PHÒNG GD&ĐT TIÊN LỮ

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2023-2024
MÔN: TOÁN 9
Thời gian làm bài: 150 phút
Ngày thi: 23/11/2023
(Đề thi có 01 trang)

Bài 1 (2,0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $A = \dfrac{x+5+2\sqrt{x^2-25}}{-2x+10-\sqrt{x^2-25}}$ với $x \in \mathbb{R}$, $x < -5$.

b) Chứng minh đẳng thức: $\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}=1\cdot$

Bài 2 (2,0 điểm).

a) Giải phương trình $x^2-2x-x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+4=0\cdot$

b) Cho hàm số $y = x-2m-1$ với m là tham số. Tính theo m toạ độ các giao điểm A, B của đồ thị hàm số với các trục Ox, Oy. Gọi H là hình chiếu của O trên AB. Xác định giá trị của m để $OH = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 3. (2,0 điểm).

a) Cho $A = \dfrac{9\sqrt{x}+12}{3\sqrt{x}+2}$ (với $x \geq 0$). Tìm các giá trị của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

b) Cho 2 số nguyên a, b thoả mãn $a^2+b^2+1=2(ab+a+b)$. Chứng minh a và b là hai số chính phương liên tiếp.

Bài 4. (3,0 điểm).

Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Gọi H là một điểm thay đổi trên đoạn AB (H khác A và B). Đường thẳng vuông góc với AB tại H cắt nửa đường tròn (O) tại C. Qua A kẻ đường thẳng xy vuông góc với AB. Gọi I là trung điểm của AC, OI cắt đường thẳng xy tại M, MB cắt CH tại K.

a) Chứng minh $MC \perp OC$.

b) Chứng minh $KH.AB = CH.AO$ và K là trung điểm của CH.

c) Xác định vị trí của H để chu vi tam giác ACB đạt giá trị lớn nhất? Tìm giá trị lớn nhất đó theo R.

Bài 5 (1,0 điểm).

Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $x+y+z=2$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y}$.

---------------------- Hết ----------------------

Họ và tên thí sinh:...SBD:..................

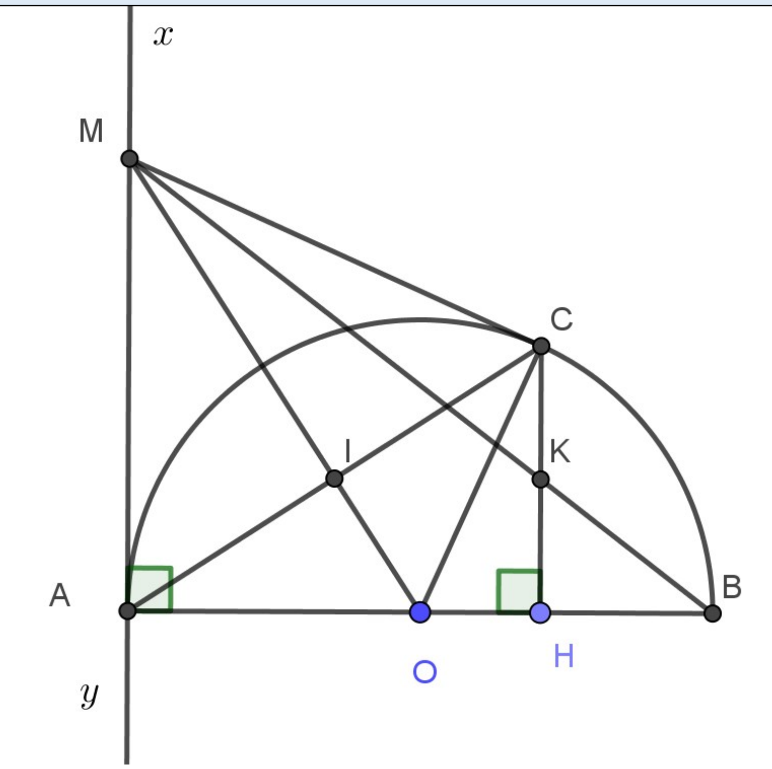
Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

PHÒNG GD&ĐT TIÊN LỮ

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2023 – 2024
Môn: Toán
HƯỚNG DẪN CHẤM CHÍNH THỨC
(Hướng dẫn chấm có 04 trang)

