

Người làm: Bùi Thị Hoa

Zalo: Hoa Quỳnh - số đt zalo: 0935971103

Email: hoatnd2212@gmail.com

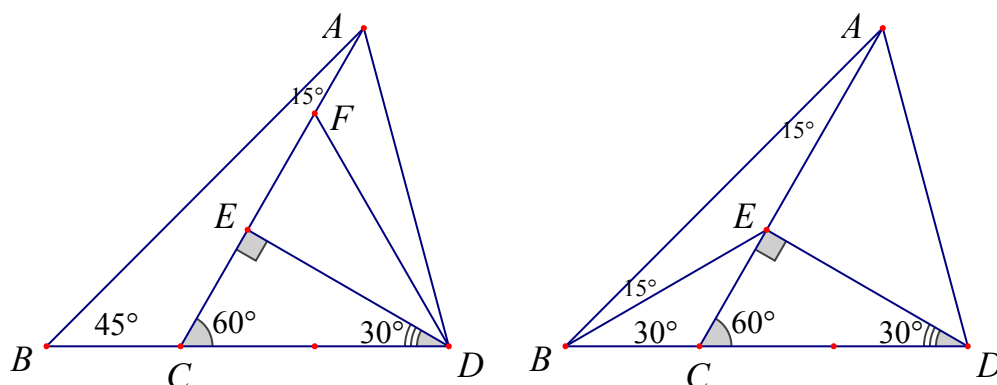
CD 13: PHẦN HÌNH HỌC

*Tính số đo góc, chứng minh hai góc bằng nhau

Câu 1. (HSG 7 huyện Đông Hưng 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $\angle BAC = 15^\circ$, $\angle ABC = 45^\circ$, trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 2CB$. Tính số đo $\angle ADC$.

Lời giải



$$DE \perp CA$$

Kẻ

Xét $\triangle ABC$, có $\angle ACB = 180^\circ - 45^\circ - 15^\circ = 120^\circ \Rightarrow \angle ACD = 60^\circ$ hay $\angle ECD = 60^\circ$.

Xét $\triangle CED$ có $\angle CED = 90^\circ$, $\angle ECD = 60^\circ \Rightarrow \angle EDC = 30^\circ$ nên $\triangle CED$ là nửa tam giác đều.

Trên tia đối của tia EC lấy điểm F sao cho $EC = EF$.

$\triangle DCF$ có đường cao DE đồng thời là trung tuyến và có $\angle ECD = 60^\circ$ nên là tam giác đều.

$$\Rightarrow CE = \frac{1}{2}CD \Rightarrow CE = CB \Rightarrow \triangle EBC \text{ cân tại } C$$

$$\Rightarrow \angle BEC = \angle ECB = 30^\circ = \angle EDC \Rightarrow \triangle EBD \text{ cân tại } E.$$

$$\Rightarrow \angle EBA = 15^\circ \Rightarrow \triangle BEA \text{ cân tại } E \Rightarrow EA = EB = ED \Rightarrow \triangle AED \text{ vuông cân} \Rightarrow \angle ADE = 45^\circ$$

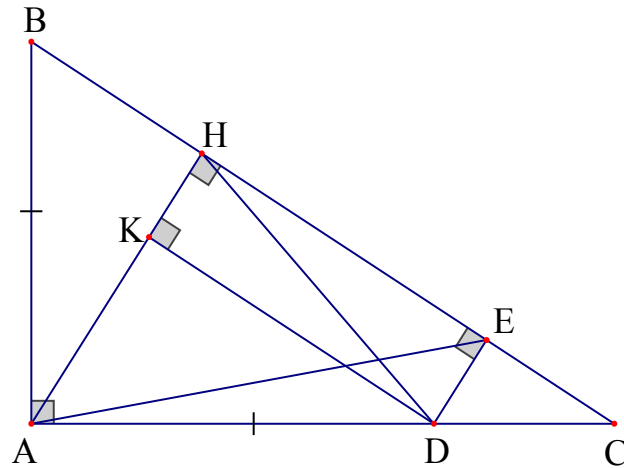
$$\angle ADB = \angle ADE + \angle EDB = 75^\circ$$

Vậy

Câu 2. (HSG 7 huyện Anh Sơn 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$. Vẽ $AH \perp BC$ ($H \in BC$), trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AD = AB$. Vẽ $DE \perp BC$. Tính số đo góc AEC .

Lời giải



Kẻ $DK \perp AH, (K \in AH)$

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} DE \perp BC \\ KH \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow DE \parallel KH$$

Xét tam giác KHD và tam giác EDH có :

$$\left. \begin{array}{l} AD \text{ chung} \\ \widehat{DKH} = \widehat{EDH} (\text{slt}) \\ \widehat{DKH} = \widehat{HED} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta KHD = \Delta EDH$$

(cạnh huyền- góc nhọn)

Nên $DK = EH$.

Vì:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{DAK} + \widehat{HAB} = 90^\circ \\ \widehat{HAB} + \widehat{HBA} = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{DAK} = \widehat{HBA}$$

Xét tam giác ADK và tam giác AHB có :

$$\left. \begin{array}{l} AD = AB \\ \widehat{DAK} = \widehat{ABH} (\text{cmt}) \\ \widehat{DKA} = \widehat{AHB} = (90^\circ) \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ADK = \Delta BAH$$

(cạnh huyền- góc nhọn)

$$\Rightarrow DK = AH \text{ mà } DK = EH \Rightarrow EH = HA.$$

Xét tam giác AHE có $\widehat{H} = 90^\circ$, $EH = AH$ nên tam giác AHE vuông cân tại $H \Rightarrow \widehat{AEH} = 45^\circ$.

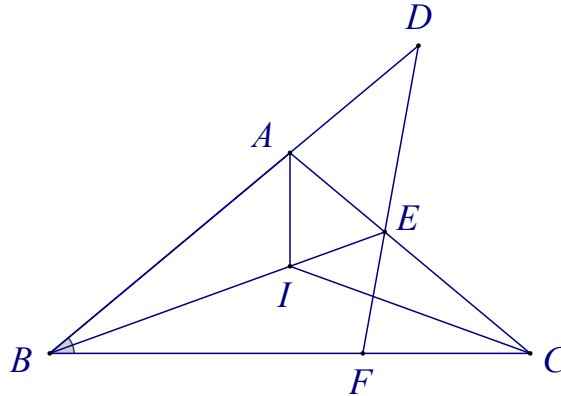
Mà $\widehat{AEH} + \widehat{CEA} = 180^\circ$ (hai góc kề bù) suy ra $\widehat{AEC} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

***Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau**

Câu 1. (HSG 7 huyện Lập Thạch – Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A , có $\angle A = 100^\circ$ và I là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác ABC . Trên tia BA lấy điểm D sao cho $BD = BC$. Đường thẳng BI cắt AC tại E , DE cắt BC tại F . Chứng minh rằng $FB = FD$.

Lời giải



$$\triangle ABC \text{ cân tại } A \text{ có } \angle A = 100^\circ \Rightarrow \angle B = \angle C = 40^\circ \quad (1)$$

Xét $\triangle BED$ và $\triangle BEC$ có

BE chung

$$\angle EBC = \angle EBD \text{ (do } BE \text{ là phân giác } \angle B)$$

$$BD = BC \text{ (gt)}$$

$$\text{Do đó } \triangle BED = \triangle BEC \text{ (c.g.c) suy ra } \angle BDE = \angle BCE \quad (2)$$

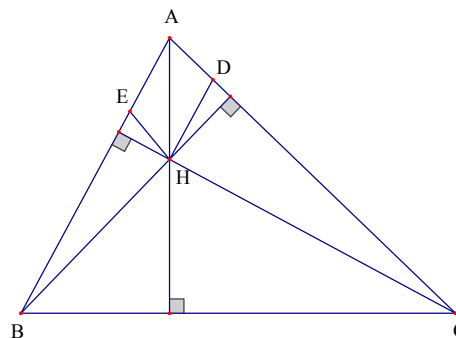
$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \angle BDE = \angle EBD (= 40^\circ). \text{ Suy ra } \triangle FBD \text{ cân tại } F \text{ suy ra } FB = FD$$

***Bất đẳng thức tam giác**

Câu 1. (HSG 7 huyện Yên Định 2022 - 2023)

Cho tam giác nhọn ABC , trực tâm H . Chứng minh rằng: $HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$

