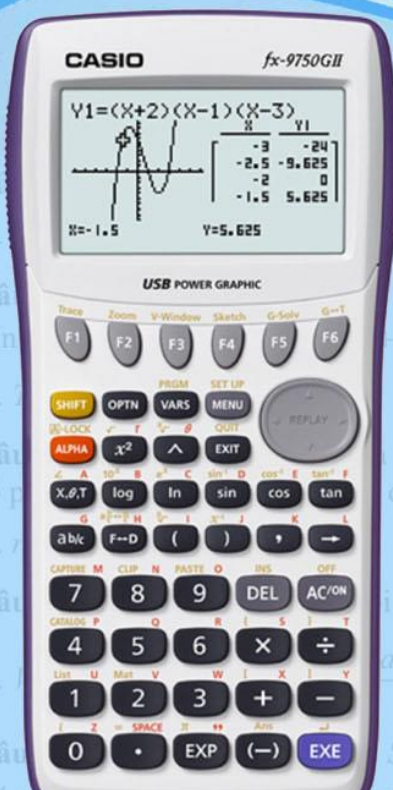
NGUYỄN THẾ LỰC

GIẢI NHANH TRẮC NGHIỆM

Toán 12



BẰNG MÁY TÍNH CASIO

TÂM PHÁP
Skill CASIO công phá Trắc Nghiệm Toán 2017

Ver 2.0

(Lưu ý: Các thao tác casio chi tiết đã có ở từng chuyên đề, đây là mục phân dạng theo casio thay vì phân theo chuyên đề.)

I. Hàm số

Các bài toán hàm số chủ yếu là hỏi về cực trị do đó chúng ta sẽ sử dụng tính năng đạo hàm:

SHIFT ∫ ALPHA) x^2 ▶ 1 =

Math ▲

$\frac{d}{dx}(X^2)|_{x=1}$

2

Ví dụ 1: Hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$ đạt cực trị khi :

A. $\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-\frac{1}{3} \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\frac{10}{3} \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{10}{3} \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\frac{1}{3} \end{array}\right.$

Các em sẽ nhập như sau:

SHIFT ∫ ALPHA) SHIFT x^2 − 5 ALPHA) x^2 + 3 ALPHA) + 1 ▶ − 3 =

Math ▲ Math ▲

$\frac{d}{dx}(X^3-5X^2+3X+1$ ▶ ◀ $5X^2+3X+1)|_{x=-3}$

60

Do đó loại A vì đạo hàm của y không bằng 0 tại x = -3 nên nó không thể là cực trị được

Tương tự các em thử với $x = 0$

◀ DEL DEL 0 =

Math ▲ Math ▲

◀ $5X^2+3X+1)|_{x=0}$ $\frac{d}{dx}(X^3-5X^2+3X+1$ ▶

3

Vậy loạt nốt B,C Do đó ta sẽ chọn D.

Ví dụ 2: Hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên miền $(0,+\infty)$ khi giá trị m là:

A. $m \geq 0$ B. $m \geq 12$ C. $m \leq 0$ D. $m \leq 12$

Những bài như thế này tốt nhất là các em đạo hàm tay cho dễ xét, ta đạo hàm luôn trên máy và thay tham số m bằng tham số Y trên máy

3 ALPHA) x^2 − 1 2 ALPHA) + ALPHA S⇔D

Math ▲

$3X^2-12X+Y$

Tìm Y để biểu thức trên > 0 với mọi x thuộc $(0,+\infty)$ thì khi đó hàm sẽ đồng biến thôi ^^

Các em chọn bừa x=1 rồi chọn Y theo hướng loại dần đáp án, trước hết chọn Y=15 xem A,B đúng không? Hay là C,D đúng

CALC 1 = 1 5 =

$3X^2-12X+Y$

6

Do đó A,B sẽ đúng, giờ A với B nó khác nhau giá trị 0→12 ta chọn bừa x=1

CALC = 1 =

$3X^2-12X+Y$

-8

Vậy loại A do lớn hơn 0 vẫn chưa được, chắc phải lớn hơn 12 ^^ do đó chỉ còn chọn B

Ví dụ 3: Tìm m để hàm số $y=x^3-2x^2+mx+m$ đạt cực tiểu tại điểm có hoành độ bằng 1

Đơn giản là các em giải phương trình $3.1^2-4.1+m=0$ thôi ^^

Giải tay cho khỏe, chứ Solve hơi lâu.

Dạng viết phương trình tiếp tuyến:

Ví dụ 1: Viết phương trình tiếp tuyến của $y=x^3-2x^2+2x+1$ tại $x=1$

Ta đã biết phương trình tiếp tuyến có dạng : $y=ax+b$

$a=y'(x_o)=\frac{d}{dx}(x^3-2x^2+2x+1)=1$ còn $b=y(x_o)-ax_o$

Các em bấm máy như sau :

SHIFT $\int$ ALPHA) SHIFT x^2 − 2 ALPHA) x^2 + 2 ALPHA) + 1 ▶ 1 =

$\frac{d}{dx}(X^3-2X^2+2X+1$

1

AC (ALPHA) SHIFT x^2 − 2 ALPHA) x^2 + 2 ALPHA) + 1) − 1 × ALPHA) CALC 1 =

$(X^3-2X^2+2X+1)-1$

1

$$\Rightarrow y=x+1$$

Ví dụ 2: Viết phương trình tiếp tuyến của $y=x^3-3x+1$ đi qua $M(1;-1)$

Ta có hệ :

$$\begin{cases} k=y'(1) \\ y=k(x-1)-1 \end{cases} \Rightarrow x^3-3x+1=(3x^2-3)(x-1)-1 \xrightarrow{SOLVE} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0.5 \end{array}\right.$$

Vậy là quay lại bài toán tìm tiếp tuyến tại 1 điểm.

II.PT-BPT- Hệ

Có 2 dạng chính là tìm nghiệm của phương trình và tìm số nghiệm hoặc tìm tổng của các nghiệm, hay nói cách khác 1 dạng có sẵn nghiệm rồi chỉ việc thử, 1 loại phải đi tìm nghiệm chính xác của nó.

Chủ yếu là dùng CALC để tính giá trị biểu thức thôi các em

1.Dạng đơn giản không có tham số:

Ví dụ 1: Phương trình $\log_2(3x-2)=3$ có nghiệm là:

A. $x=\frac{10}{3}$ B. $x=3$ C. $x=\frac{11}{3}$ D. $x=2$

Các em dùng tính năng tính giá trị biểu thức để thử từng giá trị :

Trước hết nhập phương trình:

[log■□] [2] [▶] [3] [ALPHA] [)] [−] [2] [▶] [−] [3]

[CALC] [1] [0] [▭/▭] [3] [=]

Math ▲

$\log_2(3X-2)-3$

0

[CALC] [3] [=]

Math ▲

$\log_2(3X-2)-3$

-0.1926450779

Vậy đáp án A đúng

Áp dụng: Phương trình $\sin 3x+\sin x=\cos 3x+\cos x$ có nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2} \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\frac{\pi}{8}+k\pi \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right.$

Ví dụ 2: Bất phương trình $\frac{x+1}{x-1}>\frac{4x-2}{x}$ có nghiệm là:

A. $\frac{1}{3}<x<2$ B. $\left[\begin{array}{l} 0<x<\frac{1}{3} \\ 1<x<2 \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} \frac{1}{3}<x<1 \\ x>2 \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} x<0 \\ \frac{1}{3}<x<2 \end{array}\right.$

Các em lần lượt tìm ra các miền khác nhau của các đáp án để xem đáp án nào chứa giá trị đúng.

Ví dụ như ví dụ trên ta sẽ tính $x=100$ để xem $x>2$ đúng không?

Hay tính $x=-100$ xem $x<0$ đúng không -_-

Cứ thế các em loại dần các đáp án, chủ yếu là phải chọn giá trị chỉ đáp án này có mà đáp án khác không có.