Bài	Ý	Đáp án	Điểm	
Bài 1 **2,0 Điểm**	a	Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{x+5+2\sqrt{x^2-25}}{-2x+10-\sqrt{x^2-25}}$ với $x\in\mathbb{R}$, $x<-5$.		
		với $x\in\mathbb{R}$, $x<-5$ ta có: $A=\dfrac{-\left(\sqrt{-(x+5)}\right)^2+2\sqrt{-(x+5)(5-x)}}{2(5-x)-\sqrt{-(x+5)(5-x)}}$	0,5	**1,0**
		$A=\dfrac{\sqrt{-(x+5)}\left[2\sqrt{5-x}-\sqrt{-(x+5)}\right]}{\sqrt{5-x}\left[2\sqrt{5-x}-\sqrt{-(x+5)}\right]}$	0,25	
		$A=\dfrac{\sqrt{-(x+5)}}{\sqrt{5-x}}=\sqrt{\dfrac{x+5}{x-5}}$	0,25	
	b	Chứng minh đẳng thức: $\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}=1$.		
		VT $=\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}=\sqrt{5-\sqrt{3-\sqrt{\left(\sqrt{20}-3\right)^2}}}$ $=\sqrt{5}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$	0,5	**1,0**
		$=\sqrt{5}-\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=\sqrt{5}-\left(\sqrt{5}-1\right)=1$	0,5	
Bài 2 **2,0 Điểm**	a	Giải phương trình $x^2-2x-x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+4=0$		
		ĐK: $x\ge 0$. Nhận thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình, chia cả hai vế cho x ta có: $x^2-2x-x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+4=0\Leftrightarrow x-2-\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{4}{x}=0$ $\Leftrightarrow\left(x+\dfrac{4}{x}\right)-\left(\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)-2=0$	0,25	**1,0**
		Đặt $\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}=t>0\Leftrightarrow t^2=x+4+\dfrac{4}{x}\Leftrightarrow x+\dfrac{4}{x}=t^2-4$ Khi đó ta có : $\left(t^2-4\right)-t-2=0\Leftrightarrow t^2-t-6=0\Leftrightarrow(t-3)(t+2)=0$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\t=-2\end{array}\right.$	0,25	
		Đối chiếu điều kiện	0,25	

		$\Rightarrow t=3 \Leftrightarrow \sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}=3 \Leftrightarrow x-3\sqrt{x}+2=0$ $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=1 \end{array}\right.$		
		Vậy nghiệm của phương trình là $x=1$, $x=4$	0,25	
	b	Cho hàm số $y=x-2m-1$ với m là tham số. Tính theo m toạ độ các giao điểm A, B của đồ thị hàm số với các trục Ox, Oy. Gọi H là hình chiếu của O trên AB. Xác định giá trị của m để $OH=\frac{\sqrt{2}}{2}$.		
		Giao điểm A của đồ thị hàm số với trục Ox là $A\left(2m+1;0\right)$	0,25	**1,0**
		Giao điểm B của đồ thị hàm số với trục Oy là $B\left(0;-2m-1\right)$	0,25	
		Ta có: ΔAOB vuông tại O và có OH là đường cao nên: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}$ hay $2=\frac{1}{x_A^2}+\frac{1}{y_B^2} \Leftrightarrow 2=\frac{2}{\left(2m+1\right)^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-1 \end{array}\right.$	0,5	
Bài 3 2,0 Điểm	a	Cho $A=\frac{9\sqrt{x}+12}{3\sqrt{x}+2}$ (với $x\geq 0$). Tìm các giá trị của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.		
		Với $x\geq 0$ ta có $A=\frac{3\left(3\sqrt{x}+2\right)+6}{3\sqrt{x}+2}=3+\frac{6}{3\sqrt{x}+2}$	0,25	**1,0**
		Với $x\geq 0$, ta có $3<A\leq 6$ Theo bài, $A\in\mathbb{Z}$ nên $A\in\left\{4;5;6\right\}$	0,5	
		Với $A=4$ suy ra $x=\frac{16}{9}$ Với $A=5$ suy ra $x=\frac{1}{9}$ Với $A=6$ suy ra $x=0$ Vậy $x\in\left\{0;\frac{1}{9};\frac{16}{9}\right\}$ thì A nhận giá trị nguyên.	0,25	
		Cho nửa đường tròn $\left(O;R\right)$ đường kính AB. Gọi H là một điểm thay đổi trên đoạn AB (H khác A và B). Đường thẳng vuông	**1,0**	

