(n^2 + 1)(n^2 + 4) : 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Nếu n^2 chia 5 dư 4 thì $n^2 + 1 : 5 \Rightarrow n(n^2 + 1)(n^2 + 4) : 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Vậy với mọi số tự nhiên n thì $n(n^2 + 1)(n^2 + 4) : 5$

Bài 2: a) Chứng minh rằng một số chính phương khi chia cho 3 chỉ có số dư là 0 hoặc 1.

b) Chứng minh rằng một số chính phương khi chia cho 4 chỉ có số dư là 0 hoặc 1.

Lời giải

Gọi $A = n^2 \quad (n \in \mathbb{N})$

a) Xét:

$$n = 3k \ (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow A = 9k^2 \text{ nên } A : 3$$

$$n = 3k + 1 \ (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow A = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 \text{ nên } A \text{ chia cho 3 dư 1}$$

$$n = 3k + 2 \ (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow A = 9k^2 + 12k + 4 = 9k^2 + 12k + 3 + 1 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 \text{ nên } A \text{ chia cho 3 dư 1.}$$

Vậy: Một số chính phương chia cho 3 chỉ có số dư là 0 hoặc 1

b) Xét:

$$n = 2k \ (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow A = 4k^2 \text{ nên } A : 4$$

$$n = 2k + 1 \ (k \in \mathbb{N}) \Rightarrow A = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1 \text{ nên } A \text{ chia cho 4 dư 1}$$

Vậy: Một số chính phương chia cho 4 chỉ có số dư là 0 hoặc 1.

Nhận xét: Một số chính phương chẵn thì chia hết cho 4, một số chính phương lẻ khi chia cho 4 chỉ có số dư là 0 hoặc 1.

Bài 3: Cho a, b là hai số chính phương lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng: $(a-1)(b-1) : 192$

Lời giải

Ta có $192 = 3 \cdot 8 \cdot 8; (3; 8) = 1$

Nhận xét: Nếu n lẻ thì $n^2 - 1 : 8$

Thật vậy: $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ mà $(n+1)$ và $(n-1)$ là hai số chẵn liên tiếp nên $(n-1)(n+1) : 8$

Từ đó $\Rightarrow a-1 : 8; b-1 : 8 \Rightarrow (a-1)(b-1) : 8 \cdot 8 = 64 \quad (1)$

a, b là các số chính phương nên a, b chia 3 dư 1 hoặc 0

Vì a, b là các số chính phương lẻ liên tiếp nên luôn có một trong hai số không chia hết cho 3

$$\Rightarrow \begin{cases} a \not\equiv 3 \\ b \equiv 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-1 : 3 \\ b-1 : 3 \end{cases} \Rightarrow (a-1)(b-1) : 3 \quad (2)$$

Mà $(3, 64) = 1 \Rightarrow (a-1)(b-1) : 4 \cdot 3 = 192 \Rightarrow$ đpcm.

Bài 4: Có hay không số tự nhiên n để $2010 + n^2$ là số chính phương.

Lời giải

Giả sử $2010 + n^2$ là số chính phương thì $2010 + n^2 = m^2 \ (m \in \mathbb{N})$

$$m^2 - n^2 = 2010 \Leftrightarrow m^2 - mn + mn - n^2 = 2010$$

Từ đó suy ra

$$\Leftrightarrow m(m-n) + n(m-n) = 2010$$

$$\Leftrightarrow (m-n)(m+n) = 2010$$

Như vậy trong 2 số $m+n$ và $m-n$ phải có ít nhất 1 số chẵn (1)

Mặt khác $(m+n)$ và $(m-n)$ có cùng tính chẵn lẻ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow (m+n)$ và $(m-n)$ là 2 số chẵn.

$$\Rightarrow (m+n):2 \text{ và } (m-n):2$$

$$\Rightarrow (m+n)(m-n):4 \text{ nhưng } 2010 \text{ không chia hết cho } 4$$

$\Rightarrow$ Điều giả sử sai.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n để $2010 + n^2$ là số chính phương.

Dạng 4: Chứng minh một biểu thức chia hết cho một biểu thức

I. Phương pháp giải:

- Biến đổi biểu thức bị chia thành tích của các biểu thức nhỏ trong đó có biểu thức chia hết cho biểu thức chia.