[▭/▭] [ALPHA] [)] [+] [1] [▼] [ALPHA] [)] [−] [1] [▶] [−] [▭/▭] [4] [ALPHA] [)] [−] [2] [▼] [ALPHA] [)] [CALC] [1] [0] [0] [=]

Math ▲

$\frac{X+1}{X-1}-\frac{4X-2}{X}$

-2.95979798

Với x=100 giá trị biểu thức âm chứ không phải dương nên loại luôn C

Tương tự x= -100

CALC − 1 0 0 = S⇔D

$\frac{X+1}{X-1}-\frac{4X-2}{X}$

-3.03(9801)

Do đó cũng loại nốt

Vậy chỉ còn A và B, ta sẽ chọn 1 giá trị mà A có còn B không có để xem đáp án nào đúng

Chọn x=0.5

CALC 0 • 5 =

$\frac{X+1}{X-1}-\frac{4X-2}{X}$

-3

Vậy loại nốt A do đó chọn B

Áp dụng : Bất phươngtrình $0,3^{x^2+x} > 0,09$ có nghiệm là:

A. $x > 1$ B. $-2 < x < 1$ C. $x < -2$ D. $\left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > 1 \end{array}\right.$

2.Loại phương trình phải tìm chính xác nghiệm

Ví dụ 1 : Cho phương trình: $\log_4(3.2^x - 8) = x - 1$ có 2 nghiệm x_1, x_2 tính $x_1 + x_2$

Các em sẽ tìm nghiệm bằng tính năng SOLVE của máy tính: xử đẹp mọi loại phương trình 1 ẩn

log▪□ 4 ▶ 3 × 2 $x^{■}$ ALPHA) ▶ − 8 ▶ − (ALPHA) − 1)

◀3×2^X−8)−(X−1)

SHIFT CALC

Solve for X

3

=

log₄(3×2^X−8)−(X▶

X= 3

L-R= 0

Vậy ta được 1 nghiệm đầu tiên x=3, ta sẽ kiểm tra xem còn nghiệm nào khác không bằng cách chia cho (X-3) các em sửa thành (.....) : (X-3)

▶ (◀ ◀) ÷ (ALPHA) − 3)

◀-(X-1))÷(X-3)

Solve for X

$\lfloor \log_4(3\times 2^{\wedge}-8)\rfloor-(\triangleright$ 3

X= 2

L-R= 0

Ta được thêm 1 nhiệm x =2 vậy tổng 2 nghiệm là 5

Các em có thể thử luôn xem còn nghiệm nào nữa không bằng cách sửa thành

(....) : (X-3)(X-2)

3.Loại có tham số :

Ví dụ 1: Phương trình $x^3+x=m^2+m$ có 3 nghiệm phân biệt khi:

A. $m<1$ B. $-1<m<2$ C. $-2<m<1$ D. $m>-21$

Để xửa nhanh dạng này các em vào luôn tính năng giải phương trình bậc 3 của máy tính rồi lại "chọn bừa" m như ví dụ trước:

MODE 5 4

a b 0 c 0

0

Ta sẽ lấy $m=-100$ xem A có đúng không?

1 = 0 = − 3 = − ((− 1 0 0) x^2 + − 1 0 0) = = =

a b 0 c -3 X1=

1 21.51886327

X2=

◀63+18.55521779i

Đó ta thấy loại A luôn vì có nghiệm phức

Tiếp tục với $m=-10$ xem D đúng không, nếu không đúng thì lại thử giá trị B có C không có

▶ ▶ ▶ − ((− 1 0) x^2 + (− 1 0)) =

1 b 0 c -3 d X2=

-90 ◀99+3.687594015i

Tiếp tục thử với $m=1,5$

1 b 0 c -3 d X3=

-3.75 ◀196-0.73746454i

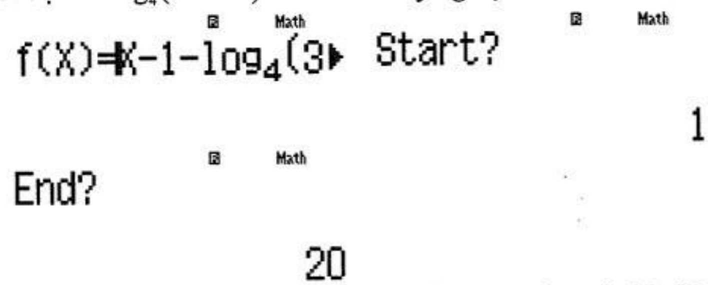
Do đó Loại B vì nó chứa giá trị trên, và duy nhất C đúng ,các em không tin thì thử lại nhé.

4. Tìm số nghiệm của phương trình : Ngoài Solve chúng ta có thể dùng TABLE

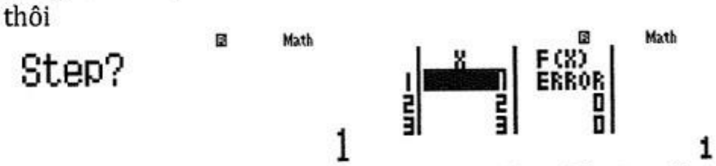
(Các em xem ở phần chuyên đề nhé)

Cứ nhớ là $f(x)$ đổi từ âm sang dương hoặc ngược lại thì tức là trên cái đoạn đổi đấu đó có 1 nghiệm, lí thuyết này các em đã được học từ năm lớp 11.

Ví dụ: PT $\log_4(3.2^x-8)=x-1$ có mấy nghiệm thì các em xét: $f(x)=x-1-\log_4(3.2^x-8)$



Chú ý là nhìn qua thì $x>1$ nên ta sẽ cho Start từ 1 tới 20 vì Table chỉ tính được 20 giá trị thôi



Ví dụ này đặc biệt quá, ra luôn 2 nghiệm, nên Table cũng là 1 cách để tìm nghiệm nhé các em về bản chất nó cũng là tính giá trị biểu thức như CALC nhưng mà nó tính được nhiều hơn và tổng quan hơn, các em xem ví dụ ở phần chuyên đề nhé sẽ thấy rõ hơn sự khác biệt Table và Solve trong tìm số nghiệm của phương trình.

5. Kĩ thuật giải hệ : tìm mối quan hệ (trích từ sách Bí Kíp Thế Lực ver tự luận)

Sơ đồ chung để giải hệ phương trình:

Từ 1 trong 2 phương trình, hoặc phức tạp hơn là phải kết hợp 2 phương trình

↓

Mối quan hệ giữa x và y

(muốn làm được điều này thì các em phải dùng các pp thế, đưa về phương trình tích, ẩn phụ, hàm số, đánh giá….)

↓

Thế vào 1 trong các phương trình để đưa về phương trình 1 ẩn, có thể là giải được luôn, hoặc có thể là một phương trình chứa căn phải dùng thêm phương pháp mới giải được, tùy vào mức độ đề thi

a. Kĩ thuật tìm nhanh mối quan hệ:

Ví dụ 1: Cho hệ : $\begin{cases} \sqrt{x^2-x-y-1}.\sqrt[3]{x-y-1}=y+1 \\ x+y+1+\sqrt{2x+y}=\sqrt{5x^2+3y^2+3x+7y} \end{cases}$

Gọi (x_1, y_1) là nghiệm của hệ tính $x_1 + y_1$

A.0 B.1 C.2 D.3

Hướng dẫn:

Các em chỉ cần lọc thô với $y = 100$ cho nhanh:

Bước 1: Nhập nguyên phương trình 1 vào

```
◄ ³√X−Y−1 −(Y+1)
```

Bước 2: Gọi chương trình SOLVE và khởi tạo giá trị tham số $Y = 100$

SHIFT CALC 1 0 0 = =

```
Y?                     √X²−X−Y−1 ³√X−Y−▶
                       X=            102
                  100  L−R=            0
```

Sau khi ra $X = 102$ thì các em phải tìm với $Y = 100$ thì còn nghiệm X nào khác không bằng cách chia cho (X−100) như là phần giải phương trình đó.

```
◄(Y+1))÷(X−102)    Y?          Can't Solve

                          100  [AC]   :Cancel
                               [◄][▶]:Goto
```

Từ đó suy ra được một mối quan hệ duy nhất : $x - y = 2 \to y = x - 2$

Thay vào phương trình 2 ta được:

$2x - 1 + \sqrt{3x-2} = \sqrt{8x^2 - 2x - 2}$ Điều kiện : $x \geq \frac{2}{3}$

```
◄−2 −√8X²−2X−2
```

SHIFT CALC 0 =

```
2X−1+√3X−2 −√8X²▶   ◄²−2X−2)÷(X−1)    Can't Solve
X=             1
L−R=           0                      [AC]   :Cancel
                                      [◄][▶]:Goto
```

Bấm máy ra nghiệm x = 1 là nghiệm duy nhất

Vậy nghiệm của hệ là $(1;-1) \to x_1 + y_1 = 0$

b. Kĩ thuật tìm mối quan hệ với căn thức: các em chọn y cho căn thức ra giá trị đẹp thì mới dễ nhìn mối quan hệ.