Lời giải



Qua H kẻ đường thẳng song song với AB cắt AC tại $D \Rightarrow CH \perp HD$ (vì $CH \perp AB, HD \parallel AB$)
Đường thẳng song song với AC cắt AB tại $E \Rightarrow BH \perp HE$ (vì $BH \perp AC, HE \parallel AC$)

$$\Delta AHD = \Delta HAE \left(\begin{matrix} \angle EHA = \angle HAD; AH \text{ chung}; \angle EAH = \angle AHD \end{matrix} \right)$$

Ta có

$$\Rightarrow AD = HE, AE = HD.$$

$$\text{Trong } \Delta AHD \text{ có } HA < HD + AD \text{ nên } HA < AE + AD \quad (1)$$

$$\text{Từ } BH \perp HE \Rightarrow \Delta HBE \text{ vuông nên } HB < BE \quad (2)$$

$$\text{Tương tự, ta có: } HC < DC \quad (3)$$

$$\text{Cộng vế theo vế (1), (2), (3) ta có: } HA + HB + HC < AB + AC \quad (4)$$

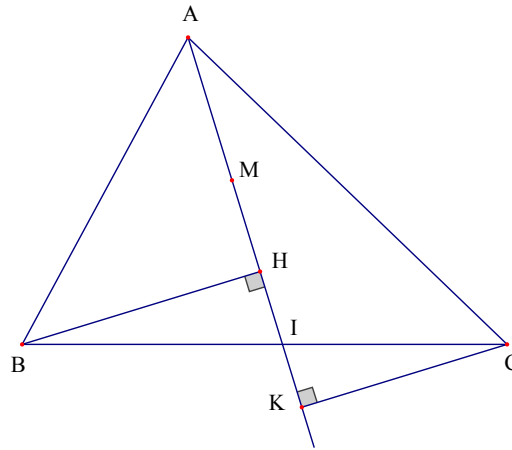
$$\text{Tương tự: } HA + HB + HC < AB + BC \quad (5) \text{ và } HA + HB + HC < AB + BC \quad (6)$$

$$\text{Cộng vế theo vế (4), (5), (6) suy ra } HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + AC + BC)$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Yên Phong 2022 - 2023)

Cho ΔABC nhọn. Gọi M là một điểm bất kì nằm trong tam giác, xác định vị trí của M để biểu thức: $MA \cdot BC + MB \cdot AC + MC \cdot AB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải



Kẻ BH và CK cùng vuông góc với AM , ta có:

$$S_{MAB} + S_{MAC} = \frac{1}{2} AM \cdot BH + \frac{1}{2} AM \cdot CK = \frac{1}{2} AM \cdot (BH + CK) \quad (1)$$

Mặt khác: $BH \leq BI; CK \leq CI$

$$\text{Suy ra: } BH + CK \leq BI + CI \text{ hay } BH + CK \leq BC \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } S_{MAB} + S_{MAC} = \frac{1}{2} AM \cdot (BH + CK) \leq \frac{1}{2} AM \cdot BC \quad (3)$$

Dấu “=” xảy ra khi $AM \perp BC$

Chứng minh tương tự ta được:

$$S_{MBC} + S_{MAB} \leq \frac{AC \cdot BM}{2} \quad (4)$$

$$S_{MBC} + S_{MAC} \leq \frac{AB \cdot MC}{2} \quad (5)$$

Từ (3), (4) và (5) ta được:

$$2[S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MAC}] \leq \frac{BC \cdot AM}{2} + \frac{AC \cdot BM}{2} + \frac{AB \cdot MC}{2}$$

$$\text{hay } 4S_{ABC} \leq MA \cdot BC + MB \cdot CA + MC \cdot AB$$

Dấu “=” xảy ra khi: $AM \perp BC, BM \perp AC, CM \perp AB$ Hay M là trực tâm của ΔABC .

Vậy GTNN của $MA.BC + MB.CA + MC.AB = 4.S_{ABC} = 4.S_{ABC}$

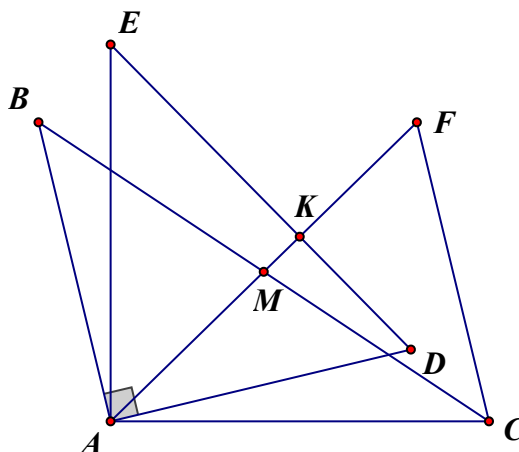
Xây ra khi: $AM \perp BC, BM \perp AC, CM \perp AB$. Hay M là trực tâm của $\triangle ABC$.

***Chứng minh song song, vuông góc**

Câu 1. (HSG 7 thành phố Ninh Bình 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có góc A tù. Kẻ $AD \perp AB$ và $AD = AB$ (tia AD nằm giữa hai tia của AB và AC). Kẻ $AE \perp AC$ và $AE = AC$ (tia AE nằm giữa hai tia của AB và AC). Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng: $AM \perp DE$.

Lời giải



Trên tia đối của tia MA lấy điểm F sao cho $AM = FM$

Gọi K là giao điểm của AF và ED .

Xét $\triangle AMB$ và $\triangle FMC$, có $BM = CM$ (gt); $\angle AMB = \angle FMC$ (đối đỉnh); $AM = FM$ (cách vẽ)

$\Rightarrow \triangle AMB = \triangle FMC$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = FC$ (1) và $\angle ABM = \angle FCM$ (2)

Từ (2) $\Rightarrow CF \parallel AB \Rightarrow \angle FCA + \angle BAC = 180^\circ$ (3)

$AD \perp AB \Rightarrow \angle BAE + \angle EAD = \angle BAD = 90^\circ$

$AE \perp AC \Rightarrow \angle CAD + \angle EAD = \angle CAE = 90^\circ$

Do đó $\angle BAE + \angle EAD + \angle CAD + \angle EAD = 180^\circ \Rightarrow \angle BAC + \angle EAD = 180^\circ$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \angle FCA = \angle EAD$

Xét $\triangle ADE$ và $\triangle CFA$, có $AD = CF$ (gt); $\angle FCA = \angle EAD$ (cmt); $AC = AE$ (gt)

$\Rightarrow \triangle ADE = \triangle CFA$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle AED = \angle CAF$

mà $\angle CAF + \angle FAE = \angle CAE = 90^\circ$ nên $\angle AED + \angle FAE = 90^\circ$ hay $\angle AEK + \angle KAE = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle AKE$ vuông tại $K \Rightarrow AM \perp DE$

***Hình khối trong thực tế**

Câu 1. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2022 - 2023)

Một bể cá hình hộp chữ nhật có chiều dài 60cm , chiều rộng 25cm và chiều cao 50cm . Để nuôi cá, người ta đổ 45 l nước và một tiểu cảnh bằng đá vào bể (nước ngập hết tiểu cảnh). Biết khi đó chiều cao mực nước trong bể là 34cm . Hãy tính thể tích tiểu cảnh.

Lời giải

Phần thể tích của bể cá chứa 45l và tiểu cảnh là: $60.25.34 = 51000 \text{ cm}^3 = 51 \text{ dm}^3 = 51(\text{l})$.

Thể tích của tiểu cảnh là: $51 - 45 = 6(\text{l}) = 6 \text{ dm}^3$

Vậy thể tích tiểu cảnh là 6 dm^3 .

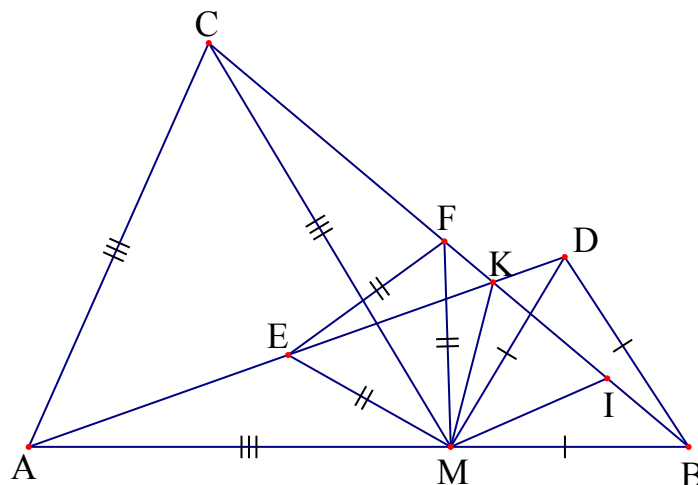
***Bài toán chứng minh tổng hợp**

Câu 1. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2022 - 2023)

Cho điểm M thuộc đoạn thẳng AB ($MA > MB$). Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là AB , vẽ các tam giác đều AMC, BMD . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD, BC . Gọi K là giao điểm của AD và BC . Chứng minh rằng:

- 1) $AD = BC$.
- 2) $\triangle AEM = \triangle CFM$, từ đó suy ra $\triangle MEF$ là tam giác đều.
- 3) $\frac{AK + BK - CK - DK}{KM} = 2$.

