

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HOÁ
TRƯỜNG THPT NHƯ XUÂN II

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

**CON ĐƯỜNG HÌNH THÀNH ĐỊNH LÝ HÀM SỐ CÔSIN, ĐỊNH
LÝ HÀM SỐ SIN VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN**

Người thực hiện: Chu Đình Sâm
Chức vụ: Giáo viên
SKKN thuộc lĩnh vực môn: Toán

THANH HOÁ NĂM 2017

MỤC LỤC

Nội dung	Trang
1. Mở đầu	1
1.1. Lí do chọn đề tài.....	1
1.2. Mục đích nghiên cứu.....	1
1.3. Đối tượng nghiên cứu.....	1
1.4. Phương pháp nghiên cứu.....	2
2. Nội dung của sáng kiến kinh nghiệm.....	2
2.1. Cơ sở lí luận của sáng kiến kinh nghiệm.....	2
2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm	2
2.3. Các sáng kiến kinh nghiệm hoặc các giải pháp.....	3
2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm đối với hoạt động giáo dục, với bản thân, đồng nghiệp, nhà trường.....	14
3. Kết luận, kiến nghị.....	15
3.1. Kết luận.....	15
3.2. Kiến nghị.....	16

1. Mở đầu

1.1. Lí do chọn đề tài

Trong thực tiễn giáo dục hiện nay việc dạy học các định lí và bài toán phần lớn tác giả chỉ nêu ra rồi chứng minh. Việc dạy học như thế chưa phát huy được sự sáng tạo, làm học sinh không hứng thú thậm chí còn sợ học các định lí và giải bài toán. Chính vì vậy ảnh hưởng đến chất lượng giáo dục học sinh

Một trong những yêu cầu cấp thiết hiện nay của giáo dục là phải thay đổi phương pháp dạy và học, khắc phục lối truyền thụ một chiều, rèn luyện được thói quen cách tư duy sáng tạo và tự học của học sinh

Bên cạnh đó nguồn tài liệu để dạy học định lí và giải bài toán chủ yếu nêu ra và đi chứng minh, như thế gây khó khăn cho cả thầy và trò. Việc tiếp thu kiến thức chưa sâu, chưa thấy được cái gốc của định lí hay bài toán này bắt nguồn từ đâu. Như thế thì làm sao lĩnh hội kiến thức đầy đủ chứ chưa nói là sáng tạo nên kiến thức mới

Định lí hàm số côsin, định lí hàm số sin được học trong chương trình lớp 10, nhưng sau khi học xong việc vận dụng làm bài tập của học sinh còn kém hiệu quả. Vì những lí do trên và với mong muốn học trò không những tiếp thu và lĩnh hội tri thức mà làm cho các em hứng thú, tự mình biết tìm và sáng tạo nên các bài toán mới tôi chọn đề tài: **“ Con đường hình thành định lí hàm số côsin, định lí hàm số sin và các bài toán liên quan”** để dạy cho học sinh lớp 11 trong những tiết tự chọn

1.2. Mục đích nghiên cứu

Đề tài này nghiên cứu kinh nghiệm dạy và học định lí hàm số côsin, định lí hàm số sin và các bài toán liên quan cho học sinh, góp phần nâng cao chất lượng học sinh. Qua đó các em biết tiếp thu, củng cố, tổng hợp kiến thức đã học và tự sáng tạo ra các bài toán mới

Làm cho học sinh biết cách học các định lí, giải bài toán và hiểu rằng dù bài toán khó đến đâu cũng bắt nguồn từ bài toán đơn giản, dễ hiểu.

1.3. Đối tượng nghiên cứu

Sáng kiến kinh nghiệm này nghiên cứu phương pháp dạy học định lí hàm số côsin, định lí hàm số sin, hình thành cách giải và xây dựng bài toán mới trong tự chọn toán 11

1.4. Phương pháp nghiên cứu

Phương pháp:

Nghiên cứu lí luận chung

Khảo sát điều tra từ thực tế dạy và học

Tổng hợp so sánh đúc rút kinh nghiệm

Cách thực hiện:

Trao đổi chuyên môn trong tổ, nhóm, tham khảo ý kiến giáo viên cùng bộ môn

Liên hệ thực tế trong nhà trường, áp dụng đúc rút kinh nghiệm qua quá trình giảng dạy