II. Bài toán

Bài 1: Cho $A = 4 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99}$. Chứng minh rằng A chia hết cho 2^{99}

Lời giải

Ta có $A = 4 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99}$

$$\Rightarrow 2A = 2(4 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99})$$

$$\Rightarrow 2A = 8 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{100}$$

$$2A - A = (8 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{100}) - (4 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99})$$

Xét

$$\Rightarrow A = (8 + 2^{100}) - (4 + 2^2) = 2^{100}$$

Vì $2^{100} : 2^{99}$ nên $A : 2^{99}$

Bài 2: Cho $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99}$ Chứng minh rằng A chia hết cho $2^{100} - 1$

Lời giải

Ta có $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99}$

$$\Rightarrow 2A = 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99})$$

$$\Rightarrow 2A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{100}$$

$$2A - A = (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{100}) - (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99})$$

Xét

$$\text{suy ra } A = 2^{100} - 1$$

Vậy A chia hết cho $2^{100} - 1$

Bài 3: Tính tổng $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1)$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Từ đó chứng minh S luôn chia hết cho hai trong ba số n ; $(n+1)$; $(n+2)$

Lời giải

Ta có $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1)$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

$$\Rightarrow 3S = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + \dots + n(n+1).3$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 3S &= 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + \dots + n(n+1)[(n+2) - (n-1)] \\ \Rightarrow 3S &= 1.2.3 + 2.3.4 - 1.2.3 + 3.4.5 - 2.3.4 + \dots + n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1) \\ \Rightarrow 3S &= n(n+1)(n+2) \\ \Rightarrow S &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{aligned}$$

Vì $n; (n+1); (n+2)$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên luôn có một số chia hết cho 3, hai số còn lại là chia hết cho chính nó $\Rightarrow n(n+1)(n+2) : 3$
 $\Rightarrow S$ là một số tự nhiên chia hết cho hai trong ba số $n; (n+1); (n+2)$

Bài 4: Tính tổng $D = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + n(n+1)(n+2) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$. Từ đó chứng minh S luôn chia hết cho ba trong bốn số $n; (n+1); (n+2); (n+3)$.

Lời giải

Ta có : $D = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + n(n+1)(n+2) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

$$\text{Xét } 4D = 1.2.3.4 + 2.3.4.4 + 3.4.5.4 + \dots + n(n+1)(n+2).4$$

$$\Rightarrow 4D = 1.2.3.4 + 2.3.4.(5-1) + 3.4.5.(6-2) + \dots + n(n+1)(n+2)[(n+3) - (n-1)]$$

$$\Rightarrow 4D = 1.2.3.4 + 2.3.4.5 - 1.2.3.4 + 3.4.5.6 - 2.3.4.5 + \dots + n(n+1)(n+2)(n+3) - (n-1)n(n+1)(n+2)$$

$$\Rightarrow 4D = n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$\Rightarrow D = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Vì $n; (n+1); (n+2); (n+3)$ là bốn số tự nhiên liên tiếp nên luôn có một số chia hết cho 3, ba số còn lại là chia hết cho chính nó $\Rightarrow n(n+1)(n+2)(n+3) : 4$

$\Rightarrow D$ là một số tự nhiên chia hết cho ba trong bốn số $n; (n+1); (n+2); (n+3)$

Bài 5: Cho biểu thức $E = 1.4 + 2.5 + 3.6 + \dots + n(n+3) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

a) Thu gọn biểu thức E .

b) Chứng minh $n(n+1)(n+5)$ luôn chia hết cho 3.

c) Chứng minh E luôn chia hết cho hai trong ba số $n; (n+1); (n+5)$

Lời giải

a) Ta có : $E = 1.4 + 2.5 + 3.6 + \dots + n(n+3) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ (1)

$$\Rightarrow E = 1.(2+2) + 2.(3+2) + 3.(4+2) + \dots + n(n+1+2)$$

$$\Rightarrow E = (1.2 + 2.1) + (2.3 + 2.2) + (3.4 + 2.3) + \dots + [n(n+1) + 2n]$$

$$\Rightarrow E = [1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1)] + (2.1 + 2.2 + 2.3 + \dots + 2n)$$

$$\Rightarrow E = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{(2n+2)n}{2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{3(n+1)n}{3}$$

$$\Rightarrow E = \frac{n(n+1)[(n+2)+3]}{3}$$

$$\Rightarrow E = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}$$

$$\text{Vậy } E = \frac{n(n+1)(n+5)}{3} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

b) Từ (1) suy ra E là số tự nhiên $\Rightarrow \frac{n(n+1)(n+5)}{3}$ là số tự nhiên $\Rightarrow n(n+1)(n+5) : 3$ (ĐPCM)

c) Ta có $n(n+1)(n+5) = n(n+1)(n+2+3)$ (2)