Ví dụ 1: Cho hệ: $\begin{cases} (4x^2+1)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0 (1) \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 (2) \end{cases}$

Gọi (x_1, y_1) là nghiệm của hệ tính $x_1 . y_1$

A.0 B.1 C.2 D.3

Điều kiện: $y \leq \frac{5}{2}$, $x \leq \frac{3}{4}$

- Bảng kết quả với phương trình 1: $(4x^2+1)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0$

Y	0.5	2	-2
$\sqrt{5-2y}$	2	1	3
X	1	0.5	1.5

Từ đó suy ra mối quan hệ là : $2x=\sqrt{5-2y} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x=5-2y \end{cases} \Rightarrow y=\dfrac{5-x}{2}$ thế vào (2)

$$4x^2+\left(\frac{5}{2}-2x^2\right)^2+2\sqrt{3-4x}-7=0(3)$$

Bấm máy được : $x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow y=2 \rightarrow x_1.y_1=1$

III.Tính giới hạn – Nhị thức Newton

1. Tính giới hạn.

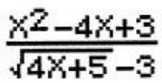
Phần này có thể nói là 1 phần rất dễ các em ạ, thực chất là tính giá trị biểu thức tại điểm lân cận cái điểm mình cần tính thôi.

Ví dụ x tiến tới 1 thì các em lấy 0.999999 hoặc 1.000001 thôi

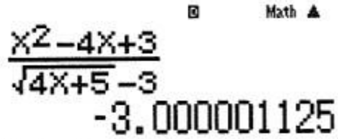
Hoặc dùng công thức Lopital ở chuyên đề giới hạn nhé.

Ví dụ 1: Tìm $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{\sqrt{4x+5-3}}$

Các em nhập biểu thức:

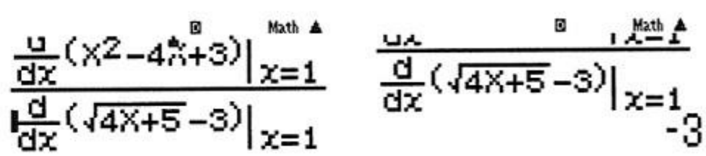


Sao đó dùng CALC để tính :



Vậy ta được kết quả là -3

Hoặc tính cách khác:



Nói chung dạng tính lim này đa phần là dễ, anh cũng đã nói chi tiết 1 lần nữa ở phần chuyên đề rồi, cả cách làm sao để chuyển về phân số nếu kết quả là số thập phân vô hạn tuần hoàn.

2.Nhị thức newton

Cách tìm hệ số x^m trong khai triển anh đã trình bày ở chuyên đề , ở phần này anh sẽ không nhắc lại nữa mà sẽ mở rộng hơn:

Chúng ta xét khai triển: $(ax+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (ax)^k . b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} . x^k$

Hệ số của x^k trong khai triển là : $C_n^k a^k b^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} . a^k b^{n-k}$

Để đơn giản hóa các em đặt : $\begin{cases} k_1 = k \\ k_2 = n-k \end{cases} \Rightarrow k_1 + k_2 = n$ mà ta đang cần tìm x^m do đó ta có hệ sau : $\begin{cases} k_1 + k_2 = n \\ k_1 = m \end{cases}$ và hệ số cần tìm là : $\frac{n!}{k_1! k_2!} . a^{k_1} b^{k_2}$

Chúng ta lại xét tiếp khai triển 3 số hạng :

$$(ax^2+bx+c)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (ax^2)^k . (bx+c)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} C_n^k (ax^2)^k C_i^{n-k} (bx)^i . c^{n-k-i} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n-k} C_n^k C_i^{n-k} a^k b^i . c^{n-k-i} . x^{2k+i}$$

Để cho gọn các em lại đặt như sau : $\begin{cases} k_1 = k \\ k_2 = i \\ k_3 = n-k-i \end{cases} \Rightarrow k_1 + k_2 + k_3 = n$

Mà chúng ta lại đăng đi tìm x^m do đó: $2k+i=m$, ta có hệ sau : $\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = n \\ 2k_1 + k_2 = m \end{cases}$

Từ hệ phương trình các em sẽ tìm được k_1, k_2, k_3 và từ đó tính được hệ số bằng công thức:

$$C_n^k C_i^{n-k} a^k b^i . c^{n-k-i} = \frac{n!}{(n-k)!k!} . \frac{(n-k)!}{(n-k-i)!i!} a^k b^i . c^{n-k-i}$$

$$= \frac{n!}{k!i!(n-k-i)!} a^k b^i . c^{n-k-i} = \frac{n!}{k_1! k_2! k_3!} . a^{k_1} . b^{k_2} . c^{k_3}$$

Vậy là chúng ta đã có công thức tổng quát cho 2 trường hợp khá đơn giản, cách để nhớ cái hệ cũng rất đơn giản: $\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = n \\ 2k_1 + k_2 = m \end{cases}$

Từ $ax^2 \to 2.k_1 \quad bx \to 1.k_2 \quad \to 2k_1 + k_2$ chính là số mũ của x^m trong khai triển

Ví dụ 1: Tìm hệ số của x^6 trong khai triển $P = (3x^2 - 2x - 1)^9$

Các em viết luôn hệ sau : $\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 9 \\ 2k_1 + k_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 \le 3 \\ k_2 = 6 - 2k_1 \\ k_3 = 9 - (k_1 + k_2) = 3 + k_1 \end{cases}$

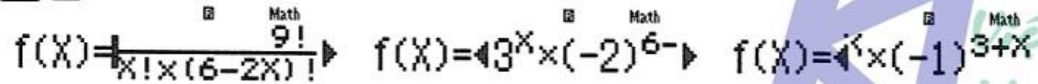
(các em để cấu trúc như anh nhé)

Made in by CASIO EXPERT – Nguyễn Thế Lực

Cách 1:

Sau đó các em vào Table và nhập : $F(x) = \frac{9!}{X!*(6-2X)!*(3+X)!} * 3^X . (-2)^{6-2X} . (-1)^{3+X}$

MODE 7



Sau đó các em bấm = = để bỏ qua G(X)
Start các em cho là 0= End các em cho là 3= (vì mình chỉ cần chạy tới 3 thôi) Step 1= nhé

Start?	End?	Step?
0	3	1

Sao đó ghi lại các số hạng này vào để tí nữa cộng lại

	X	F(X)
1	0	-5376
2	1	30240
3	2	-27216

-5376

	X	F(X)
3	2	-27216
4	3	2268
5		

Các em cộng lại được:

−5376+30240−272▸

-84

Vậy hệ số của x^6 trong khai triển là **-84**

Cách 2: Sử dụng lập trình dòng lệnh – Thế Lực

Các em nhập như sau:

ALPHA) ALPHA CALC ALPHA) + 1 ALPHA ∫ ALPHA S⇔D ALPHA CALC ALPHA S⇔D + ▭/▭ 9 SHIFT x^{-1} ▼ ALPHA)
SHIFT x^{-1} × (6 − 2 ALPHA)) SHIFT x^{-1} × (3 + ALPHA)) SHIFT x^{-1} ▶ × 3 $x^{■}$
ALPHA) ▶ × (− 2) $x^{■}$ 6 − 2 ALPHA) ▶ × (− 1) $x^{■}$ 3 + ALPHA)

X=X+1:Y=Y+ 9! / X!×(6 ▸ ◂ 9! / -2X)!×(3+X)! ×3 ▸ ◂3^X×(−2)^(6−2X)×(− ▸

Sau đó các em bấm CALC rồi bấm **-1= 0=** để khởi tạo cho $X=-1, Y=0$ (*)
Sau đó **bấm =** , thì lúc này $k_1 = 0$ và để nó tính ra hệ số thì các em **bấm =**

X=X+1	Y=Y+ 9! / X!×(6−2X)!× ▸
0	-5376

Vậy là đợt 1 đã xong, các em lại bấm = tiếp , rồi = tiếp , rồi = tiếp : đây là các thông số khởi đầu của đợt 2

X?	Y?	X=X+1
0	-5376	1

Bây giờ lại bấm = như đợt 1 : thì nó hiện hệ số lúc này là tổng của hệ số lúc $k_1 = 0$ và $k_1 = 1$