2. Nội dung sáng kiến kinh nghiệm

2.1. Cơ sở lí luận của sáng kiến kinh nghiệm

Thực tế khi dạy các định lí hàm số côsin, định lí hàm số sin và bài toán liên quan giáo viên hay xem nhẹ vì các định lí đã được phát biểu và giải trong sách giáo khoa. Do đó học sinh nắm bắt thụ động nên khi làm bài tập hay chứng minh định lí thường lúng túng không hiểu sâu vấn đề thế thì làm sao mà nâng cao chất lượng môn toán được

Do vậy đổi mới phương pháp dạy và học nhằm mục đích cho học sinh có phương pháp tư duy logic, gây sự hứng thú, biết tiếp thu chiếm lĩnh tri thức đồng thời sáng tạo nên các bài toán do đó nâng cao được kiến thức

Định lí và bài toán đều được suy ra từ những khẳng định đúng đơn giản mà ta đã biết. Vấn đề là làm thế nào hiểu được con đường tạo ra chúng. Học tập tốt định lí giải và khai thác được bài toán là điều kiện thuật lợi để phát triển năng lực trí tuệ đây là điều không thể thiếu của người học toán

2.2. Thực trạng vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm

Khi dạy học có thể giáo viên chỉ nêu định lí hay bài toán rồi trình bày cách giải mà không có điều kiện để học sinh tìm tòi, phát hiện định lí và bài toán, không tìm thấy mối liên quan chặt chẽ giữa chúng

Học sinh không chú ý đến cái nguồn gốc sâu xa của vấn đề nên không hiểu sâu và không nắm vững kiến thức. Có thể khi gặp các bài toán tương tự nhau vẫn không làm được bởi vì không nhận biết được dạng toán này đã từng làm. Như vậy đứng trước một định lí hay bài toán việc định hướng tìm lời giải và nguồn gốc của chúng là rất cần thiết

Nhìn chung kết quả trong học tập và kết quả các kì thi toán của học sinh trường THPT Như Xuân II còn khiêm tốn. Như vậy việc đổi mới trong dạy và học cả về phương pháp lẫn nội dung không những kiến thức trong sách giáo khoa mà cả những kiến thức nâng cao lại càng trở nên cấp thiết

Cụ thể trong đề tài này xuất phát từ một kiến thức đơn giản phù hợp với học sinh trung bình, yếu tôi đã hướng dẫn học sinh hình thành nên các định lí hàm số cosin, định lí hàm số sin và xây dựng được các bài toán từ đơn giản đến nâng cao. Từ đó hình thành cả tư duy trừu tượng lẫn tư duy sáng tạo, nâng cao kiến thức, góp phần tăng kết quả cho học sinh trong học tập và trong các kì thi

2.3. Các sáng kiến kinh nghiệm hoặc các giải pháp đã sử dụng để giải quyết vấn đề

Cung cấp cho học sinh không chỉ kiến thức mà cả phương pháp suy luận, khả năng tư duy logic theo hướng xây dựng, tư duy sáng tạo. Phải làm sao từ những kiến thức cơ bản, dễ hiểu ban đầu phải dẫn dắt học sinh hình thành kiến thức nâng cao một cách tự nhiên, không áp đặt

Trong các tiết dạy thầy biết dẫn dắt học sinh xây dựng định lí, khai thác mở rộng thành các bài toán và phải biết nhìn định lí, bài toán dưới nhiều góc độ

Tổ chức để học sinh từ biết hình thành đến rèn luyện và củng cố kĩ năng xây dựng định lí, bài toán

Tổ chức kiểm tra để lấy kết quả việc nắm bắt kiến thức nội dung triển khai và kĩ năng mà học sinh đạt được

Sự trăn trở suy tư của người thầy kết hợp với học trò cùng với những câu hỏi đặt ra trong quá trình dạy và học như các định lí và bài toán này hình thành bằng cách nào? Làm sao nghĩ ra được?

Phần 1: Hình thành định lí hàm số cosin, định lí hàm số sin và các bài toán

Xét tam giác ABC , với các kí hiệu $BC = a, CA = b, AB = c, P = \frac{a+b+c}{2}$, S là diện tích, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, các đường trung tuyến m_a, m_b, m_c và các đường phân giác trong l_a, l_b, l_c tương ứng với các đỉnh A, B, C

Từ hệ thức vector $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ suy ra $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$ khai triển ra được $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Tương tự $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ và $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

Như vậy ta có định lí hàm số cosin

Định lí: Cho $\triangle ABC$ ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (1),$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \quad (2) \text{ và}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad (3)$$

Tiếp theo từ (2) và (3) suy ra $a = b \cos C + c \cos B \quad (4)$

Tương tự $b = a \cos C + c \cos A \quad (5)$ và $c = a \cos B + b \cos A \quad (6)$