Lời giải



1) Do $\triangle AMC, \triangle BMD$ đều nên suy ra $AM = MC; BM = MD$.

Xét $\triangle AMD$ và $\triangle CMB$ có:

$$AM = CM$$

$$\angle AMD = \angle CMB (=120^\circ)$$

$$MB = MD$$

Do đó $\triangle AMD = \triangle CMB$ (c.g.c)

Suy ra $AD = BC$ (Hai cạnh tương ứng).

2) Do $E; F$ là trung điểm của $AD; BC$ nên ta có:

$$AE = ED = \frac{1}{2} AD; BF = FC = \frac{1}{2} BC$$

Mà $AD = BC$ nên $AE = ED = BF = FC$.

Xét $\triangle AEM$ và $\triangle CFM$ có:

$$AM = CM$$

$$AE = CF$$

$$\angle MAE = \angle MCF \text{ (Do } \triangle AMD = \triangle CMB \text{)}.$$

Do đó $\triangle AEM = \triangle CFM$ (c.g.c).

$\Rightarrow ME = MF$ (hai cạnh tương ứng) và $\angle AME = \angle CMF$ (Hai góc tương ứng)

$$\text{Mà } \angle AME + \angle EMC = 60^\circ \Rightarrow \angle CMF + \angle EMC = 60^\circ.$$

Xét $\triangle MEF$ có $ME = MF$ và $\angle EMF = 60^\circ$ nên $\triangle MEF$ đều.

3) Dễ dàng chứng minh được $\angle EKA = \angle KMF = \angle MKB = 60^\circ$.

Trên tia KB lấy điểm I sao cho $KI = KM$.

$\triangle KMI$ có $KI = KM$; $\angle MKI = 60^\circ$ nên $\triangle KMI$ là tam giác đều $\Rightarrow KM = KI = MI$.

Xét $\triangle KMD$ và $\triangle IMB$ có:

$$MK = MI$$

$$MD = MB$$

$$\angle KMD = \angle IMB \text{ (Vì cùng cộng với } \angle BMI \text{ bằng } 60^\circ)$$

Do đó $\triangle KMD = \triangle IMB$ (c.g.c)

Suy ra $KD = BI$ (Hai cạnh tương ứng)

Ta có:

$$AD = BC$$

$$\Rightarrow AK + KD = CK + KB$$

$$\Rightarrow AK + KB - CK - DK = 2.BK - 2.DK$$

$$\Rightarrow AK + BK - CK - DK = 2(BK - DK) = 2(BK - BI) = 2KI = 2KM$$

$$\Rightarrow \frac{AK + BK - CK - DK}{KM} = 2$$

Câu 2. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Thái Hòa 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Trên cùng nửa mặt phẳng chứa A bờ BC kẻ các tia Bx và Cy vuông góc với BC . Gọi M là điểm thuộc cạnh BC (M không trùng B và C). Đường thẳng vuông góc với AM tại A cắt Bx và Cy theo thứ tự ở D và E .

a) Chứng minh : $AM = AE$

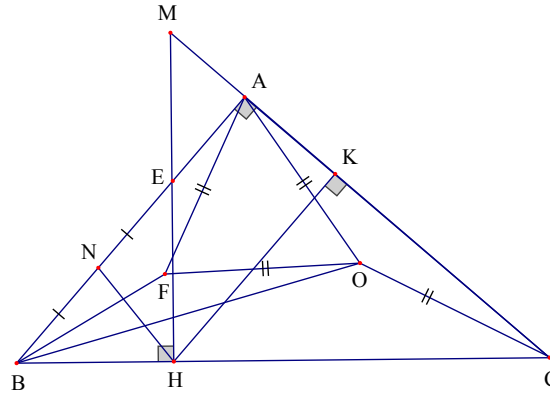
b) Tính số đo góc $\angle BME$

c) Lấy I nằm giữa A và D . Kẻ HE vuông góc với MI . Chứng minh HA là tia phân giác của góc $\angle EHI$.

Lời giải

Trang 8/24

Lời giải



a) Ta có: $\triangle BHE$ vuông tại H và $\angle EBH = 45^\circ$ ($\triangle ABC$ vuông cân tại A). Suy ra $\triangle BHE$ vuông cân tại H .

b) Ta có: $\begin{cases} AB \parallel HK \\ AB \perp AC \end{cases} \Rightarrow HK \perp AC \Rightarrow \triangle HKM$ vuông tại K (1)

Mà $\angle AEM = \angle BEH = 45^\circ$ (cặp góc đối đỉnh) và $\angle AEM = \angle KHM$ (cặp góc đồng vị) nên $\angle KHM = 45^\circ$ (2)
 Từ (1) và (2) suy ra $\triangle MKH$ vuông cân tại $K \Rightarrow MK = KH$.

Ta lại có: $CK = KH$ (vì $\triangle KHC$ vuông cân tại K) nên suy ra $MK = CK$ hay K là trung điểm của đoạn thẳng MC .

c) Dựng $\triangle AFO$ đều trong tam giác ABC .

Xét $\triangle AOE$ và $\triangle ABF$, ta có:

$$\begin{aligned} AO &= AF \\ \angle OAC &= \angle FAB \\ AB &= AC \end{aligned}$$

Suy ra $\triangle AOE = \triangle ABF$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle AFB = \angle AOC = 150^\circ$.

Khi đó: $\angle BFO = 360^\circ - \angle AFB - \angle AFO = 360^\circ - 150^\circ - 60^\circ = 150^\circ$.

Xét $\triangle AFB$ và $\triangle BFO$, ta có:

$$\begin{aligned} FO &= AF \\ \angle AFB &= \angle BFO \\ BF &\text{ là cạnh chung} \end{aligned}$$

Suy ra $\triangle AFB = \triangle BFO$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = OB$ (đpcm).

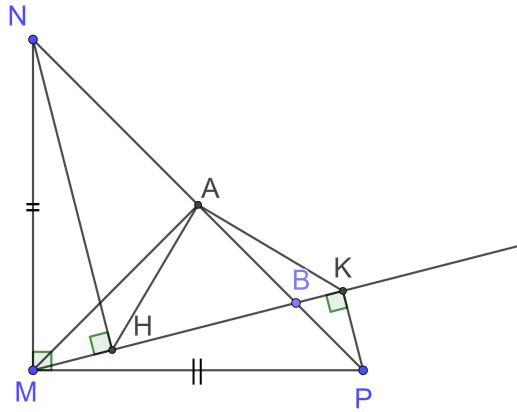
Câu 4. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2022 - 2023)

Cho tam giác MNP vuông cân tại M , A là trung điểm của NP . Điểm B nằm giữa hai điểm A và P . Kẻ NH và PK vuông góc với MB lần lượt tại H và K .

a) Chứng minh: $\triangle HMN = \triangle KPM$.

b) Chứng minh: $\triangle MAP$ là tam giác cân và $AH \perp AK$.

Lời giải



a) Chứng minh: $\triangle HMN = \triangle KPM$.

Vì $\triangle MNP$ vuông cân tại M nên : $\begin{cases} MN=MP \\ \angle MNP = \angle MPN = 45^\circ \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} \angle MNH + \angle NMH = 90^\circ \\ \angle PMK + \angle NMH = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \angle MNH = \angle PMK$

Xét $\triangle HMN$ và $\triangle KPM$ có $\begin{cases} MN=MP \\ \angle MNH = \angle PMK \\ \angle NHM = \angle PKP = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle HMN = \triangle KPM$ (cạnh huyền- góc nhọn)

Vậy $\triangle HMN = \triangle KPM$.

b) Chứng minh: $\triangle MAP$ là tam giác cân và $AH \perp AK$.