Y=Y+ 9! / X!×(6−2X)!× ▸

24864

Tiếp theo lại bấm = tiếp

X? 1 | Y? 24864 | X=X+1 2

Kết quả đợt 3

$Y=Y+\frac{9!}{X!\times(6-2X)!\times}$ ▷ -2352

X? 2 | Y? -2352

Các em phải chú ý bấm = liên tục tới 3 thì bấm chậm thôi vì đây là đợt cuối $k_1 = 3$

X=X+1 3 | $Y=Y+\frac{9!}{X!\times(6-2X)!\times}$ ▷ -84

Nếu cứ bấm mũa thì cũng chẳng sao vì nó sẽ báo lỗi

X? 4 | Y? -84 | Math ERROR [AC] :Cancel [◀][▶]:Goto

Mẹo nhập xong ở (*) bao giờ báo lỗi thì dừng: bấm RCL S⇔D

Y -84 | X 4

(Nhưng chú ý là khi đó X phải là 4 nhé chứ X là1,2,3 thì lại đẩy sang trái CALC tiếp : xem ví dụ 2)

Ví dụ 2: Tìm hệ số của x^8 trong khai triển $P=(1+x^2(1-x))^8=(-x^3+x^2+1)^8$ **(A-2004)**

Các em tổng quát lên sẽ được công thức : $\begin{cases} k_1+k_2+k_3=8 \\ 3k_1+2k_2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 \le 2 \\ k_2 = \dfrac{8-3k_1}{2} \\ k_3 = 8-(k_1+k_2) = 4+\dfrac{k_1}{2} \end{cases}$

Các em nhập vào :

Dấu : các em nhập là

$X=X+1:Y=Y+\frac{8!}{X!\times\left(\frac{8-3X}{2}\right)!\times\left(4+\frac{X}{2}\right)!}\times(-1)^X$

Sau đó các em bấm CALC và cho $X=-1, Y=0$ và máy hiện

```
X=X+1
                 0
```

Các em lại ấn =

$$Y=Y+\frac{8!}{X!\times\left(\frac{8-3X}{2}\right)!\times|}$$
70

Rồi lại ấn = = =

```
X?        Y?        X=X+1
   0         70         1
```

Thì nó báo lỗi do không có giai thừa của cơ số không nguyên

```
Math ERROR

[AC]  :Cancel
[◀][▶]:Goto
```

Sau đó các em bấm "đẩy sang trái" và bấm CALC rồi lại = rồi lại =

```
X?        Y?        X=X+1
   1         70         2
```


Tới đây là $k_1=2$ chỉ việc = là ra hệ số Y

$$Y=Y+\frac{8!}{X!\times\left(\frac{8-3X}{2}\right)!\times|}$$
238

Vậy hệ số của x^8 trong khai triển trên là **238**

Ví dụ 3: Số hạng không chứa x trong khai triển $P=(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}})^7, x>0$

Các em viết lại chút trông cho nghệ thuật: $P=(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}})^7=(x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{-1}{4}})^7$

Các em viết luôn hệ: $\begin{cases} k_1+k_2=7 \\ \frac{1}{3}k_1-\frac{1}{4}k_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1+k_2=7 \\ 4k_1-3k_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 \le \frac{7}{1+\frac{4}{3}}=3 \\ k_2=\frac{4}{3}k_1 \end{cases}$

Nhập vào máy: dùng Table nhé

$f(X)=\dfrac{7!}{X!\times\frac{4X}{3}!}$ Start? 0 End? 3

Step? 1

X	F(X)
1	ERROR
2	ERROR
3	35

VI.Tính nguyên hàm – tích phân

a. **Tích phân xác định : Dạng này khá đơn giản các em chỉ cần nhập trực tiếp tích phân cần tính và bấm = để ra KQ**

Ví dụ 1: Tính tích phân sau: $\int_1^2 e^x \frac{\ln x}{x^7}dx$

Các em nhập như sau:

[∫] [▭/▭] [SHIFT] [ln] [ALPHA] [)] [▶] [ln] [ALPHA] [)] [)] [)] [▼] [ALPHA] [)] [$x^{\blacksquare}$] [7] [▶] [▶] [▶] [1] [▶] [2] [=]

Và đây là kết quả :

$\int_1^2 \frac{e^X \ln(X)}{X^7}dx$

0.1011388899

Để lưu lại giá trị tích phân để tiện cho việc so sánh các em lưu vào A bằng cách:

[AC] [Ans] [SHIFT] [RCL] [(−)]

Ví dụ áp dụng :

Trích đề mẫu 2016:

Ví dụ 1. Tính tích phân: $I=\int_0^2 \frac{5x+7}{x^2+3x+2}dx$

A. $2\ln 3+3\ln 2$ B. $2\ln 2+3\ln 3$ C. $2\ln 2+\ln 3$ D. $2\ln 3+\ln 4$

Ví dụ2. Tích phân: $I=\int_1^2 x^2\ln x dx$ có giá trị bằng :

A. $\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{3}$ B. $8\ln 2-\frac{7}{3}$ C. $\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}$ D. $24\ln 2-7$

Ví dụ 3: Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số có phương trình:

$y=-x^2+2x+1, y=2x^2-4x+1$

Trước hết ta tìm hoành độ giao điểm để biết cận đã

Giải :

$(2x^2-4x+1)-(-x^2+2x+1)=0$ (Các loại khác không phải bậc 2 hay 3 thì các em giải như phần ở HD ở phía dứa tài liệu về PT-BPT)

a: 3 b: −6 c: 0 $X_1=$ 2 $X_2=$ 0

Sau đó chỉ việc tính (Xem thêm tính năng Abs ở bài số phức)

[∫] [SHIFT] [hyp] [3] [ALPHA] [)] [x^2] [−] [6] [ALPHA] [)] [▶] [▶] [0] [▶] [2] [=]

$$\int_0^2 |3X^2-6X|\,dx$$

4

Ví dụ 4: Biết tích phân: $\int\limits_{-1}^{0}\left(x+1+\frac{2}{x-1}\right)dx = a+b\ln 2$. Tính a+b

A. $\frac{3}{2}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $-\frac{5}{2}$

Hướng dẫn :

Trước hết các em bấm kết quả tích phân rồi lưu vào A.

$$\int_{-1}^{0}\left(X+1+\frac{2}{X-1}\right)dx \qquad \text{Ans}\rightarrow A$$

-0.8862943611 -0.8862943611

Sau đó vào Table: Mode 7

$$f(X)=\frac{A-X}{\ln(2)}$$

Rồi bấm = = và cho Start 4= End 4= và Step 0.5=

	X	F(X)
9	0	-1.278
10	0.5	
11	1	-2.721

-2

Vậy là $a=0,5$ $b=-2 \rightarrow a+b=\frac{-3}{2}$

b. Nguyên hàm : tích phân không có cận, do đó ta phải cho nó giá trị của cận tùy ý

Ví dụ 1: Tìm a>0 sao cho : $I=\int\limits_0^a xe^{\frac{x}{2}}dx=4$ rồi điền vào chỗ trống

Thông thường họ sẽ cho a nguyên vì là họ chấm bằng máy nên để số đẹp thì máy dễ chấm hơn là số xấu.

Ta thay lần lượt a=1, a=2 .... Vào xem

$$\int_0^1 Xe^{\frac{X}{2}}dx \qquad \int_0^2 Xe^{\frac{X}{2}}dx$$

0.7025574586 4

Vậy ta được a =2

Để đỡ phải edit nhiều lần thì các em sửa thành:

Đầu tiên gán 1 vào Y bằng cách:

[1] [SHIFT] [RCL] [S⇔D]

Sau đó sửa tích phân thành:

$\int_0^Y Xe^{\frac{X}{2}}dx$

0

Rồi bấm "=" xem KQ là bao nhiêu, sau đó các em lại gán 2 rồi 3... cho đến khi đúng kết quả như yêu cầu:

2 SHIFT RCL S⇔D ▲ =

2→Y

2

$\int_0^Y Xe^{\frac{X}{2}}dx$

4

Như vậy đỡ phải đẩy con trỏ nhiều lần để sửa lại cận của tích phân.

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm của hàm số: $y = xe^{2x}$

A. $\frac{1}{2}e^{2x}(x-\frac{1}{2})+C$ B. $2e^{2x}(x-2)+C$ C. $2e^{2x}(x-\frac{1}{2})+C$ D. $\frac{1}{2}e^{2x}(x-2)+C$

Ở đây ta có 2 cách tính 1 là sử dụng đạo hàm kết quả (đáp án) rồi so sánh với đề bài, cách 2 là tính xuôi

Rõ ràng ở đây, cách 1 là đơn giản nhất vì máy tính đã có sẵn tính năng tính đạo hàm tại 1 điểm xác định cho các em.