Hệ thức (4),(5),(6) chính là định lí hình chiếu

Nhận xét: Có nhiều con đường hình thành kiến thức về định lí và bài toán mới. Có thể những sáng tạo chỉ nhỏ nhưng nó phụ thuộc vào những ngọn lửa thấp sáng lòng say mê toán học ở người thầy và trò

Lại có từ (1),(2) và (3) suy ra $a^2 + b^2 + c^2 = 2bc \cos A + 2ac \cos B + 2ab \cos C$

Vì $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ nên $2bc \cos A + 2ac \cos B + 2ab \cos C \geq ab + bc + ca$
hay $ab(2 \cos C - 1) + ac(2 \cos B - 1) + cb(2 \cos A - 1) \geq 0$

Do đó ta có bài toán mới

Bài toán 1: Chứng minh rằng trong $\triangle ABC$ ta có

$ab(2 \cos C - 1) + ac(2 \cos B - 1) + cb(2 \cos A - 1) \geq 0$. Dấu “=” xảy ra khi nào ?

Nhận xét: Rõ ràng theo trên dấu “=” xảy ra khi $a=b=c$ hay ΔABC đều. Cách làm này gây hứng thú cho người học. Đến đây đã trả lời được câu hỏi bài toán này tác giả lấy ở đâu?

Tiếp tục con đường trên xem ta được gì ?

Từ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ và $a = b \cos C + c \cos B$ suy ra

$$b^2 + c^2 - 2bc \cos A = b^2 \cos^2 C + c^2 \cos^2 B + 2bc \cos B \cos C \Leftrightarrow$$

$$b^2 \sin^2 C + c^2 \sin^2 B = 2bc \sin B \sin C$$

Tương tự ta có bài toán

Bài toán 2: Trong ΔABC ta có:

a) $a^2 \sin^2 B + b^2 \sin^2 A = 2ab \sin A \sin B$ (5);

b) $b^2 \sin^2 C + c^2 \sin^2 B = 2bc \sin B \sin C$ (6);

c) $a^2 \sin^2 C + c^2 \sin^2 A = 2ac \sin A \sin C$ (7).

Nhận xét: Con đường nghĩ ra bài toán 2 đã tạo niềm vui, sự hứng thú cho người học mặc dù nếu nêu ra và chứng minh bài toán 2 không khó. Chẳng hạn (5) chính là dấu “=” của bất đẳng thức $a^2 \sin^2 B + b^2 \sin^2 A \geq 2ab \sin A \sin B$

Cái hay ở đây là làm cho học trò thấy rằng bài toán 2 luôn đúng nên dấu

“=” ở trên luôn xảy ra. Từ đó $a \sin B = b \sin A \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

Tương tự ta có $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. Vì $S = \frac{abc}{4R}$ và $S = \frac{1}{2} ab \sin C \Rightarrow c = 2R \sin C$. Từ đây suy ra định lí hàm số sin

Định lí: Trong ΔABC ta có $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (8)

Chú ý rằng từ định lí cosin suy ra định lí sin bằng cách khác như sau:

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2} = \sqrt{\frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4b^2c^2}} =$$

$$\frac{\sqrt{4p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc} = \frac{2S}{bc}$$

$$\text{Từ đó } \frac{\sin A}{a} = \frac{2S}{abc} = \frac{1}{2R} \text{ (đpcm)}$$

Đến đây đặt ra câu hỏi từ định lí sin có suy ra định lí cosin được không ?

$$\text{Biến đổi } \sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = \frac{1 - \cos 2B + 1 - \cos 2C}{2} - (1 - \cos^2 A) =$$

$$- \cos(B+C) \cdot \cos(B-C) + \cos^2 A = \cos A (\cos(B-C) + \cos A) = 2 \cos A \sin B \sin C$$

$$\Rightarrow \sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A$$

$$\Rightarrow (2R \sin A)^2 = (2R \sin B)^2 + (2R \sin C)^2 - 2 \cdot 2R \sin B \cdot 2R \sin C \cdot \cos A$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Vậy ta có định lí cosin

$$\text{Tiếp theo biến đổi } \sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A \quad \text{Ta được}$$

$$\sin^2 B + \sin^2 C + \cos(B+C) \cdot \cos(B-C) = 1 \quad . \text{ Do đó ta có bài toán:}$$