Vì $\triangle MNP$ vuông cân tại M nên trung tuyến MA đồng thời là đường phân giác, đường cao nên:

$$\begin{cases} MA \perp NP \\ \angle NMA = \angle PMA = \frac{1}{2} \angle NMP = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ \end{cases}$$

Xét $\triangle MAP$ có $\angle MPA = \angle PMA (=45^\circ) \Rightarrow \triangle MAP$ là tam giác cân.

Mặt khác theo định lí tổng ba góc của tam giác ta có:

$$\begin{aligned} \angle MAP + \angle MPA + \angle PMA &= 180^\circ \\ \Rightarrow \angle MAP &= 180^\circ - (\angle MPA + \angle PMA) = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ) = 90^\circ \end{aligned}$$

Vì $\angle MAP = 90^\circ \Rightarrow AM \perp AP$.

Xét $\triangle AMB$ có: $\angle AMB = 180^\circ - \angle MAB - \angle ABM = 180^\circ - 90^\circ - \angle ABM = 90^\circ - \angle ABM$ (3)

Xét $\triangle BKP$ có: $\angle BPK = 180^\circ - \angle BKP - \angle KBP = 180^\circ - 90^\circ - \angle KBP = 90^\circ - \angle KBP$ (4)

Mặt khác $\angle ABM = \angle KBP$ (2 góc đối đỉnh) (5)

Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow \angle AMB = \angle BPK$ hay $\angle AMH = \angle APK$

Xét $\triangle AHM$ và $\triangle AKP$ có $\begin{cases} AM=AP \\ \angle AMH = \angle APK \\ MH=PK \end{cases} \Rightarrow \triangle AHM = \triangle AKP$ (c-g-c)

Suy ra $\angle MAH = \angle PAK$ (hai góc tương ứng)

Lại có $\angle MAH + \angle HAP = 90^\circ$ (do $MA \perp AP$) $\Rightarrow \angle PAK + \angle HAP = 90^\circ \Rightarrow \angle HAK = 90^\circ \Rightarrow AH \perp AK$

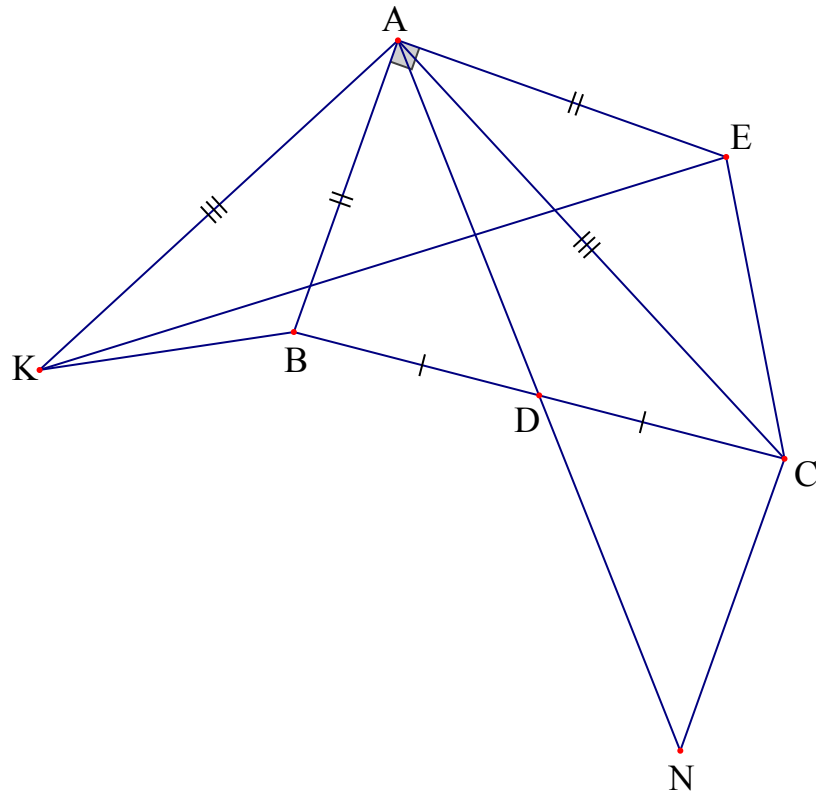
Câu 5. (HSG 7 huyện Anh Sơn 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), D là trung điểm BC . Trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB chứa điểm C , vẽ đoạn thẳng AE vuông góc với AB tại A và $AE = AB$. Trên nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AC , chứa điểm B vẽ đoạn AK vuông góc với AC tại A và $AK = AC$.

a) Chứng minh rằng: $EC = BK$.

b) Trên tia đối tia DA lấy điểm N sao cho $DN = DA$. Chứng minh $\triangle AKE = \triangle CAN$.

Lời giải



a) Vì $\angle KAB + \angle BAC = 90^\circ$; $\angle BAC + \angle CAE = 90^\circ$ nên $\angle KAB = \angle CAE$

Xét $\triangle KAB$ và $\triangle CAE$ có :

$$\left. \begin{array}{l} AK = AC \\ AB = AE \\ \angle KAB = \angle CAE \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle KAB = \triangle CAE (\text{c.g.c})$$

$$\Rightarrow EC = BK \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

b) Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CND$ có :

$$\left. \begin{array}{l} AD = DN \\ BD = DC \\ \angle ADB = \angle CND \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD = \triangle CND (\text{c.g.c})$$

$$\Rightarrow AB = CN = AE$$

Vì $\triangle ABD = \triangle CND (\text{cmt}) \Rightarrow \angle BAD = \angle CND$

Mà chúng ở vị trí so le trong $\Rightarrow AB \parallel NC$

Ta có

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel NC \\ AB \perp AE \end{array} \right\} \Rightarrow NC \perp AE$$

Lại có : $\angle EAK = 90^\circ + \angle AEC$

Mà : $AE \perp NC \Rightarrow \angle ACN = \angle AEC + 90^\circ$

$$\Rightarrow \angle KAE = \angle ACN$$

Xét $\triangle AKE$ và $\triangle ACN$ có :

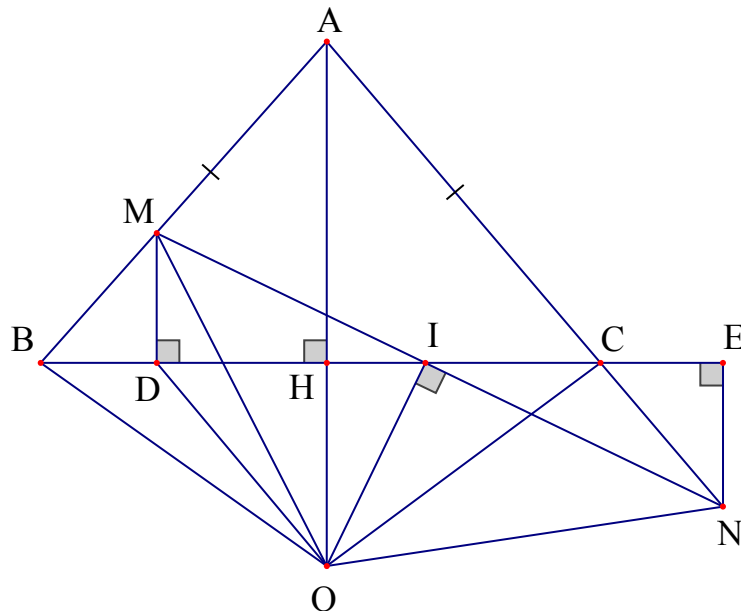
$$\left. \begin{array}{l} AK = AC \\ AE = CN \\ \sphericalangle AKE = \sphericalangle ACN \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AKE = \triangle CAN (\text{c.g.c})$$

Câu 6. (HSG 7 huyện NGHĨ SƠN 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy điểm D , trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $CE = BD$. Đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D cắt AB tại M . Đường thẳng vuông góc với BE tại E cắt AC tại N .

- 1) Chứng minh $\Delta MBD = \Delta NCE$
- 2) Cạnh BC cắt MN tại I . Chứng minh I là trung điểm của MN .
- 3) Chứng minh đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua một điểm O cố định khi D thay đổi trên đoạn BC .