Bài 4 **3,0 điểm**		góc với AB tại H cắt nửa đường tròn (O) tại C. Qua A kẻ đường thẳng xy vuông góc với AB. Gọi I là trung điểm của AC, OI cắt đường thẳng xy tại M, MB cắt CH tại K.		
		 Vẽ hình	0,25	**0,25**
	a	**Chứng minh:** $MC \perp OC$		
		- Chứng minh $\angle AOM = \angle COM$ - Chứng minh $\Delta AOM = \Delta COM$ - Chứng minh $MC \perp CO$	0,25 0,25 0,25	**0,75**
	b	**Chứng minh** $KH.AB = CH.AO$ **và** K **là trung điểm của** CH		
		ΔMAB có $KH \parallel MA$ (cùng $\perp AB$) $\Rightarrow \dfrac{KH}{AM} = \dfrac{HB}{AB} \Rightarrow KH.AB = AM.HB \ (1)$	0,25	**1,0**
		Chứng minh ΔMAO đồng dạng với ΔCHB $\Rightarrow \dfrac{MA}{CH} = \dfrac{AO}{HB} \Rightarrow CH.AO = AM.HB \ (2)$	0,25	
		Từ (1) và (2) suy ra $KH.AB = CH.AO$	0,25	
		Khi đó $KH = CH \cdot \dfrac{AO}{AB} = CH \cdot \dfrac{R}{2R} = \dfrac{CH}{2}$ $\Rightarrow K$ là trung điểm của CH	0,25	
	c	**Xác định vị trí của** H **để chu vi** ΔACB **đạt giá trị lớn nhất? Tìm giá trị lớn nhất đó.**		
		Chu vi tam giác ACB là $P_{ACB} = AB + AC + CB = 2R + AC + CB$ Chứng minh $(AC+CB)^2 \le 2\left(AC^2 + CB2^2\right)$	0,5	**1,0**
		$\Rightarrow AC + CB \le \sqrt{2\left(AC^2+CB^2\right)} \Rightarrow AC + CB \le \sqrt{2AB^2} = 2R\sqrt{2}$ Đẳng thức xảy ra khi $AC = CB \Leftrightarrow H$ là trung điểm của AB	0,25	

		Suy ra $P_{ACB} \le 2R + 2R\sqrt{2} = 2R\left(1+\sqrt{2}\right)$, dấu " = " xảy ra khi H là trung điểm của AB . Vậy $\max P_{ACB} = 2R\left(1+\sqrt{2}\right)$ đạt được khi H là trung điểm của AB	0,25	
Bài 5 1,0 điểm		***Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn $x+y+z=2$.*** ***Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*** $A=\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y}$.		
		Vì x,y,z dương. Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: +) $\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y+z}{4} \ge 2\sqrt{\dfrac{x^2}{y+z}\cdot\dfrac{y+z}{4}} = x \ (1)$ Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{y+z}=\dfrac{y+z}{4} \Leftrightarrow 4x^2=(y+z)^2 \Leftrightarrow 2x=y+z$	0,25	
		+) $\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z+x}{4} \ge 2\sqrt{\dfrac{y^2}{z+x}\cdot\dfrac{z+x}{4}} = y \ (2)$ Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{y^2}{z+x}=\dfrac{z+x}{4} \Leftrightarrow 4y^2=(z+x)^2 \Leftrightarrow 2y=z+x$	0,25	
		+) $\dfrac{z^2}{x+y}+\dfrac{x+y}{4} \ge 2\sqrt{\dfrac{z^2}{x+y}\cdot\dfrac{x+y}{4}} = z \ (3)$ Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{z^2}{x+y}=\dfrac{x+y}{4} \Leftrightarrow 4z^2=(x+y)^2 \Leftrightarrow 2z=z+y$	0,25	**1,0**
		Cộng theo 3 vế bất đẳng thức cùng chiều $(1),(2),(3)$ ta có: $\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y}+\dfrac{y+z}{4}+\dfrac{z+x}{4}+\dfrac{x+y}{4} \ge x+y+z$ $\Rightarrow \dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y} \ge \dfrac{x+y+z}{2}=1$ Dâu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=y+z \\ 2y=z+x \\ 2z=x+y \\ x+y+z=2 \\ x;y;z>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{2}{3}$ Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 1 khi $x=y=z=\dfrac{2}{3}$	0,25	

........................Hết........................