Lại có $n; (n+1); (n+2)$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên luôn có một số chia hết cho 3, nếu $(n+2)$ chia hết cho 3 thì $(n+2+3)$ cũng chia hết cho 3. (3)

Từ (2); (3) suy ra trong 3 số $n; (n+1); (n+5)$ luôn có một số chia hết cho 3, hai số còn lại là chia hết cho chính nó.

Suy ra E là số tự nhiên luôn chia hết cho hai trong ba số $n; (n+1); (n+5)$ (ĐPCM)

Bài 6: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì:

a. $S = (n+1)(n+2) \dots 2n : 2^n$ (tích $2n$ số nguyên dương đầu)

b. $P = (n+1)(n+2) \dots 3n : 3^n$ (tích $3n$ số nguyên dương đầu)

Lời giải

a) Xét biểu thức: $1.2 \dots n.S = 1.2.3 \dots n(n+1)(n+2) \dots (2n)$
 $= 2.4.6 \dots (2n).1.3.5 \dots (2n-1)$
 $= 2^n.(1.2.3 \dots n).1.3.5 \dots (2n-1)$
 $\Rightarrow S = 2^n.1.3.5 \dots (2n-1) : 2^n$

Vậy $S : 2^n$ (ĐPCM)

Xét biểu thức: $1.2.3 \dots n.P = 1.2.3 \dots n(n+1)(n+2) \dots (3n)$

b)

$$= [3.6 \dots (3n)].[1.2.4.5 \dots (3n-1)]$$

$$= 3^n.(1.2.3 \dots n).[1.2.4.5 \dots (3n-1)]$$

$$P = 3^n \cdot [1.2.4.5.....(3n - 1)] : 3^n$$

$$\text{Vậy } P : 3^n \text{ (ĐPCM)}$$

Bài 7: Chứng minh rằng: $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 100^3$ chia hết cho $B = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$

Lời giải

$$\text{Ta có: } B = (1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (50 + 51) = 101 \cdot 50$$

Để chứng minh A chia hết cho B ta chứng minh A chia hết cho 50 và 101

$$\text{Ta có: } A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 100^3 = (1^3 + 100^3) + (2^3 + 99^3) + \dots + (50^3 + 51^3)$$

$$\text{Với } n \text{ lẻ ta có: } a^n + b^n : a + b \quad (a, b \in \mathbb{N}^*)$$

Suy ra mỗi tổng trong ngoặc của A chia hết cho 101 nên $A : 101$ (1)

$$\text{Lại có: } A = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 49^3) + (51^3 + 52^3 + 53^3 + \dots + 99^3) + 50^3 + 100^3$$

$$A = (1^3 + 99^3) + (2^3 + 98^3) + \dots + (49^3 + 51^3) + (50^3 + 100^3)$$

Tương tự ta có mỗi tổng trong ngoặc của A chia hết cho 50 nên $A : 50$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra A chia hết cho 101.50 nên A chia hết cho B

Bài 8: Cho số tự nhiên $n \geq 1$, Chứng minh rằng: $S = 1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5 : (1 + 2 + 3 + \dots + n)$

Lời giải

$$\text{Đặt: } 2A = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) = n(n + 1)$$

$$\text{Mặt khác, với } n \text{ lẻ ta có: } a^n + b^n : a + b \quad (a, b \in \mathbb{N}^*)$$

$$2S = (1^5 + n^5) + [2^5 + (n - 1)^5] + \dots + (n^5 + 1) : n + 1$$

Nên

$$2S = [(1^5 + (n - 1)^5) + (2^5 + (n - 2)^5) + \dots + ((n - 1)^5 + 1)] + 2n^5 : n$$

Cũng có

$$(n; n + 1) = 1 \Rightarrow 2S : n(n + 1) = 2A \Rightarrow S : A$$

Mà

Dạng 5: Chứng minh chia hết từ một đẳng thức cho trước:

I. Phương pháp giải:

Cách 1: Từ đẳng thức đã cho biến đổi, lập luận để làm xuất hiện số bị chia, số chia. Từ đó dựa vào các tính chất chia hết lập luận suy ra điều phải chứng minh.