Lời giải



1. Ta có tam giác ABC cân tại A (gt) $\Rightarrow \angle ABC = \angle ACB$

Mà $\sphericalangle NCE = \sphericalangle ACB$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \sphericalangle NCE = \sphericalangle ABC$

Xét $\triangle MBD$ và $\triangle NCE$ có: $\angle NCE = \angle ABC$ (cmt); $\angle E = \angle D = 90^\circ$; $CE = BD \Rightarrow \triangle MBD = \triangle NCE$ (g.c.g)

2. Ta có $\Delta MBD = \Delta NCE$ (cmt) $\Rightarrow MD = NE; BM = CN$ (cạnh tương ứng)

Lại có $MD \parallel NE$ (cùng vuông góc với BC) $\Rightarrow \angle DMI = \angle ENI$ (so le trong)

Xét $\triangle DMI$ và $\triangle ENI$ có: $\widehat{DMI} = \widehat{ENI}$ (cmt); $\widehat{E} = \widehat{D} = 90^\circ$; $MD = NE$ (cmt)
 $\Rightarrow \triangle DMI = \triangle ENI$ (g.c.g) $\Rightarrow MI = NI$ suy ra I là trung điểm của MN (đpcm)

3. Từ B và C kẻ các đường thẳng vuông góc với AB và AC chúng cắt nhau tại O .

Xét $\triangle ABO$ và $\triangle ACO$ có: Chung cạnh AO ; $\widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$; $AB = AC$ ($\triangle ABC$ cân tại A)
 $\Rightarrow \triangle ABO = \triangle ACO$ (cạnh huyền- cạnh góc vuông) $\Rightarrow OB = OC$

Xét $\triangle MBO$ và $\triangle NCO$ có: $OB = OC$ (cmt); $\widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$; $BM = CN$ (cmt)
 $\Rightarrow \triangle MBO = \triangle NCO$ (cạnh huyền- cạnh góc vuông) $\Rightarrow OM = ON$

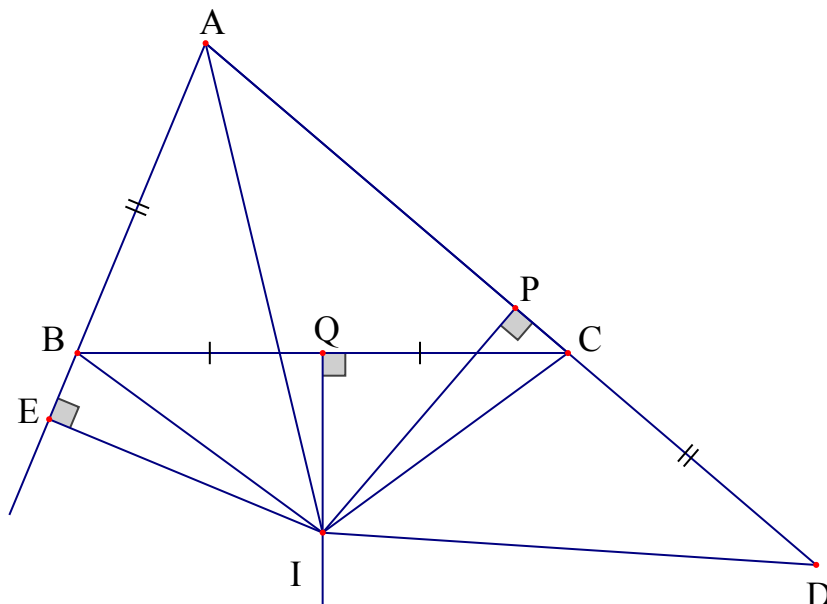
$\Rightarrow O$ thuộc đường trung trực của MN do đó đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua điểm O cố định khi D thay đổi trên đoạn BC .

Câu 7. (HSG 7 huyện Vĩnh Yên 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Trên tia đối của tia CA lấy điểm D sao cho $CD = AB$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AD và BC , I là giao điểm của các đường vuông góc với AD và BC tại P và Q .

- 1) Chứng minh $\triangle AIB = \triangle DIC$
- 2) Chứng minh AI là tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$
- 3) Kẻ IE vuông góc AB , chứng minh $AE = \frac{1}{2} AD$

Lời giải



$$IB = IC, IA = ID$$

1) Ta có

Lại có $AB = CD$ (gt)

Do đó $\triangle AIB = \triangle DIC$ (c.c.c)

2) Vì $\triangle AIB = \triangle DIC$ (c.c.c) nên $\widehat{IAB} = \widehat{IDC}$ (2 góc tương ứng)

$\triangle IAD$ có IP vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao nên $\triangle IAD$ cân tại I , suy ra $\angle IDC = \angle IAD$

Do đó, $\angle IAD = \angle IAB$, suy ra AI là phân giác của $\angle BAC$

3) Kẻ $IE \perp AB$, ta có $\triangle AIE = \triangle AIP$ (cạnh huyền-góc nhọn)

$\Rightarrow AE = AP$, mà $AP = \frac{1}{2} AD$ (vì P là trung điểm của AD). Suy ra $AE = \frac{1}{2} AD$

Câu 8. (HSG 7 huyện Đông Hưng 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$.

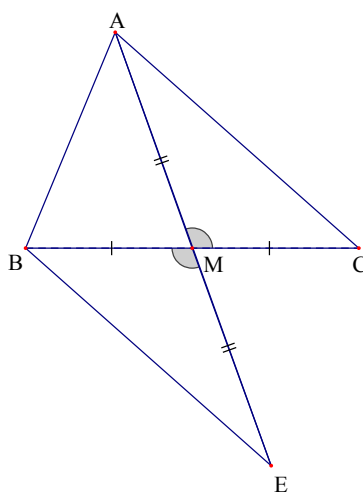
$$AC = EB \quad AC \parallel BE$$

a) Chứng minh rằng: và .

b) Gọi I là một điểm trên AC ; K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng.

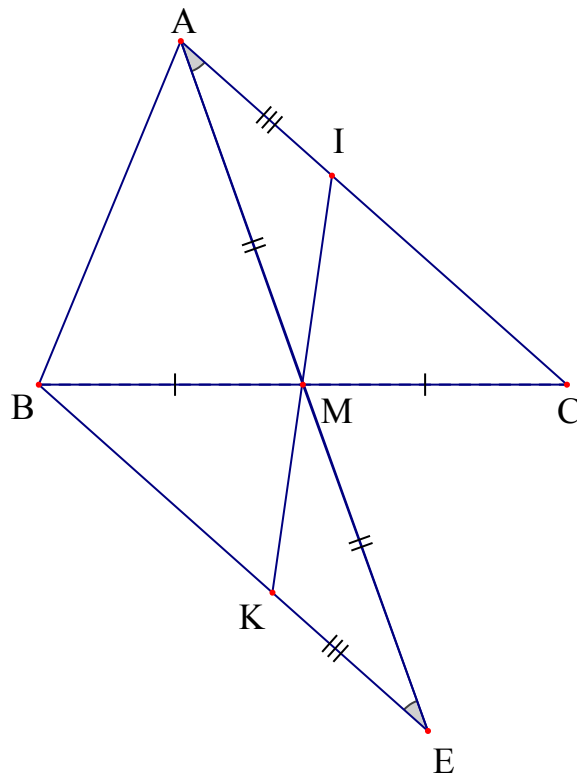
c) Từ B kẻ $BP \perp AM$, từ C kẻ $CQ \perp AM$ ($P, Q \in AE$). Chứng minh $AP + AQ = 2AM$.