Bài toán 3: Chứng minh rằng trong ΔABC ta có

- $\sin^2 A + \sin^2 B + \cos(A+B) \cdot \cos(A-B) = 1$
- $\sin^2 B + \sin^2 C + \cos(B+C) \cdot \cos(B-C) = 1$
- $\sin^2 C + \sin^2 A + \cos(C+A) \cdot \cos(C-A) = 1$

Nhận xét: Có thể các em chưa quen cách tiếp cận một bài toán, để tìm ra con đường đi hay cách giải thì rất cần sự giúp đỡ định hướng của người thầy còn thực hiện thế nào là việc của học trò. Trong quá trình đó nếu cần bổ sung kiến thức để hướng dẫn thì vai trò của người thầy được phát huy. Việc dạy này phải có sự gợi mở của thầy và trò đồng thời giữa các học trò với nhau. Dần dần chính

cách dạy và cách học như thế học trò sẽ tự mình tìm ra kiến thức và như vậy sẽ gây được hứng thú và óc sáng tạo của học trò

Bây giờ ta thay $\sin A = \frac{2S}{bc}$ và $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ vào bất đẳng thức $(\sin A + \cos A)^2 = \sin^2 A + \cos^2 A + 2 \sin A \cos A = 1 + \sin 2A \leq 2$ ta được:

$$\left(\frac{2S}{bc} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2 \leq 2 \Leftrightarrow (4S + b^2 + c^2 - a^2)^2 \leq 8b^2 c^2 \Leftrightarrow |4S + b^2 + c^2 - a^2| \leq 2\sqrt{2}bc.$$
 Dấu

“=” xảy ra khi $\sin 2A = 1$ hay $A = 45^\circ$

Như vậy ta có bài toán

Bài toán 4: Chứng minh trong ΔABC ta có:

- a) $|4S + b^2 + c^2 - a^2| \leq 2\sqrt{2}bc$
- b) $|4S + a^2 + c^2 - b^2| \leq 2\sqrt{2}ac$
- c) $|4S + a^2 + b^2 - c^2| \leq 2\sqrt{2}ab$

Tiếp theo thay $\sin A = \frac{2S}{bc}$ và $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ vào bất đẳng thức $\sin(A + 30^\circ) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A + \frac{1}{2} \cos A \leq 1$ ta được:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{3}S}{bc} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \leq 1 \Leftrightarrow 4\sqrt{3}S + b^2 + c^2 - a^2 \leq 4bc.$$

Tương tự ta có bài toán

Bài toán 5: Chứng minh trong ΔABC ta có:

- a) $4\sqrt{3}S + b^2 + c^2 - a^2 \leq 4bc$
- b) $4\sqrt{3}S + a^2 + c^2 - b^2 \leq 4ac$
- c) $4\sqrt{3}S + a^2 + b^2 - c^2 \leq 4ab$

Từ bài toán 5 ta suy ra bài toán

Bài toán 6: Chứng minh trong ΔABC ta có:

$$12\sqrt{3}S + a^2 + b^2 + c^2 \leq 4(ab + bc + ca)$$

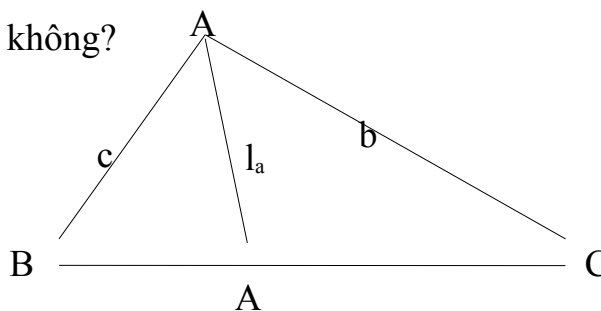
Tiếp theo nếu sử dụng bất đẳng thức $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ thì từ bài toán 6 suy ra bài toán

Bài toán 7: Chứng minh trong $\triangle ABC$ ta có: $4\sqrt{3}S \leq a^2 + b^2 + c^2$. Dấu bằng xảy ra khi nào?

Nhận xét: Việc tìm ra bài toán 7 minh chứng cho khẳng định bài toán dù khó đến đâu cũng được bắt nguồn từ kiến thức và bài toán đơn giản. Với cách dạy và cách học này chính học sinh là người trực tiếp tìm ra kiến thức. Do đó khi chứng minh định lý hay giải một bài toán học sinh sẽ biết bắt đầu cách giải như thế nào.

Phần 2: Từ định lý hàm số cosin xây dựng công thức tính độ dài đường phân giác trong, đường trung tuyến của tam giác và các bài toán

Liệu từ định lý hàm số cosin có xây dựng được công thức tính độ dài đường phân giác trong của tam giác không?