Cách 2: Biến đổi số bị chia làm xuất hiện vế trái hoặc vế phải của đẳng thức, thay số và lập luận suy ra điều phải chứng minh.

II. Bài toán

Bài 1: Chứng minh rằng:

$$\text{a) Nếu } \overline{ab} = 2\overline{cd} \text{ thì } \overline{abcd} : 67$$

b) Nếu $\overline{abc} = 2.\overline{deg}$ thì $\overline{abcdef} : 23; 29$

Lời giải

a) Ta có: $\overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd} = 200\overline{cd} + \overline{cd} = 201\overline{cd} : 67$

b) Ta có: $\overline{abcdef} = 1000\overline{abc} + \overline{deg} = 1000.2\overline{deg} + \overline{deg} = 2001\overline{deg} = \overline{deg}.23.29.3$

Bài 2: Cho số tự nhiên $\overline{ab}$ bằng 3 lần tích các chữ số của nó.

a) Chứng minh rằng: $b : a$

b) Đặt $b = ka$. Chứng minh rằng $10 : k$

c) Tìm số tự nhiên $\overline{ab}$

Lời giải

a) Theo bài ra có $\overline{ab} = 3ab \Rightarrow 10a + b = 3ab \quad (1)$

$$\Rightarrow 10a + b : a$$

$$\Rightarrow b : a \quad (\text{ĐPCM})$$

b) Thay $b = ka$ vào (1) ta được $10a + ka = 3a.ka$

$$\Leftrightarrow 10 + k = 3ak \quad (2)$$

$$\Rightarrow 10 + k : k$$

$$\Rightarrow 10 : k \quad (\text{ĐPCM})$$

c) Từ (2) $\Rightarrow k < 10$ mà $10 : k \Rightarrow k \in \{1; 2; 5\}$

Thay các giá trị của k vào (2) ta có các trường hợp:

$$+) \quad k = 1 \Rightarrow 11 = 3a \Rightarrow a = \frac{11}{3} \quad (\text{loại})$$

$$+) \quad k = 2 \Rightarrow 12 = 6a \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow \overline{ab} = 24$$

$$+) \quad k = 5 \Rightarrow 15 = 15a \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow \overline{ab} = 15$$

Vậy tìm được 2 số tự nhiên $\overline{ab}$ thỏa mãn đề bài là 24; 15

Bài 3: Cho ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 = c^2$, chứng minh rằng:

a. Trong hai số a, b có ít nhất một số chia hết cho 2

b. Trong hai số a, b có ít nhất một số chia hết cho 3

c. Trong hai số a, b có ít nhất một số chia hết cho 4

Lời giải

Chứng minh bài toán phụ: Một số chính phương khi chia cho 3; 4 chỉ có số dư là 0 hoặc 1.

(Bài 2, dạng 3, chủ đề này)

a. Giả sử cả a, b đều không chia hết cho 2 $\Rightarrow a^2, b^2$ chia 4 dư 1

$\Rightarrow a^2 + b^2$ chia 4 dư 2 $\Rightarrow c^2$ chia 4 dư 2 (mâu thuẫn vì c^2 cũng là số chính phương)

$\Rightarrow$ Điều giả sử là sai $\Rightarrow$ Trong hai số a, b có ít nhất một số chẵn.

Vậy trong hai số a, b có ít nhất một số chia hết cho 2.

b. Giả sử a, b đều không chia hết cho 3 $\Rightarrow a^2, b^2$ chia 3 dư 1

$\Rightarrow a^2 + b^2$ chia 3 dư 2 $\Rightarrow c^2$ chia 3 dư 2 (mâu thuẫn vì c^2 cũng là số chính phương)

$\Rightarrow$ Điều giả sử là sai $\Rightarrow$ Trong hai số a, b có ít nhất một số chia hết cho 3

c. Giả sử a, b đều không chia hết cho 4 $\Rightarrow a^2, b^2$ chia 4 dư 1

$\Rightarrow a^2 + b^2$ chia 4 dư 2 $\Rightarrow c^2$ chia 4 dư 2 (mâu thuẫn vì c^2 cũng là số chính phương)

$\Rightarrow$ Điều giả sử là sai $\Rightarrow$ Trong hai số a, b có ít nhất một số chia hết cho 4.