Lời giải



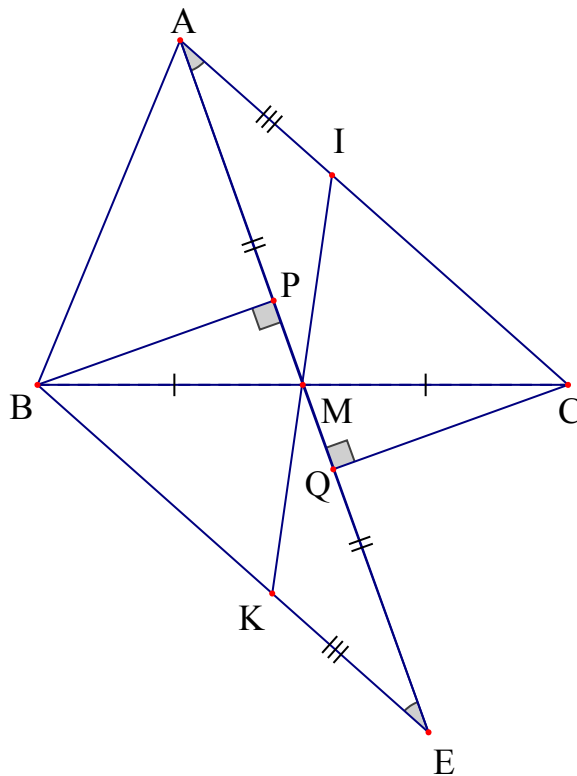
a) Ta có $\triangle AMC = \triangle EMB$ (Vì $BM = MC; \angle BME = \angle CMA; AM = ME \Rightarrow AC = BE$ và $\angle A_1 = \angle E_1 \Rightarrow AC \parallel BE$)

ở vị trí so le trong suy ra .



b) Chứng minh được (Vi)
 $\Delta AMI = \Delta EMK$ $AI = EK$; $\angle AMI = \angle EMK$ (slt); $AM = ME \Rightarrow \angle KME = \angle IMA$

Từ đó $\angle AME = \angle IMA + \angle KME$ hay $180^\circ = \angle IMA + \angle AMI \Rightarrow \angle KMI = 180^\circ \Rightarrow I, M, K$ thẳng hàng.



c) Ta có $\Delta BPM = \Delta CQM$ (Vì $\angle BPM = \angle CQM = 90^\circ; BM = CM; \angle MBP = \angle MCQ$)

$$\Rightarrow PM = QM \Rightarrow AP + AQ = AM - PM + AM + MQ = 2AM$$

Câu 9. (HSG 7 huyện Hà Trung 2022 - 2023)

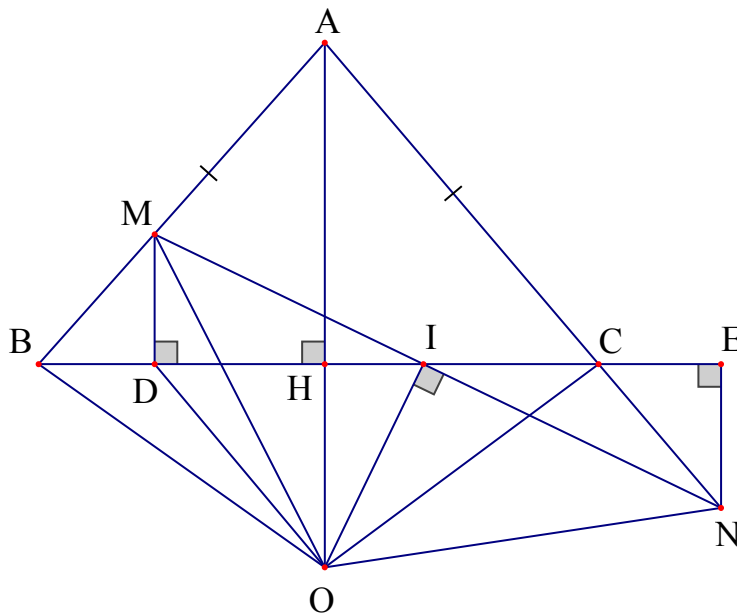
Cho tam giác ABC cân tại A , Trên cạnh BC lấy điểm D , trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB, AC lần lượt ở M, N .

a) Chứng minh rằng: $DM = EN$

b) MN cắt BC tại I . Chứng minh I là trung điểm của MN

c) Chứng minh rằng đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC .

Lời giải



a) Xét ΔBDM và ΔCEN có :

$$\angle MDB = \angle NEC = 90^\circ (MD \perp BC; NE \perp BC)$$

$$BD = CE (gt)$$

$$\angle MBD = \angle NCE (= \angle ACB)$$

$$\Rightarrow \Delta BDM = \Delta CEN (g.c.g) \Rightarrow DM = EN \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

b) Xét ΔMDI và ΔNEI có:

$$\angle MDI = \angle NEI = 90^\circ (MD \perp BC; NE \perp BC)$$

$$DM = EN (cmt)$$

$$\angle DMI = \angle ENI \text{ (2 góc so le trong do } DM \parallel EN \text{)}$$

$\Rightarrow \Delta MDI = \Delta NEI$ (g.c.g) $\Rightarrow IM = IN$ (hai cạnh tương ứng). Vậy I là trung điểm của MN .

c) Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC , O là giao điểm của AH với đường thẳng vuông góc với MN kẻ từ I . Ta cần chứng minh O là điểm cố định.

Nối O với B, C . Vì đường thẳng OA cố định nên cần chứng minh OC cố định hay $OC \perp AC$

Ta có tam giác ABC cân tại A nên đường cao AH đồng thời là đường phân giác $\Rightarrow \angle BAH = \angle CAH$

$$\Delta OAB = \Delta OAC \left(AB = AC; \angle BAO = \angle CAO; AO \text{ chung} \right) \Rightarrow \angle OBA = \angle OCA$$

Ta có (1)

Xét ΔMON có đường cao OI cũng là trung tuyến nên ΔMON là tam giác cân tại $O \Rightarrow OM = ON$ Xét

ΔOBM và ΔOCN có $OM = ON; BM = CN; OB = OC \Rightarrow \Delta OBM = \Delta OCN$ (c.c.c) $\Rightarrow \angle OBA = \angle OCN$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle OCA = \angle OCN$ mà $\angle OCA + \angle OCN = 180^\circ \Rightarrow \angle OCA = \angle OCN = 90^\circ \Rightarrow OC \perp AC$

Vì AC cố định mà $OC \perp AC \Rightarrow O$ là điểm cố định. Vậy khi D di chuyển trên cạnh BC thì đường thẳng vuông góc MN tại I luôn đi qua một điểm cố định.

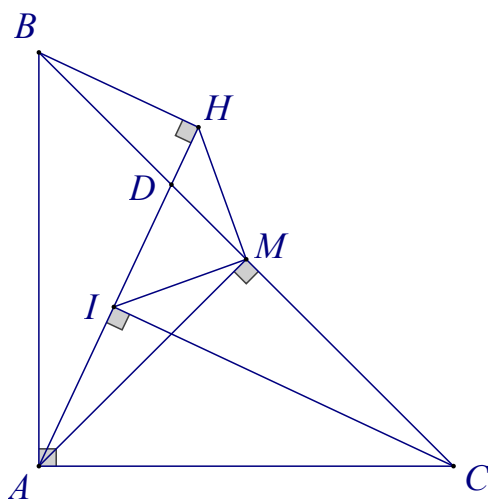
Câu 10. (HSG 7 huyện Lập Thạch 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Gọi M là trung điểm của BC , D là điểm thuộc đoạn BM (D khác B và M). Kẻ các đường thẳng BH, CI lần lượt vuông góc với đường thẳng AD tại H và I . Chứng minh rằng

a) $\angle BAM = \angle ACM$ và $BH = AI$.

b) Tam giác MHI vuông cân.

Lời giải



a) ΔABC vuông cân tại A có M là trung điểm của BC nên AM là phân giác của $\angle A$

$$\angle BAM = \frac{\angle BAC}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

Suy ra

Mặt khác $\angle ACM = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$. Từ đó suy ra $\angle BAM = \angle ACM (=45^\circ)$

Ta có $\angle BAH = \angle ACI$ (cùng phụ với $\angle DAC$)

Xét $\triangle AIC$ và $\triangle BHA$ có :

$$\angle BAH = \angle ACI \text{ (chứng minh trên)}$$

$$AB = AC \text{ (do } \triangle ABC \text{ vuông cân tại A)}$$

Do đó $\angle AIC = \angle BHA$ (cạnh huyền – góc nhọn). Suy ra $BH = AI$ (hai cạnh tương ứng)

b) Tam giác ABC vuông cân tại A có M là trung điểm BC nên AM cũng là đường cao suy ra $AM \perp BC$

$\triangle AMC$ vuông tại M và có $\angle C = 45^\circ$ suy ra $\triangle AMC$ vuông cân tại M suy ra $AM = MC$.

Ta lại có $\angle HAM = \angle ICM$ (cùng phụ với $\angle ADM$)

Xét $\triangle HAM$ và $\triangle ICM$ có

$$AM = MC \text{ (cmt)}$$

$$\angle HAM = \angle ICM$$

$$AH = CI \text{ (do } \angle AIC = \angle BHA)$$

Do đó: $\triangle HAM = \triangle ICM$ (c.g.c) suy ra $HM = MI$ (hai cạnh tương ứng) (*)

Do $\triangle HAM = \triangle ICM \Rightarrow \angle HMA = \angle ICM \Rightarrow \angle HMB = \angle IMA$ (do $\angle AMB = \angle AMC = 90^\circ$)

Suy ra $\angle HMI = 90^\circ$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $\triangle MIH$ vuông cân.