Xét $\triangle ABC$ đặt độ dài phân giác trong góc A là $l_a = AE$

Theo tính chất đường phân giác ta có :

$$\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \Rightarrow b \cdot EB = c \cdot EC \Rightarrow b(EA + AB) = c(EA + AC) \Rightarrow (b+c)EA = bAB + cAC$$

$$\Rightarrow (b^2 + c^2 + 2bc)AE^2 = b^2 AB^2 + c^2 AC^2 + 2bc \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A \Rightarrow l_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}$$

Mặt khác sử dụng định lí hàm số cosin và biến đổi $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$ (vì $0^\circ < \frac{A}{2} < 90^\circ \Rightarrow \cos \frac{A}{2} > 0$)

$$l_a = \frac{2bc \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}}{b + c} = \frac{2bc \sqrt{1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}}{b + c} = \frac{2}{b + c} \sqrt{bcp(p - a)}$$

Ta có :

Tương tự ta có công thức tính độ dài đường phân giác trong của tam giác

Bài toán 8: Chứng minh trong ΔABC ta có:

a)
$$l_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b + c} = \frac{2}{b + c} \sqrt{bcp(p - a)}$$

b)
$$l_b = \frac{2ac \cos \frac{B}{2}}{a + c} = \frac{2}{a + c} \sqrt{acp(p - b)}$$

c)
$$l_c = \frac{2ab \cos \frac{C}{2}}{a + b} = \frac{2}{a + b} \sqrt{abp(p - c)}$$

Nhận xét: Tìm ra lời giải một bài toán chưa thể xem là xong công việc mà cần phải khai thác thêm các kiến thức, bài toán mới có như thế mới phát triển được khả năng tư duy và sáng tạo trong việc dạy và học toán

Tiếp theo bài toán 8

Vì $b + c \geq 2\sqrt{bc} \Rightarrow l_a \leq \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2}$ nên lại có bài toán

Bài toán 9: Chứng minh trong ΔABC ta có:

a)
$$l_a \leq \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2} \quad (9)$$

$$b) \quad l_b \leq \sqrt{ac} \cos \frac{B}{2} \quad (10)$$

$$c) \quad l_c \leq \sqrt{ab} \cos \frac{C}{2} \quad (11)$$

Khi đó ta lại đưa ra bài toán

Bài toán 10: Chứng minh trong ΔABC ta có: $l_a l_b l_c \leq abc \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

$$\text{Từ } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

kết hợp với (9) ta được $l_a \leq \sqrt{p(p-a)}$ Từ đây ta lại có bài toán mới

Bài toán 11: Chứng minh trong ΔABC ta có:

$$a) \quad l_a \leq \sqrt{p(p-a)} \quad (12)$$

$$b) \quad l_b \leq \sqrt{p(p-b)} \quad (13)$$

$$c) \quad l_c \leq \sqrt{p(p-c)} \quad (14)$$

Từ bài toán 11 suy ra bài toán

Bài toán 12: Chứng minh trong ΔABC ta có: $l_a l_b l_c \leq pS$

$$\text{Ta lại có: } (l_a + l_b + l_c)^2 \leq (\sqrt{p(p-a)} + \sqrt{p(p-b)} + \sqrt{p(p-c)})^2 \leq 3p^2 \Rightarrow$$

$$l_a + l_b + l_c \leq \sqrt{3}p \quad . \text{ Từ đó ta có bài toán}$$

Bài toán 13: Chứng minh trong ΔABC ta có: $l_a + l_b + l_c \leq \sqrt{3}p$

$$\text{Lại vì } p = \frac{a+b+c}{2} \quad \text{nên} \quad p^2 = \left(\frac{a+b+c}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (a+b+c)^2 \leq \frac{3}{4} (a^2 + b^2 + c^2)$$

Từ đây ta có bài toán

Bài toán 14: Chứng minh trong ΔABC ta có: $l_a + l_b + l_c \leq \frac{3}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Nhận xét: Việc khai thác các kết quả và tìm thêm bài toán mới phụ thuộc vào các hướng giải một bài toán ban đầu. Chính các bài toán và kiến thức mới giúp học trò củng cố nhiều kiến thức đã học, tìm được mối liên hệ giữa các kiến thức mới và cũ. Đó là sự sáng tạo trong dạy và học toán

Tiếp theo, nếu sử dụng bất đẳng thức Cô si ta có: $l_a + l_b + l_c \geq 3 \sqrt[3]{l_a l_b l_c}$. Khi đó ta có bài toán