Bài 4: Cho ba số nguyên dương a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 = c^2$, chứng minh rằng: $abc : 60$

Lời giải

Ta có: $60 = 3.4.5$

+) Nếu a, b, c đều không chia hết cho 3 $\Rightarrow a^2, b^2, c^2$ chia cho 3 dư 1

$\Rightarrow a^2 + b^2$ chia cho 3 dư 2 $\Rightarrow a^2 + b^2 \neq c^2$,

Do đó trong 3 số a, b, c phải có ít nhất 1 số chia hết cho 3. Vậy $abc : 3$ (1)

+) Nếu a, b, c đều không chia hết cho 5

$\Rightarrow a^2, b^2, c^2$ chia 5 dư 1 hoặc 4 (vì SCP chỉ có tận cùng là 0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9

$\Rightarrow a^2 + b^2$ chia 5 dư 2 hoặc 3 $\Rightarrow a^2 + b^2 \neq c^2$

Do đó trong 3 số a, b, c phải có ít nhất 1 số chia hết cho 5. Vậy $abc : 5$ (2)

$\Rightarrow a^2, b^2, c^2$ chia 4 dư 1

+) Nếu a, b, c đều là các số không chia hết cho 4

$\Rightarrow a^2 + b^2$ chia 4 dư 2 $\Rightarrow a^2 + b^2 \neq c^2$

Do đó trong 3 số a, b, c phải có ít nhất 1 số chia hết cho 4. Vậy $abc : 4$ (3)

Ta thấy 3; 4; 5 đôi một nguyên tố cùng nhau nên kết hợp với (1),(2),(3) $\Rightarrow abc : 3.4.5$

$\Rightarrow abc : 60$ (ĐPCM)

Bài 5: Cho $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{18} = \frac{a}{b}$, chứng minh rằng $b : 2431$

Lời giải

Tách $2431 = 17.13.11$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{18} = \frac{a}{b}$$

Quy đồng A với mẫu chung là tích của các mẫu ta thấy rằng $b = 1.2.3. \dots .18$ có chứa 17.13.11

$k_1, k_2, k_3, \dots, k_{18}$ là các thừa số phụ tương ứng ta có $a = k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_{18}$ trong đó k_{11} không

Gọi chứa 11 ; k_{13} không chứa 13 ; k_{17} không chứa 17 nên a không chia hết cho 11; 13; 17 suy ra b luôn chứa

17.13.11 khi $\frac{a}{b}$ ở dạng tối giản $\Rightarrow b : 17.13.11 \Rightarrow b : 2431$

Vậy $b : 2431$ (ĐPCM)

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10.

Lời giải

Ta có : $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = (3^{n+2} + 3^n) - (2^{n+2} + 2^n) = 3^n(3^2 + 1) - 2^n(2^2 + 1)$

$$= 3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5 = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 10 = 10 \cdot (3^n - 2^{n-1}) \text{ chia hết cho 10.}$$

Vậy với mọi số nguyên dương n thì $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10.

Bài 2: Tìm số nguyên n sao cho $\frac{4n-1}{n-1}$ có giá trị là số nguyên.

Lời giải

Ta có $\frac{4n-1}{n-1}$ có giá trị là số nguyên khi $(4n-1) : (n-1)$ mà $4n-1 = 4(n-1) + 3$

$$\Rightarrow 3 : (n-1) \Rightarrow (n-1) \in \{\pm 1; \pm 3\} \Rightarrow n \in \{-2; 0; 2; 4\}$$

Vậy với $n \in \{-2; 0; 2; 4\}$ thì $\frac{4n-1}{n-1}$ có giá trị là số nguyên

Bài 3: Cho $S = 9^{23} + 5 \cdot 3^{43}$. Chứng minh rằng: $S : 32$

Lời giải

$$S = 9^{23} + 5 \cdot 3^{43} = 3^{46} - 5 \cdot 3^{43} = 3^{43}(3^3 - 5) = 3^{43} \cdot 32 : 32$$