Câu 11. (HSG 7 huyện Yên Định 2022 - 2023)

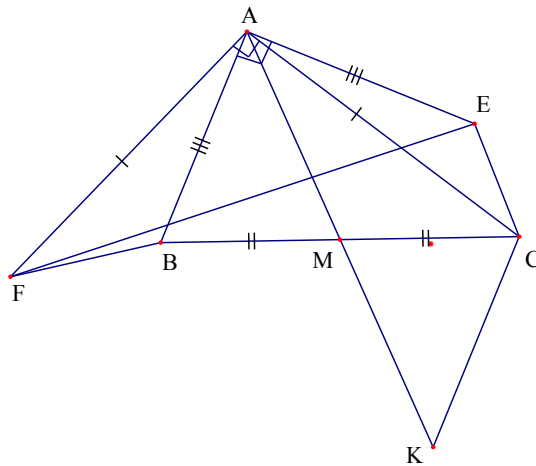
Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh C bờ là đường thẳng AB dựng đoạn AE vuông góc với AB và $AE = AB$. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh B bờ là đường thẳng AC dựng đoạn AF vuông góc với AC và $AF = AC$. Chứng minh rằng:

a) $FB = EC$

b) $EF = 2AM$

c) $AM \perp EF$

Lời giải



a) Xét $\triangle ABF$ và $\triangle AEC$ có: $AE = AB$ (gt); $AF = AC$ (gt); $\angle FAB = \angle EAC$ (cùng bù với $\angle BAC$)
 $\Rightarrow \triangle ABF = \triangle AEC$ (c.g.c) $\Rightarrow FB = EC$. Vậy: $FB = EC$

b) Trên tia đối của tia MA lấy K sao cho $AK = 2AM$.

$$\triangle ABM = \triangle KCM \left(BM = MC; \angle BMA = \angle CMK; AM = MK \right)$$

Ta có

$$\Rightarrow \angle BAM = \angle MKC \text{ mà hai góc này ở vị trí so le trong } \Rightarrow CK \parallel AB$$

$$\Rightarrow \angle ACK + \angle CAB = \angle EAF + \angle CAB = 180^\circ \Rightarrow \angle ACK = \angle EAF$$

$$\triangle EAF \text{ và } \triangle KCA \text{ có: } AE = AB = CK; AF = AC \text{ (gt); } \angle ACK = \angle EAF$$

$$\Rightarrow \triangle EAF = \triangle KCA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow EF = AK = 2AM$$

$$\triangle EAF = \triangle KCA \Rightarrow \angle EAK = \angle FEA \Rightarrow \angle FEA + \angle FAK = \angle EAK + \angle FAK = 90^\circ \Rightarrow AK \perp EF$$

c) Từ

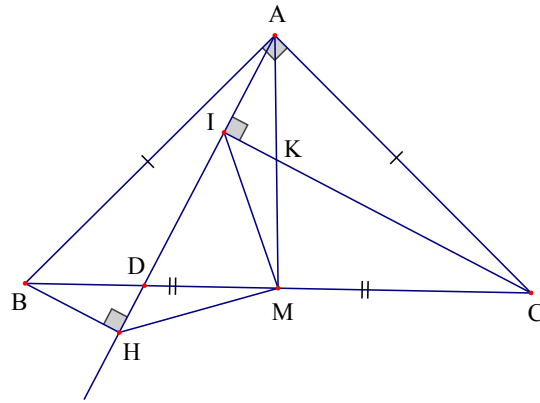
Câu 12. (HSG 7 huyện Yên Phong 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A , gọi M là trung điểm của BC . Lấy điểm D bất kì thuộc đoạn BM (D không trùng với B và M). Gọi H và I theo thứ tự là hình chiếu của B và C xuống đường thẳng AD ; AM cắt CI tại K .

a) CMR: $BH = AI$.

b) CMR: $\triangle HMI$ vuông cân.

Lời giải



a) Xét $\triangle AHB$ và $\triangle CIA$ có:

$$\angle AHB = \angle AIC \text{ (cùng bằng } 90^\circ \text{)}$$

$$AB = AC \text{ (do } \triangle ABC \text{ vuông cân tại } A \text{)}$$

$$\angle BAH = \angle ACI \text{ (cùng phụ với } \angle HAC \text{)}$$

$$\Rightarrow \triangle AHB = \triangle CIA \text{ (cạnh huyền - góc nhọn)} \Rightarrow BH = AI \text{ (hai cạnh tương ứng) (đpcm)}$$

b) Vì $\triangle ABC$ vuông cân tại A nên AM vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao của $\triangle ABC$. Suy ra $AM \perp BC$ tại M .

Xét $\triangle IAK$ và $\triangle MCK$ có:

$$\angle AIK = \angle MCK (=90^\circ); \angle AKI = \angle MKC \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$\text{Suy ra: } 180^\circ - (\angle AIK + \angle IAK) = 180^\circ - (\angle MCK + \angle MKC) \Rightarrow \angle IAK = \angle MCK \text{ (1)}$$

Mặt khác:

$$\left. \begin{array}{l} BH \perp AD \\ CI \perp AD \end{array} \right\} \Rightarrow BH \parallel CI \Rightarrow \angle HCM = \angle HBM \text{ (hai góc so le trong) (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \Rightarrow \angle HBM = \angle HAM$$

Xét $\triangle HBM$ và $\triangle IAM$ có:

$$MB = MA$$

$$\angle HBM = \angle IAM$$

$$BH = AI \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\text{Suy ra: } \triangle HBM = \triangle IAM \text{ (c.g.c)} \Rightarrow MH = MI \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$$\text{Suy ra: } \triangle HMI \text{ cân tại } M. \quad (4)$$

$$\text{Mặt khác: } \triangle HBM = \triangle IAM \Rightarrow \angle HMB = \angle IMA \text{ (hai góc tương ứng)}$$

$$\text{Suy ra: } \angle HMB + \angle IMB = \angle AMI + \angle IMB = \angle AMB = 90^\circ \Rightarrow \angle HMI = 90^\circ \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra $\triangle HMI$ vuông cân tại M (đpcm).

Câu 13. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2022 - 2023)

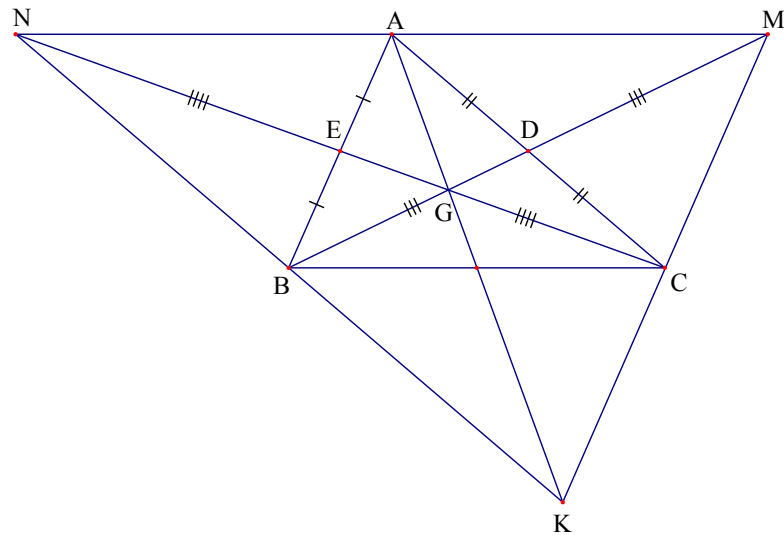
Cho tam giác nhọn ABC có các trung tuyến BD và CE cắt nhau tại G . Trên tia đối của tia DB lấy điểm M sao cho $DB = DM$. Trên tia đối của tia EC lấy điểm N sao cho $EN = EC$. Chứng minh rằng:

a) $\triangle ADM = \triangle CDB$ và 3 điểm M, A, N thẳng hàng.

b) $BM + CN > 3BC$

c) Các đường thẳng AG, NB, MC đồng quy.