Cách 1: Các em xét đạo hàm tại x=1 của 4 đáp án xem có biểu thức nào bằng: $y(1) = 1.e^2$ không?

SHIFT ∫ ▭ 1 ▼ 2 ▶ SHIFT ln 2 ALPHA) ▶ (ALPHA) − 0 • 5) ▶ 1 ▶ − SHIFT ln 2 = °'''

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}e^{2X}(X-0.5)\right)\Big|_{x=1} - e^2$

0°0'0"

Thì thấy đáp án A đúng

Cách 2: Ta có: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Các em xét tích phân từ $\frac{1}{2}$ tới 2 để có 1 cái F(...) = 0

Các em xét đáp án A trước nhé:

$\int_{0.5}^2 Xe^{2X}dx - \frac{1}{2}e^4\left(2-\frac{1}{2}\right)$

0

Vậy các em chọn A nhé.

Tổng kết: Vậy là các em sẽ biến yêu cầu tổng quát của bài toán thành 1 bài tính thông thường bằng cách tự thay số vào cho phù hợp.

V. Số phức

1.Tính toán cơ bản

Để tính được số phức các em phải vào hệ CMPLX bằng cách:

CMPLX Math

MODE 2

Gọi thành phần ảo bằng cách bấm:

CMPLX Math

SHIFT ENG → $\mathbf{i}$

Ví dụ 1: Tính $(2+i)z+1+3i=\frac{1+2i}{1+i}$

$\frac{\square}{\square}$ 1 + 2 SHIFT ENG ▼ 1 + SHIFT ENG ▶ − 1 − 3 SHIFT ENG) ÷ (2 + SHIFT ENG) =

CMPLX Math ▲

$\left(\frac{1+2\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}-1-3\mathbf{i}\right)\div(2+\triangleright$

$-\frac{3}{10}-\frac{11}{10}\mathbf{i}$

Để tìm số phức liên hợp của z ta dùng hàm Conjg

SHIFT 2 2 1 + SHIFT ENG) =

CMPLX Math ▲

Conjg(1+i)

1−i

Tương tự tính Argument (góc) của z

SHIFT 2 1 1 + SHIFT ENG) =

CMPLX Math ▲

arg(1+i)

45

Tính độ dài ta dùng Abs:

SHIFT hyp 1 + SHIFT ENG =

CMPLX Math ▲

|1+i|

$\sqrt{2}$

Ví dụ 2: $z=(2+i)(1-i)+1+3i$ các em có thể tính z bằng máy rồi dùng Abs hoặc Abs cả biểu thức đó luôn được:

CMPLX Math ▲

$|(2+\mathbf{i})(1-\mathbf{i})+1+3\triangleright$

$2\sqrt{5}$

Ví dụ 3: Tìm tập hợp z thỏa mãn đẳng thức $|z+2+i|=|\bar{z}-3i|$

A. $y=x-1$ B. $y=x+1$ C. $y=-x+1$ D. $y=-x-1$

Anh giải thích 1 chút ví dụ $z=a+bi$ thì ý của họ là mối quan hệ a,b là biểu thức nào trong 4 đáp án ở trên đó.

Thì ở đây mình sẽ lần lượt đi tính 4 đáp án

Đáp án A. $y=x-1$ tức là : $b=a-1 \Rightarrow$ Chọn $b=100, a=101 \rightarrow z=101+100i$

Sau đó nhập :

[−] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [2] [2] [ALPHA] [)] [)] [−] [3] [SHIFT] [ENG]

```
CMPLX              Math ▲          CMPLX              Math ▲
|X+2+i|-|Conjg(▸    ◂-|Conjg(X)-3i|
```

Sau đó tính bằng cách bấm CALC

```
CMPLX     Math ▲
X?
                0
```

Các em nhập là

[CALC] [1] [0] [1] [+] [1] [0] [0] [SHIFT] [ENG] [=]

Được kết quả:

```
CMPLX     Math ▲
|X+2+i|-|Conjg(▸
                0
```


Vậy là đáp án A thỏa mãn yêu cầu , các em thử luôn các đáp án khác để luyện

2.Tìm căn của số phức, module

Ví dụ 1: $\sqrt{-33+56i}$

A. $4+7i$ **B.** $-4-7i$ **C.** $-4+7i\,;\,-4-7i$ **D.** $4+7i\,;-4-7i$

Cách 1 : Các em thử đáp án : Tính mẹo

```
M  CMPLX   Math ▲          M  CMPLX   Math ▲
(4+7i)²                    (-4-7i)²

          -33+56i                    -33+56i
```

Cách 2: Tính không dựa vào đáp án

Các em về COMP tính toán thông thường:

Chúng ta sẽ chuyển từ dạng đại số sang dạng lượng giác để tiến hành khai căn

[SHIFT] [+] [−] [3] [3] [SHIFT] [)] [5] [6] [)] [=]

```
M       Math ▲
Pol(-33,56)

r=65,θ=2.103300▸
```

Khi đó các giá trị góc và bán kính này được lưu ở X,Y

```
M       Math ▲          M       Math ▲
X                       Y

             65                2.103300425
```

Sau khi chuyển được sang lượng giác rồi thì các em nhớ tới công khai căn dạng lượng giác là

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \to \sqrt{z} = \sqrt{r}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2})$

Do đó mình lại chuyển từ lượng giác sang đại số bằng cách bấm

SHIFT − √■ ALPHA) ▶ SHIFT) ALPHA S⇔D ÷ 2) =

```
Rec(√X,Y÷2)

        X=4, Y=7
```

Cách 3: Theo SGK :

$z = 33 - 56i = (a+bi)^2 \to \begin{cases} a^2 - b^2 = 33 \\ 2ab = -56 \end{cases} \to a^2 - \left(\frac{-28}{a}\right)^2 = 33$

```
X²-(28/X)²-33          X²-(28/X)²-33
                       X=              7
                       L-R=            0
◀28/X)²-33)÷(X-7)      (X²-(28/X)²-33)÷▶
                       X=             -7
                       L-R=            0
```

Vậy đáp án là D.

Ví dụ 2. Tìm module của z biết $z + (1+i)\bar{Z} = 5 + 2i$

A. $\sqrt{2}$ **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** $\sqrt{5}$ **D.** $\sqrt{10}$

Các em nhập vào máy tính như sau:

ALPHA) + (1 + SHIFT ENG) SHIFT 2 2 ALPHA)) − (5 + 2 SHIFT ENG)

```
X+(1+i)Conjg(X)▶  ◀njg(X)-(5+2i)
```

Sau đó các em nhập $X = 1000 + 100i$

CALC 1 0 0 0 + 1 0 0 SHIFT ENG =

```
X+(1+i)Conjg(X)▶

        2095+998i
```

Ở đây các em sẽ có:

$\begin{cases} 2095 = 2.1000 + 100 - 5 = 2a + b - 5 \\ 998 = 1000 - 2 = a - 2 \end{cases}$ Mặt khác ta đang muốn phương trình nó bằng 0 thay vì kết quả vừa rồi do đó $\to \begin{cases} 2a + b - 5 = 0 \\ a - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \to |z| = \sqrt{5}$

Lưu ý: các em phải lấy số đầu gần nhất tức là: $2198 = 2a + 2b - 2$; $2795 = 3a - 2b - 5$

Ví dụ 3: Tính module của z^9 biết: $\frac{(z-1)(2-i)}{\bar{z} + 2i} = \frac{3+i}{2}$

A. $\sqrt{2}$ **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** $4\sqrt{2}$ **D.** $16\sqrt{2}$

Các em quy đồng lên và nhập vào máy tính: $2(z-1)(2-i)=(3+i)\left(\bar{z}+2i\right)$ CALC

$z=10000+100i$

```
CMPLX    Math
◀3+i)(Conjg(X)+▶  X?

                          10000
                          +100i

CMPLX    Math ▲
2(X-1)(2-i)-(3+▶

    10098-29304i
```

Ta suy ra được hệ : $\begin{cases} a+b-2=0 \\ 3a-7b+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1 \to z=1+i \to |z|=\sqrt{2} \to |z^2|=16\sqrt{2}$

IV. Ứng dụng trong Oxyz , Oxy

a. Tính khoảng cách từ 1 điểm tới 1 đường thẳng, 1 mặt phẳng:

Với Oxy $d_{A\to(\Delta)}=\dfrac{|Ax_o+By_o+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, với Oxyz : $d_{A\to(P)}=\dfrac{|Ax_o+By_o+Cz_o+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

b. Tính góc tạo bởi 2 đường thẳng (2 vecto chỉ phương) , 2 mặt phẳng (2 vecto pháp tuyến)

$\cos\alpha=\dfrac{|x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$ với Oxy thì các em bỏ z đi là được

c. Tính tích có hướng, vô hướng của 2 vecto,tích hỗn tạp- Ứng dụng tính V bằng tích hỗn tạp

Các em vào tính năng vecto

MODE 8

```
Vector?
1:VctA  2:VctB
3:VctC
```

Sau đó nhẽ nhập dữ liệu cho từng vecto: Chọn 1 để nhập cho VectoA

```
VctA(m)  m?
1:3      2:2
```

Chọn 1 để chọn hệ trục Oxyz

```
A    VCT
[        0      0]

                0
```

Sau đó các em nhập dữ liệu cho nó

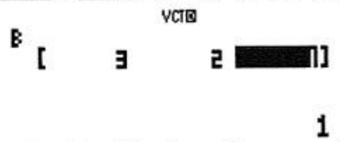
```
A    VCT
[    1      2      ]

                3
```

Để nhập tiếp dữ liệu cho vectoB các em bấm

SHIFT 5 2 2 1

Lại nhập dữ liệu cho nó:

3 = 2 = 1 =



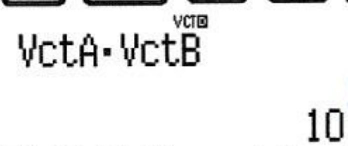
Tính tích có hướng của vecto A và B ta bấm như sau:

AC SHIFT 5 3 SHIFT 5 4 =

Ta được vecto mới vuông góc với 2 vecto A và B là tích có hướng của chúng

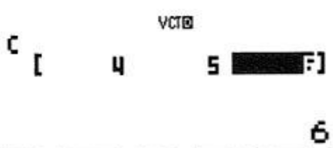
Để tính tích vô hướng ta bấm như sau:

AC SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4 =



Để tính tích hỗn tạp của 3 vecto thì ta sẽ nhập thêm dữ liệu cho vectoC

AC SHIFT 5 2 3 1 4 = 5 = 6 =



AC SHIFT 5 3 SHIFT 5 4 SHIFT 5 7 SHIFT 5 5 =

Để tính thể tích của tứ diện tạo bởi 4 điểm (=> 3 vecto) thì các em dùng công thức:

$V_{A.BCD} = \frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}$

Ví dụ áp dụng:

Cho bốn điểm $A(1;0;1), B(2;2;2), C(5;2;1), D(4;3;-2)$

Tính thể tích tứ diện ABCD ?

Đây là Skill Casio ver2.0 của sách Luyện Thi Trắc Nghiệm Toán 2017 ver1.0 bản Skill Casio sẽ tiếp tục được Update ở các phiên bản sau.

CHUYÊN ĐỀ HÀM SỐ VÀ CÂU LIÊN QUAN

PHẦN 1: KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ

1. 1 HÀM SỐ BẬC NHẤT/BẬC NHẤT

ĐỀ THI NĂM TRƯỚC

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

1. Đề dự doán 2017: $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$

2. *ĐHKD – 2011*: $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$

3. *ĐHKA – 2011:* $y=\dfrac{-x+1}{2x-1}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$

Bài 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y=\dfrac{x}{x+1}$

Bài 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$

Bài 4. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y=\dfrac{3-2x}{x-1}$

Bài 5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{-x+1}{x+1}$

ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN

Bài 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

- Đạo hàm: $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}<0, \forall x\in D$

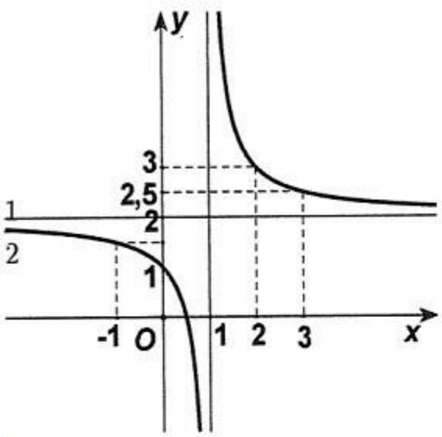
- Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng xác định và không đạt cực trị.

• Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = 2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x \to 1^-} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} y = +\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng.

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	$2 \searrow$		$-\infty$ || $+\infty$		$\searrow 2$



• Giao điểm với trục hoành: $y = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Giao điểm với trục tung: cho $x = 0 \Rightarrow y = 1$

• Bảng giá trị:

x	-1	0	1	2	3
y	$3/2$	1	||	3	$5/2$

• Đồ thị hàm số như hình vẽ bên đây.

Bài 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \dfrac{x}{x+1}$

• Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

• Đạo hàm: $y' = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$

• Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định và không đạt cực trị.

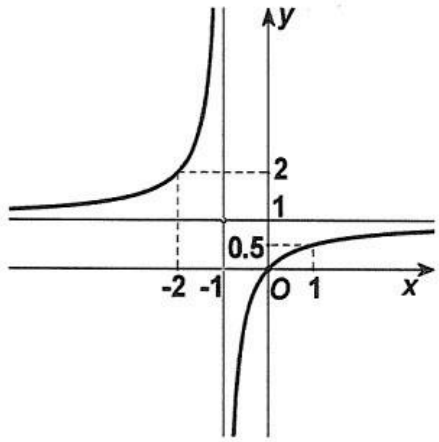
• Giới hạn và tiệm cận:

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x \to (-1)^-} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to (-1)^+} y = -\infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng.

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1



• Giao điểm với trục hoành: cho $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Giao điểm với trục tung: cho $x = 0 \Rightarrow y = 0$

• Bảng giá trị:

x	-3	-2	-1	0	1
y	1,5	2	||	0	0,5

• Đồ thị hàm số như hình vẽ bên đây:

Bài 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$

• Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

• Đạo hàm: $y' = \dfrac{-3}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in D$

• Hàm số luôn nghịch biến trên các khoảng xác định và không đạt cực trị.

• Giới hạn và tiệm cận:

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = 2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 2$ $\Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x \to 1^-} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} y = +\infty$ $\Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng.

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2

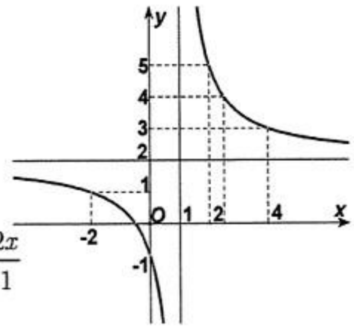
• Giao điểm với trục hoành: cho $y = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

Giao điểm với trục tung: cho $x = 0 \Rightarrow y = -1$

• Bảng giá trị:

x	-2	0	1	2	4
y	1	-1	$\|\|$	5	3

• Đồ thị hàm số như hình vẽ bên đây:



Bài 4. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = \dfrac{3-2x}{x-1}$

Hàm số: $y = \dfrac{3-2x}{x-1} = \dfrac{-2x+3}{x-1}$

• Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

• Đạo hàm: $y' = \dfrac{-1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in D$

• Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định và không đạt cực trị.

• Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -2$ $\Rightarrow y = -2$ là tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to1^-} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} y = +\infty$ $\Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng.