Bài toán 15: Chứng minh trong ΔABC ta có: $\sqrt[3]{l_a l_b l_c} \leq \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Nhận xét: Các bài toán trên đặc biệt bài toán 15 nếu phát biểu bài toán rồi chứng minh sẽ tương đối khó. Nhưng nếu dạy học theo cách xây dựng ở trên sẽ tìm tòi được nguồn gốc thì nó trở nên dễ hiểu giúp tăng sự phấn khởi, hứng thú cho học sinh

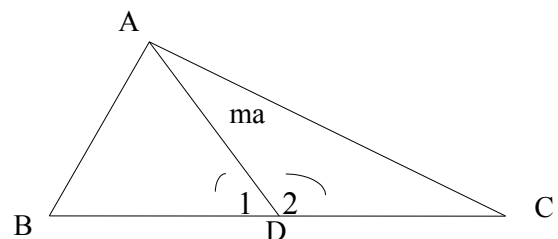
Các bài toán liên quan đến độ dài đường phân giác trong của tam giác. Như vậy phải chăng đã hết? Nhiều khi trong tư duy không cho phép ta dừng lại. Đôi lúc việc kết thúc vấn đề này lại gợi ý mở đầu cho một vấn đề mới bởi thế mà chúng ta sẽ tìm được những kết quả thú vị bất ngờ

Xét ΔABC , trung tuyến $AD = m_a$,

ta thấy $\cos D_1 = -\cos D_2$, áp dụng định lí

hàm số cosin ta được

$$\frac{m_a^2 + BD^2 - AB^2}{2m_a \cdot BD} = -\frac{m_a^2 + DC^2 - AC^2}{2m_a \cdot DC}$$



$\Rightarrow m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$. Khi đó ta có công thức về độ dài đường trung tuyến trong tam giác

Bài toán 16: Chứng minh trong ΔABC ta có:

a) $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$

b) $m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$

c) $m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$

Từ đây ta có bài toán

Bài toán 17: Chứng minh trong ΔABC ta có: $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

Thầy: Do $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ nên suy ra bài toán sau

Bài toán 18: Chứng minh trong ΔABC ta có: $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \geq \frac{3}{4}(ab + bc + ca)$

Từ bài toán 17 và bất đẳng thức $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ suy ra bài toán

Bài toán 19: Chứng minh trong ΔABC ta có: $(a+b+c)^2 \leq 4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$

Tiếp theo nếu viết $m_a^2 = \frac{1}{4}[b^2 + c^2 + (b^2 + c^2 - a^2)] = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 + 2bc \cos A) =$
 $\frac{1}{4}\left[(b-c)^2 + 4bc \cos^2 \frac{A}{2}\right] \geq bc \cos^2 \frac{A}{2} \Rightarrow m_a \geq \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2}$. Do đó ta có bài toán

Bài toán 20: Chứng minh trong ΔABC ta có :

a) $m_a \geq \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2}$

b) $m_b \geq \sqrt{ac} \cos \frac{B}{2}$

$$c) \quad m_c \geq \sqrt{ab} \cos \frac{C}{2}$$

Từ đây lại được bài toán

Bài toán 21: Chứng minh trong ΔABC ta có :

$$m_a + m_b + m_c \geq \sqrt{bc} \cos \frac{A}{2} + \sqrt{ac} \cos \frac{B}{2} + \sqrt{ab} \cos \frac{C}{2}$$

Từ bất đẳng thức $(m_a + m_b + m_c)^2 \leq 3(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$ ta lại được bài toán

Bài toán 22: Chứng minh trong ΔABC ta có :

$$3(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) \geq \left(\sqrt{bc} \cos \frac{A}{2} + \sqrt{ca} \cos \frac{B}{2} + \sqrt{ab} \cos \frac{C}{2} \right)^2$$

Tiếp theo nếu viết

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \geq \frac{1}{4}[(b+c)^2 - a^2] = \frac{1}{4}(b+c+a)(b+c-a) = p(p-a)$$

$$\Rightarrow m_a \geq \sqrt{p(p-a)}$$

Do đó ta có bài toán

Bài toán 23: Chứng minh trong ΔABC ta có :

$$a) \quad m_a \geq \sqrt{p(p-a)}$$

$$b) \quad m_b \geq \sqrt{p(p-b)}$$

$$c) \quad m_c \geq \sqrt{p(p-c)}$$

Từ đây ta có bài toán

Bài toán 24: Chứng minh trong ΔABC ta có:

$$m_a + m_b + m_c \geq \sqrt{p}(\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c})$$