Ta có

Vậy $S : 32$

Bài 4: Tìm số tự nhiên n thỏa mãn $(2n+7) : n+1$

Lời giải

Ta có $(2n+7) : n+1 \Leftrightarrow 2n+7 - 2(n+1) : n+1$

$$\Leftrightarrow (2n+7) - (2n+2) : n+1 \Leftrightarrow 2n+7 - 2n-2 : n+1 \Leftrightarrow 5 : n+1$$

$$\Rightarrow n+1 \in \{\pm 1; \pm 5\} \Rightarrow n \in \{-6; -2; 0; 4\}$$

$$n \in \mathbb{N} \text{ nên } n \in \{0; 4\}$$

Vì

$$\text{Vậy với } n \in \{0; 4\} \text{ thì } (2n+7) : n+1$$

Bài 5: Chứng minh rằng nếu a là một số lẻ không chia hết cho 3 thì $a^2 - 1 : 6$

Lời giải

Vì a là một số lẻ nên a^2 cũng là một số lẻ, suy ra $a^2 - 1 : 2$ (1)

Vì a là một số không chia hết cho 3 nên a có dạng $a = 3k + 1$ hoặc $a = 3k + 2$

$$+ \text{ Nếu } a = 3k + 1 \Rightarrow a^2 - 1 = (3k + 1)^2 - 1 = (3k + 1)(3k + 1) - 1 = 3k(3k + 1) + 3k : 3 \quad (2)$$

$$+ \text{ Nếu } a = 3k + 2 \Rightarrow a^2 - 1 = (3k + 2)^2 - 1 = (3k + 2)(3k + 2) - 1 = 3k(3k + 2) + 6k + 3 : 3 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) và $(2; 3) = 1$, suy ra $a^2 - 1 : 6$

Bài 6: Cho $S = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{98} - 3^{99}$. Tính S và tìm số dư khi chia 3^{100} cho 4.

Lời giải

$$\text{Ta có } S = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{98} - 3^{99}$$

$$3S = 3 - 3^2 + 3^3 - 3^4 + \dots + 3^{99} - 3^{100}$$

$$\Rightarrow S + 3S = 1 - 3^{100} \Rightarrow 4S = 1 - 3^{100} \Rightarrow S = \frac{(1 - 3^{100})}{4}$$

$$\text{Vì } S = \frac{(1 - 3^{100})}{4} \text{ mà } S \text{ là số nguyên} \Rightarrow (1 - 3^{100}) : 4$$

$$\Rightarrow 3^{100} \text{ chia cho 4 dư 1.}$$

Vậy 3^{100} chia cho 4 dư 1.

Bài 7: Cho $B = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100}$

a) Chứng tỏ B chia hết cho 4.

b) Tìm số dư trong phép chia B cho 13

Lời giải

$$\text{a) } B = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100}$$

$$B = (3 + 3^2) + (3^3 + 3^4) + \dots + (3^{99} + 3^{100})$$

$$B = 3 \cdot (1 + 3) + 3^3 \cdot (1 + 3) + \dots + 3^{99} \cdot (1 + 3)$$

$$B = 3 \cdot 4 + 3^3 \cdot 4 + \dots + 3^{99} \cdot 4$$

$$B = (3 + 3^3 + \dots + 3^{99}) \cdot 4 : 4$$

Vậy B chia hết cho 4

b) Ta có $B = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{100}$

Tổng B có 100 số hạng ta nhóm 3 số thành một nhóm ta được 33 nhóm và thừa ra một số:

$$B = 3 + (3^2 + 3^3 + 3^4) + (3^5 + 3^6 + 3^7) + \dots + (3^{98} + 3^{99} + 3^{100})$$

$$B = 3 + 3^2(1 + 3 + 3^2) + 3^5(1 + 3 + 3^2) + \dots + 3^{98}(1 + 3 + 3^2)$$

$$B = 3 + 3^2 \cdot 13 + 3^5 \cdot 13 + \dots + 3^{98} \cdot 13$$

$$B = 3 + (3^2 + 3^5 + \dots + 3^{98}) \cdot 13$$

Vì $(3^2 + 3^5 + \dots + 3^{98}) \cdot 13$ chia hết cho 13 nên $3 + (3^2 + 3^5 + \dots + 3^{98}) \cdot 13$ chia cho 13 dư 3

Vậy số dư trong phép chia B cho 13 là 3

Bài 8: Chứng minh rằng tổng $D = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100}$ chia hết cho 3 .