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$-$	$\|\|$	$-$
y	$-2 \searrow -\infty$	$\|\|$	$+\infty \searrow -2$

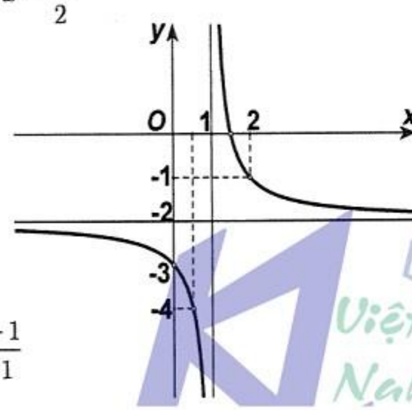
• Giao điểm với trục hoành: $y = 0 \Leftrightarrow -2x+3=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Giao điểm với trục tung: cho $x = 0 \Rightarrow y = -3$

• Bảng giá trị:

x	0	$1/2$	1	$3/2$	2
y	-3	-4	$\|\|$	0	-1

• Đồ thị hàm số như hình vẽ bên đây:



Bài 5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{-x+1}{x+1}$

▹ TXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

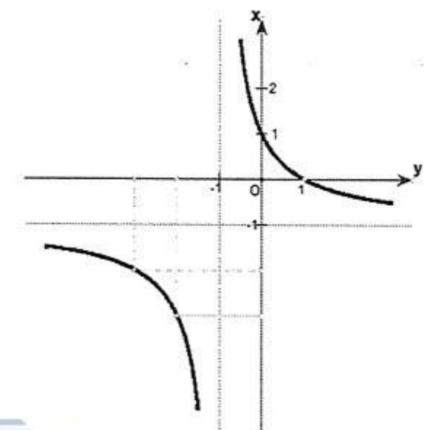
▹ Chiều biến thiên y'= $\dfrac{-2}{(x+1)^2}$, y' < 0 với mọi x ≠ -1, hs nghịch biến trên các khoảng: (-∞;-1) và (-1;+∞)

▹ Tiệm cận : $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{-x+1}{x+1} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{-x+1}{x+1} = -\infty$ Nên x = - 1 là T C Đ

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = -1$ Nên y = -1 là T C N

▹ Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	-1 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$		↘ -1



▹ Đồ thị: đồ thị cắt Ox tại (1;0), cắt Oy tại (0;1)

1.2 HÀM SỐ BẬC BA
ĐỀ THI ĐẠI HỌC NĂM TRƯỚC

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

1. *THPT Quốc gia 2015*: $y = x^3 - 3x$

2. (*ĐHKB – 2012*) $y = x^3 - 3x^2 + 3$

3. (*ĐHKD – 2012*): $y = \dfrac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + \dfrac{2}{3}$

4. (*ĐHKA – 2010):* $y = x^3 - 2x^2 + 1$

5. *(ĐHKB – 2007):* $y = -x^3 + 3x^2 - 4$

6. *(TK 2010):* $y = -x^3 - x$

7. *(TK 2009):* $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

8. (*ĐHKA – 2006*): $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

9. (*ĐHKD – 2005*): $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{1}{3}$

10. (*ĐHKB – 2008*): $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$

11. (*ĐHKB – 2004*): $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + 3x$

Bài 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = (1-x)^2(4-x)$.

Bài 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$

Bài 4. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$

Bài 5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = -x^3 + 3x^2 - 1$

Bài 6. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = -x^3 + 3x + 1$

ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN

Bài 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = x^3 - 3x^2 + 3x$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 6x + 3$
- Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	**0**	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	**1**	$\nearrow$	$+\infty$

• Hàm số đồng biến trên cả tập xác định; hàm số không đạt cực trị.

• $y'' = 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$. Điểm uốn là $I(1;1)$

• Giao điểm với trục hoành:

Cho $y = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

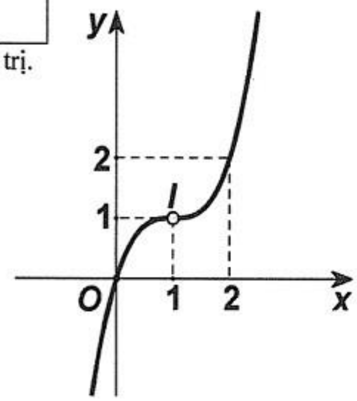
Giao điểm với trục tung:

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 0$

• Bảng giá trị:

x	0	1	2
y	0	1	2

• Đồ thị hàm số (như hình vẽ bên đây):



Bài 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = (1-x)^2(4-x)$.

$y = (1-x)^2(4-x) = (1-2x+x^2)(4-x) = 4 - x - 8x + 2x^2 + 4x^2 - x^3 = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$

$y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$

• Tập xác định: $D = R$

• Đạo hàm: $y' = -3x^2 + 12x - 9$

• Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 12x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

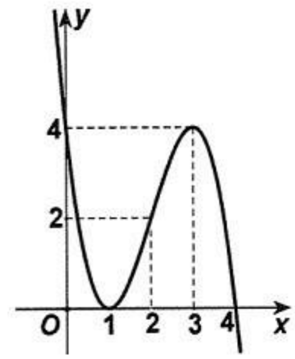
• Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	**0**	$+$	**0**	$-$	
y	$+\infty$	↘	**0**	↗	**4**	↘	$-\infty$

• Hàm số đồng biến trên khoảng (1;3), nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$, $(3;+\infty)$

• Hàm số đạt cực đại $y_{CĐ} = 4$ tại $x_{CĐ} = 3$; đạt cực tiểu $y_{CT} = 0$ tại $x_{CT} = 1$



• $y'' = -6x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2$. Điểm uốn là $I(2;2)$

• Giao điểm với trục hoành: $y = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 6x^2 - 9x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$

Giao điểm với trục tung: $x = 0 \Rightarrow y = 4$

• Bảng giá trị:

x	0	1	2	3	4
y	4	0	2	4	0

• Đồ thị hàm số: nhận điểm I làm trục đối xứng như hình vẽ bên đây

Bài 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$

• Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

• Đạo hàm: $y' = 6x^2 + 6x$

• Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoac $x = -1$

• Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

• Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1),(0;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$

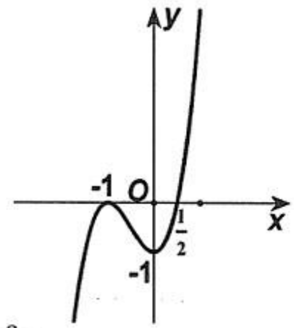
Hàm số đạt cực đại $y_{CĐ} = 0$ tại $x_{CD} = -1$, đạt cực tiểu $y_{CT} = -1$ tại $x_{CT} = 0$.

• $y'' = 12x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}$. Điểm uốn: $I\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$

• Giao điểm với trục hoành:

cho $y=0 \Leftrightarrow 2x^3+3x^2-1=0 \Leftrightarrow x=-1$ hoac $x=\frac{1}{2}$

Giao điểm với trục tung: cho $x=0 \Rightarrow y=-1$



• Bảng giá trị:

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
y	-1	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0

• Đồ thị hàm số: như hình vẽ bên đây

Bài 4. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

• Đạo hàm: $y'=-x^2+4x-3$

• Cho $y'=0 \Leftrightarrow -x^2+4x-3=0 \Leftrightarrow x=1$; $x=3$

• Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{4}{3}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

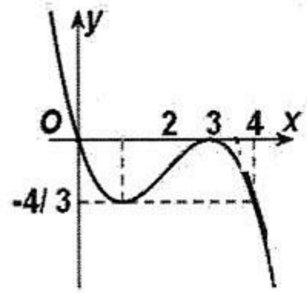
• Hàm số đồng biến trên khoảng (1;3), nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$, $(3;+\infty)$

Hàm số đạt cực đại $y_{CĐ}=0$ tại $x_{CD}=3$; đạt cực tiểu $y_{CT}=-\frac{4}{3}$ tại $x_{CT}=1$

• $y''=-2x+4=0 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=-\frac{2}{3}$. Điểm uốn là $I\ 2;-\frac{2}{3}$

• Giao điểm với trục hoành: cho $y=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$

Giao điểm với trục tung: cho $x = 0 \Rightarrow y = 0$



• Bảng giá trị:

x	0	1	2	3	4
y	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$

• Đồ thị hàm số: như hình vẽ

Bài 5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = -x^3 + 3x^2 - 1$

• Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

• Đạo hàm: $y' = -3x^2 + 6x$

• Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoac $x = 2$

• Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$

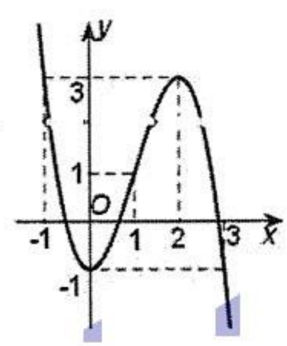
• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	+	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

• Hàm số đồng biến trên khoảng (0;2); nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$, $(2;+\infty)$

Hàm số đạt cực đại $y_{CĐ} = 3$ tại $x_{CĐ} = 2$

đạt cực tiểu $y_{CT} = -1$ tại $x_{CT} = 0$



• Giao điểm với trục tung: cho $x = 0 \Rightarrow y = -1$

• Điểm uốn: $y'' = -6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$.