Sử dụng bất đẳng thức $(m_a + m_b + m_c)^2 \leq 3(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$ ta lại được bài

toán sau

Bài toán 25: Chứng minh trong ΔABC ta có:

$$3(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) \geq p(\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c})^2$$

Tiếp theo sử dụng bất đẳng thức

$$(\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c})^2 \geq 3(\sqrt{(p-a)(p-b)} + \sqrt{(p-b)(p-c)} + \sqrt{(p-c)(p-a)})$$

ta

được bài toán sau:

Bài toán 26: Chứng minh trong ΔABC ta có:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \geq p(\sqrt{(p-a)(p-b)} + \sqrt{(p-b)(p-c)} + \sqrt{(p-c)(p-a)})$$

Nhận xét: Khi dạy toán, học toán chúng ta thường khai thác, phát triển định lí, hay một bài toán để có được một bài toán mới (tuy có thể không mới với người khác). Cách học này gây hứng thú, tạo niềm đam mê và thông minh sáng tạo cho học trò. Do đó giúp cho việc học toán đơn giản và thú vị hơn.

Phần 3: Tổ chức kiểm tra để thu thập thông tin và đánh giá kết quả

Bài kiểm tra 90 phút

Câu 1: Chứng minh trong ΔABC ta có:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \geq \frac{3}{8} \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{\cos A} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{\cos B} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{\cos C} \right)$$

Câu 2: Chứng minh trong ΔABC ta có:

$$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \quad \text{với} \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

Câu 3: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn. Chứng minh

$$\cos A = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad+bc)} \quad \text{với} \quad AB=a, BC=b, CD=c, DA=d. \quad \text{Từ đó tìm công}$$

thức tương tự câu 2

Hướng dẫn giải:

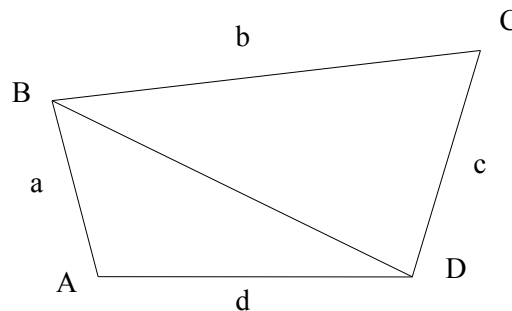
Câu 1: Học sinh biết sử dụng định lý hàm số cosin thay $ab = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\cos C}$, tương tự với bc , ca vào bài toán 18

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \geq \frac{3}{4}(ab + bc + ca)$$

Câu 2: Sử dụng định lý hàm số cosin và công thức sau rồi biến đổi ta được điều cần chứng minh

$$\tan^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}$$

Câu 3:



Áp dụng định lý cosin cho hai tam giác ABD và BCD , ta có

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A \quad \text{và} \quad BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C$$

Vì tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên $\cos A = -\cos C \Rightarrow \cos A = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}$ thay vào công thức

$$\tan^2 \frac{A}{2} = \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}$$

Ta được kết quả tương tự câu 2 là: $\tan A = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}$ với

$$p = \frac{a+b+c+d}{2}$$

2.4 Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm

Thông qua bài kiểm tra này và hệ thống cách dạy và học định lí, bài tập học sinh rút ra một điều quan trọng trong việc học định lí và bài tập là phải biết xây dựng các định lí, tìm mối liên hệ giữa các bài toán và xem nó bắt nguồn từ đâu. Từ đó tạo cho các e niềm đam mê, hứng thú trong học tập đồng thời biết cách tự học, sáng tạo, tìm tòi, xây dựng nên các bài toán mới. Đó cũng là mục đích chính của tôi khi viết sáng kiến kinh nghiệm này.

Kết quả thực tế khi dạy nội dung sáng kiến và tổ chức kiểm tra. Lớp 11B1 và 11B2 là lớp thực nghiệm còn lớp 11B3 là lớp đối chứng.