Lời giải:



a) Chứng minh $\triangle ADM = \triangle CDB$ và 3 điểm M, A, N thẳng hàng.

xét $\triangle ADM$ và $\triangle CDB$ có

$AD = CD$ (BD là trung tuyến $\triangle ABC$)

$DB = DM$ (gt)

$\angle ADM = \angle CDB$ (hai góc đối đỉnh)

Suy ra $\triangle ADM = \triangle CDB$ (c.g.c)

Tương tự ta có $\triangle AEN = \triangle BEC$ (c.g.c)

Vì $\triangle ADM = \triangle CDB$ nên $\angle MAD = \angle BCD$ hay $\angle MAC = \angle BCA$ (1)

$\triangle AEN = \triangle BEC$ nên $\angle EAN = \angle EBC$ hay $\angle BAN = \angle ABC$ (2)

Xét $\triangle ABC$ có $\angle BCA + \angle CBA + \angle ABC = 180^\circ$ (tổng ba góc trong một tam giác) (3)

Từ (1); (2) và (3) suy ra $\angle MAC + \angle CAB + \angle BAN = 180^\circ$ do đó ba điểm M, A, N thẳng hàng.

b) Chứng minh $BM + CN > 3BC$

Vì $\triangle ADM = \triangle CDB$ nên $AM = BC$ (hai cạnh tương ứng) (4)

$\triangle AEN = \triangle BEC$ nên $AN = BC$ (hai cạnh tương ứng) (5)

Xét $\triangle MNG$ có $GN + GM > MN$ (Bất đẳng thức trong tam giác)

Hay $GN + GM > AM + AN$ (vì $MN = AM + AN$) (6)

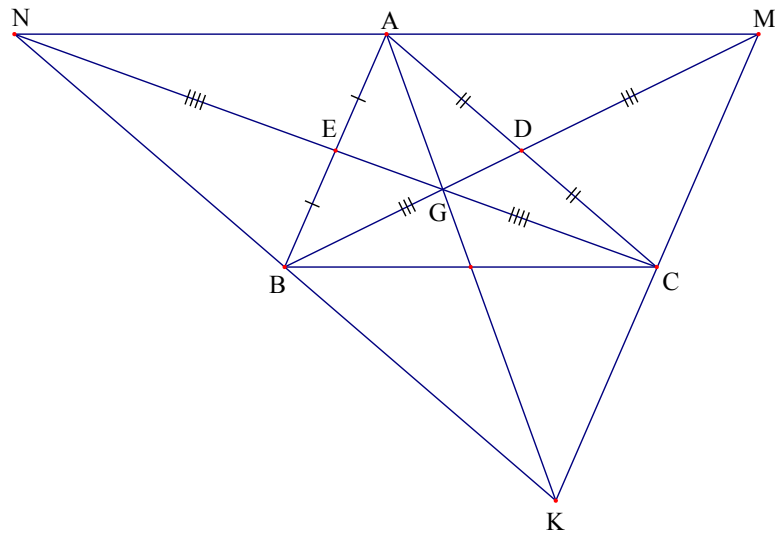
Từ (4); (5); (6) suy ra $GN + GM > 2BC$ (*)

Xét $\triangle BGC$ có $BG + GC > BC$ (Bất đẳng thức trong tam giác) (**)

Ta có $BM + CN = BG + GM + CG + GN = (BG + CG) + (GN + GM)$ (***)

Từ (*) ; (**) và (***) suy ra $BM + CN > 3BC$

c) Chứng minh các đường thẳng AG, NB, MC đồng quy.



Gọi K là giao điểm của NB và MC

Xét $\triangle ADB$ và $\triangle CDM$ có

$AD = DC$ (gt); $\angle ADB = \angle CDM$ (hai góc đối đỉnh); $BD = DM$ (gt) $\Rightarrow \triangle ADB = \triangle CDM$ (c.g.c)
 $\Rightarrow \triangle ADB = \triangle CDM$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle DAB = \angle DCM$ Mà $\angle DAB$ và $\angle DCM$ ở vị trí so le trong do đó $AB \parallel CM$

Ta có $\triangle AEN = \triangle BEC$ (theo câu a) $\Rightarrow \angle NAE = \angle CBE$ mà $\angle NAE$ và $\angle CBE$ ở vị trí so le trong do đó $BC \parallel MN$

Ta có $AB \parallel CM \Rightarrow \angle NAB = \angle AMC$ (Hai góc đồng vị)

$BC \parallel MN \Rightarrow \angle BCK = \angle AMC$ (hai góc đồng vị)

suy ra $\angle NAB = \angle BCK$

Xét $\triangle ABN$ và $\triangle CBK$ có

$\angle NAB = \angle BCK$ (chứng minh trên)

$AN = BC$ (chứng minh trên)

$\angle ANB = \angle BCK$ (hai góc đồng vị do $BC \parallel MN$)

Suy ra $\triangle ANB = \triangle CBK$ (g.c.g) do đó $NB = BK$

Vì $NB = BK$ nên B là trung điểm của cạnh NK

Chứng minh tương tự có C là trung điểm của MK

Xét $\triangle MNK$ có MB, NC là các đường trung tuyến $\Rightarrow G$ là trọng tâm của $\triangle MNK \Rightarrow KG$ cũng là trung tuyến của $\triangle MNK$ mà A là trung điểm của MN (vì theo câu a $AN = AM$) $\Rightarrow A, G, K$ thẳng hàng

Vậy các đường thẳng AG, NB, MC đồng quy.

Câu 14. (HSG 7 Thành Phố Ninh Bình 2022 - 2023)

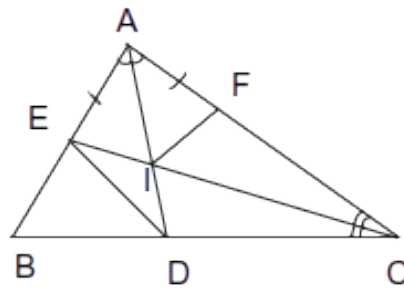
Cho tam giác ABC vuông tại A , K là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia KA lấy D sao cho $KD = KA$.

a) Chứng minh: $CD \parallel AB$.

b) Gọi H là trung điểm của AC ; BH cắt AD tại M ; DH cắt BC tại N . Chứng minh rằng: $\triangle ABH = \triangle CDH$.

c) Chứng minh: $\triangle HMN$ cân.

Lời giải



a) Ta có: $\triangle ABC$; $AB < AC$,

Suy ra: $\angle C < \angle B$ (Quan hệ giữa góc và cạnh đối diện trong tam giác)

Mà: $\angle ABC = 60^\circ$ (gt) $\Rightarrow \angle C < 60^\circ$ (1)

Mặt khác: $\angle BAC = 180^\circ - (\angle B + \angle C) = 180^\circ - 60^\circ - \angle C = 120^\circ - \angle C$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle BAC > 60^\circ \Rightarrow \angle BAC > \angle B \Rightarrow BC > AC$

b) Ta có: $\angle ABC = 60^\circ$, suy ra $\angle BAC + \angle ABC = 120^\circ$

Mà AD là tia phân giác của $\angle BAC$, suy ra: $\angle DAC = \frac{1}{2} \angle BAC$.

CE là tia phân giác của $\angle BCA$, suy ra: $\angle ECA = \frac{1}{2} \angle BCA$

Suy ra: $\angle AIC = 180^\circ - (\angle DAC + \angle ECA)$ (Định lý tổng 3 góc trong 1 tam giác)

$\Rightarrow \angle AIC = 180^\circ - (\angle DAC + \angle ECA) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA) = 180^\circ - \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 120^\circ$

c) Vì $\angle AIC = 120^\circ \Rightarrow \angle AIE = \angle DIC = 60^\circ$

Trên cạnh AC lấy điểm F sao cho $AF = AE$

Xét $\triangle EIA$ và $\triangle FIA$ có:

$AF = AE$

$\angle EAI = \angle FAI$

AI là cạnh chung

Vậy: $\triangle EIA = \triangle FIA$ (c.g.c). Suy ra $IE = IF$ (2 cạnh tương ứng) (1)

* $\triangle EIA = \triangle FIA \Rightarrow \angle AIE = \angle AIF = 60^\circ$ (hai góc tương ứng)

Suy ra: $\angle FIC = \angle AIC - \angle AIF = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$

Xét $\triangle DIC$ và $\triangle FIC$ có:

$\angle DIC = \angle FIC = 60^\circ$

IC cạnh chung

$\angle DCI = \angle FCI$

Suy ra: $\triangle DIC = \triangle FIC$ (g.c.g)

Suy ra: $ID = IF$ (hai cạnh tương ứng) (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $IE = ID \Rightarrow \triangle IDE$ cân tại I.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>