Lời giải

Ta có: $D = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100}$

$$D = (2 + 2^2) + (2^3 + 2^4) + \dots + (2^{99} + 2^{100})$$

$$D = 2(1 + 2) + 2^3(1 + 2) + \dots + 2^{99}(1 + 2)$$

$$D = 2 \cdot 3 + 2^3 \cdot 3 + \dots + 2^{99} \cdot 3$$

$$D = 3 \cdot (2 + 2^3 + \dots + 2^{99}) : 3$$

Bài 9: Chứng minh rằng: $1 + 5^2 + 5^4 + \dots + 5^{38}$ chia hết cho 26 .

Lời giải

Ta có: $1 + 5^2 + 5^4 + \dots + 5^{36} + 5^{38} = (1 + 5^2) + 5^4(1 + 5^2) + \dots + 5^{36}(1 + 5^2)$

$$= 26 + 5^4 \cdot 26 + \dots + 5^{36} \cdot 26$$

$$= 26(1 + 5^4 + \dots + 5^{36}) : 26$$

Hay $(1 + 5^2 + 5^4 + \dots + 5^{38}) : 26$

Bài 10: Cho $B = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$. Tìm số dư khi chia B cho 7.

Lời giải

Ta có: $B = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{99} + 2^{100}$

$$B = 2 + (2^2 + 2^3 + 2^4) + (2^5 + 2^6 + 2^7) + \dots + (2^{98} + 2^{99} + 2^{100})$$

$$B = 2 + 2^2(1 + 2 + 2^2) + 2^5(1 + 2 + 2^2) + \dots + 2^{98}(1 + 2 + 2^2)$$

$$B = 2 + 2^2 \cdot 7 + 2^5 \cdot 7 + \dots + 2^{98} \cdot 7$$

$$B = 2 + 7(2^2 + 2^5 + \dots + 2^{98})$$

Vì $7(2^2 + 2^5 + \dots + 2^{98})$ chia hết cho 7; 2 chia 7 dư 2

nên $2 + 7(2^2 + 2^5 + \dots + 2^{98})$ chia 7 dư 2 hay B chia cho 7 dư 2

Bài 11: Cho $M = 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + \dots + 4^{100}$. Chứng tỏ M chia hết cho 5.

Lời giải

Ta có: $M = 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + \dots + 4^{100}$

$$M = (4 + 4^2) + (4^3 + 4^4) + (4^5 + 4^6) + \dots + (4^{99} + 4^{100})$$

(100 số hạng nhóm thành 50 tổng nhỏ)

$$M = 4(1 + 4) + 4^3(1 + 4) + 4^5(1 + 4) + \dots + 4^{99}(1 + 4)$$

$$M = 4.5 + 4^3.5 + 4^5.5 + \dots + 4^{99}.5 = 5.(4 + 4^3 + 4^5 + \dots + 4^{99})$$

Do $4 + 4^3 + 4^5 + \dots + 4^{99}$ nguyên dương suy ra M chia hết cho 5

Bài 12: Cho $B = 999993^{1999} - 555557^{1997}$. Chứng minh rằng B chia hết cho 5

Lời giải

Ta có $999993^{1999} = 999993^{1996} . 999993^3 = (999993^4)^{499} . 999993^3 = (\overline{...1})^{499} . (\overline{...7}) = (\overline{...1}) . (\overline{...7}) = \overline{...7}$

Lại có $555557^{1997} = 555557^{1996} . 555557 = (555557^4)^{499} . 555557 = (\overline{...1})^{499} . (\overline{...7}) = (\overline{...1}) . (\overline{...7}) = \overline{...7}$

Suy ra $B = 999993^{1999} - 555557^{1997} = \overline{...7} - \overline{...7} = \overline{...0} : 5$

Vậy B chia hết cho 5. Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

Hướng dẫn tìm và tải các tài liệu ở đây

<https://forms.gle/LzVNwfMpYB9qH4JU6>