Bảng kết quả bài kiểm tra các lớp 11B1, 11B2, 11B3

Lớp	Số	Giỏi		Khá		TB		Yếu	
		SL	%	SL	%	SL	%	SL	%
11B1	39	18	46,2	20	51,3	1	2,5	0	0
11B2	37	4	10,8	18	48,6	12	32,5	3	8,1
11B3	33	0	0	2	6,1	16	48,4	15	45,5

Nhận xét: Bài kiểm tra ở lớp 11B1 và 11B2 có số lượng học sinh khá giỏi cao hơn hẳn còn học sinh trung bình và yếu thì thấp hơn lớp 11B3. Ở đây lớp 11B2 và lớp 11B3 có trình độ tương đương nhau, còn lớp 11B1 có trình độ cao hơn đôi chút. Tôi quyết định dạy cho lớp 11B1 để thử nghiệm ôn thi đại học và học sinh giỏi. Từ đây rút được kinh nghiệm là khi dạy bài toán dễ với học sinh khá giỏi nên khai thác, mở rộng các kết quả còn bài toán khó với học sinh trung bình, yếu nên tìm cách đưa về hoặc liên hệ với bài toán hay kiến thức đơn giản đã biết

Với cách dạy và học như sáng kiến học sinh say mê hơn, tích cực hoạt động hơn, khả năng tự học cũng được nâng cao, các kiến thức phần lớn được các em tự tìm ra nên nắm vững kiến thức hơn, sâu sắc hơn. Kỹ năng vận dụng các kiến thức đã biết để xây dựng nên các định lý và bài toán từ đơn giản đến nâng cao

3. Kết luận, kiến nghị

3.1. Kết luận

Từ kiến thức đơn giản, dễ hiểu trong sách giáo khoa đã xây dựng được định lý hàm số cosin, định lý hàm số sin sau đó đưa ra được những bài toán. Trong số các bài toán trên có thể có những bài quen thuộc đã được người khác nghĩ ra từ rất lâu và tổ chức trong các kì thi cả trong nước và quốc tế (chẳng hạn bài toán số 7 từng xuất hiện nhiều trong các kì thi, đặc biệt kì thi Olympic toán quốc tế)

Việc biết được cách hình thành định lý hay bài toán một cách lôgic với vẻ tự nhiên sẽ giúp cho việc học toán hiệu quả hơn. Từ chỗ ban đầu học sinh lúng túng khi tiếp cận định lý hay bài toán thì giờ đây các em đã tự tin hiểu sâu, nắm chắc định lý và làm tốt các bài tập cũng như mở rộng thêm các bài tập

Việc nghĩ ra một định lý hay bài toán không phải chỉ những người thông minh xuất chúng mới nghĩ ra được, mà là một việc tuy không dễ dàng nhưng nó cũng sẽ có quy luật của nó và hoàn toàn rèn luyện cho học trò được Không có kiến thức gì mới hoàn toàn mà không liên quan gì tới cái cũ. Bởi vì kiến thức mới phải bắt nguồn từ kiến thức cũ, kế thừa kiến thức cũ và là sự mở rộng của kiến thức cũ. Khi biết tìm con đường hình thành một khái niệm, định lý hay bài toán và nhìn chúng dưới nhiều góc độ khác nhau chúng ta sẽ tìm được những hướng giải ngắn gọn, độc đáo và sáng tạo.

3.2. Kiến nghị

Khi dạy học định lí, giải bài toán tránh áp đặt vì nó làm mất đi sự sáng tạo của học trò, không gây hứng thú. Đặc biệt bản thân người thầy cũng phải biết tự học, tự nghiên cứu và sáng tạo đồng thời trao đổi chuyên môn nghiệp vụ với đồng nghiệp

Đề tài này nên dạy trong các tiết tự chọn, tổ chức chuyên đề và có thể nhân rộng. Do đó nhà trường cần tạo thời gian và cơ sở vật chất để thầy cô trong tổ nhóm trao đổi chuyên môn, nghiệp vụ qua các chuyên đề. Từ đó đưa ra cách dạy và học phù hợp với học sinh

Qua báo cáo kinh nghiệm này mong rằng các đồng nghiệp cho tôi thêm những ý kiến góp ý để thấy được đầy đủ hơn ưu điểm cũng như khuyết điểm của cách dạy nội dung này. Tôi mong rằng sáng kiến kinh nghiệm này sẽ được các đồng nghiệp nghiên cứu và áp dụng vào thực tiễn dạy học (không nhất thiết phải dạy hết tất cả nội dung vì còn phụ thuộc thời gian, đối tượng và mục đích của người học)

Sáng kiến kinh nghiệm này chắc chắn không tránh được những thiếu sót, rất mong sự phê bình, đóng góp ý kiến, phản hồi của các thầy cô giáo và đồng nghiệp để đề tài được hoàn thiện hơn

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ

Thanh Hóa, ngày 10 tháng 4 năm 2017

Tôi xin cam đoan đây là SKKN của
mình viết, không sao chép nội dung của
người khác

Chu Đình Sâm