Điểm uốn là $I(1;1)$

• Bảng giá trị:

x	-1	0	1	2	3
y	3	-1	1	3	-1

• Đồ thị hàm số như hình vẽ:

Bài 6. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: $y = -x^3 + 3x + 1$

• Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

• Đạo hàm: $y' = -3x^2 + 3$

• Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

• Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

• Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$; nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$

Hàm số đạt cực đại $y_{CĐ} = 3$ tại tại $x_{CĐ} = 1$

đạt cực tiểu $y_{CT} = -1$ tại $x_{CT} = -1$

• $y'' = -6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1$.

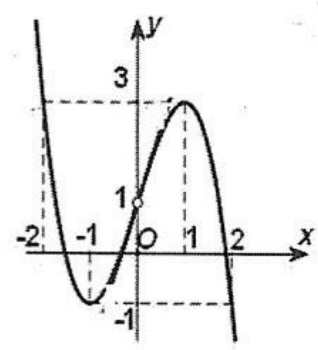
Điểm uốn là $I(0;1)$

• Giao điểm với trục tung: cho $x = 0 \Rightarrow y = 1$

• Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
y	3	-1	1	3	-1

• Đồ thị hàm số như hình vẽ:



1.3 HÀM SỐ BẬC BỐN

ĐỀ THI NĂM TRƯỚC

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

1. *THPT Quốc gia 2016*: $y=-x^4+2x^2$

2. *ĐHKB – 2011*: $y=x^4-4x^2+1$

3. *ĐHKD – 2010*: $y=-x^4-x^2+6$

4. *TK – 2011*: $y=-\frac{1}{4}x^4+x^2-2$

5. *TK – 2010*: $y=\frac{x^4}{2}+x^2-\frac{3}{2}$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y=-x^4+4x^2-3$

Bài 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y=x^2(4-x^2)$

Bài 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y=x^4+2x^2-3$

Bài 4. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y=\frac{x^4}{2}-x^2-4$

Bài 5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y=(x^2-2)^2-1$

Bài 6. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số: $y=x^4-4x^2+3$.

Bài 7. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số: $y=x^4-2x^2-1$

Bài 8. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y=2x^4-4x^2$

ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN

Bài 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y=-x^4+4x^2-3$

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

• Đạo hàm: $y'=-4x^3+8x$

$$y'=0 \Leftrightarrow -4x^3+8x=0 \Leftrightarrow 4x(-x^2+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x=0\\-x^2+2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$$

• Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-\sqrt{2}),(0;\sqrt{2})$,

nghịch biến trên các khoảng $(-\sqrt{2};0),(\sqrt{2};+\infty)$

Hàm số đạt cực đại $y_{CĐ} = 1$ tại $x_{CĐ} = \pm\sqrt{2}$, đạt cực tiểu $y_{CT} = -3$ tại $x_{CT} = 0$.

• Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

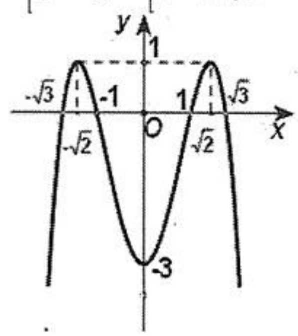
• Giao điểm với trục hoành: cho $y = 0 \Leftrightarrow -x^4 + 4x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$

Giao điểm với trục tung: cho $x = 0 \Rightarrow y = -3$

• Bảng giá trị:

x	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
y	0	1	-3	1	0

• Đồ thị hàm số:



Bài 2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = x^2(4 - x^2)$

$y = x^2(4 - x^2) = -x^4 + 4x^2$

• Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

• Đạo hàm: $y' = -4x^3 + 8x$

•Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 8x = 0 \Leftrightarrow 4x(-x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = 0 \\ -x^2 + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$

• Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-\sqrt{2}),(0;\sqrt{2})$, nghịch biên trên các khoảng $(-\sqrt{2};0),(\sqrt{2};+\infty)$

Hàm số đạt cực đại $y_{CĐ} = 4$ tại $x_{CĐ} = \pm\sqrt{2}$,

đạt cực tiểu $y_{CT} = 0$ tại $x_{CT} = 0$.

• Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$

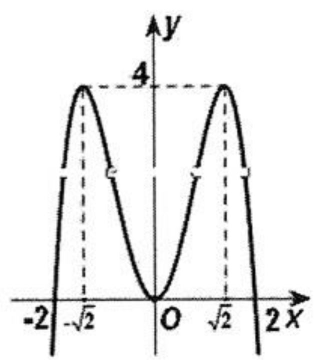
• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

• Giao điểm với trục hoành:

cho $y = 0 \Leftrightarrow -x^4 + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 0 \\ x^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$

Giao điểm với trục tung: cho $x = 0 \Rightarrow y = 0$



• Bảng giá trị:

x	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2
y	0	0	0	4	0

• Đồ thị hàm số như hình vẽ bên đây:

Bài 3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = x^4 + 2x^2 - 3$

• Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

• Đạo hàm: $y' = 4x^3 + 4x$

• Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

• Hàm số đồng biến trên các khoảng $(0;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$

Hàm số đạt cực tiểu $y_{CT} = -3$ tại $x_{CT} = 0$.

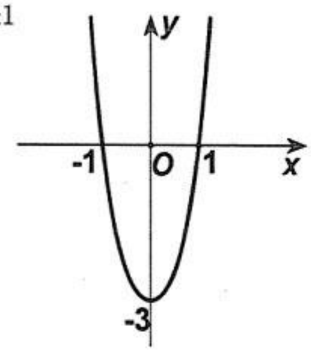
• Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

• Giao điểm với trục hoành:

Cho $y = 0 \Leftrightarrow x^4 + 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$



Giao điểm với trục tung: cho $x = 0 \Rightarrow y = -3$

• Bảng giá trị:

x	-1	0	1
y	0	-3	0

• Đồ thị hàm số: như hình vẽ bên đây

Bài 4. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = \dfrac{x^4}{2} - x^2 - 4$

• Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

• Đạo hàm: $y' = 2x^3 - 2x$

• Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$

• Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0), (1;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1), (0;1)$

Hàm số đạt cực đại $y_{CĐ} = -4$ tại $x_{CD} = 0$.

Hàm số đạt cực tiểu $y_{CT} = -\dfrac{9}{2}$ tại $x_{CT} = \pm 1$.

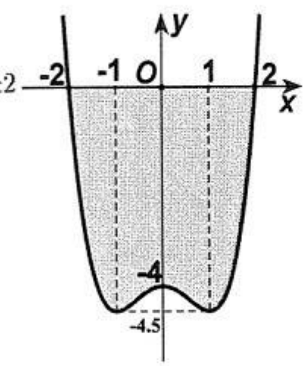
• Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	$-\frac{9}{2}$	↗	-4	↘	$-\frac{9}{2}$	↗	$+\infty$

• Giao điểm với trục hoành:

Cho $y = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^4 - x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 4 \\ x^2 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$



Giao điểm với trục tung: cho $x = 0 \Rightarrow y = -4$

• Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
y	0	$-4{,}5$	-4	$-4{,}5$	0

• Đồ thị hàm số: như hình vẽ bên đây

Bài 5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = (x^2 - 2)^2 - 1$

$y = (x^2 - 2)^2 - 1 = x^4 - 4x^2 + 4 - 1 = x^4 - 4x^2 + 3$

• Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

• Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 8x$

• Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$

• Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\sqrt{2};0),(\sqrt{2};+\infty)$,

nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-\sqrt{2}),(0;\sqrt{2})$

Hàm số đạt cực đại $y_{CĐ} = 3$ tại $x_{CĐ} = 0$.

Hàm số đạt cực tiểu $y_{CT} = -1$ tại $x_{CT} = \pm\sqrt{2}$.

• Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

• Giao điểm với trục hoành:

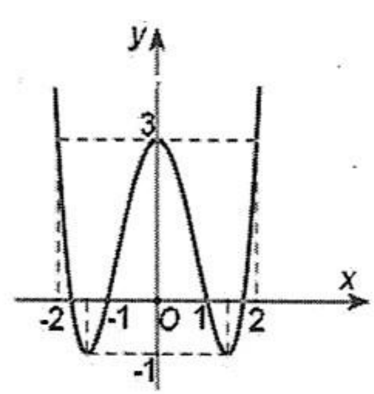
Cho $y = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$

Giao điểm với trục tung: cho $x = 0 \Rightarrow y = 3$

• Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1	2
y	3	-1	3	-1	3

• Đồ thị hàm số: như hình vẽ bên đây



PHẦN 2: CÂU LIÊN QUAN HÀM SỐ

Phần này chiếm 1 điểm trong đề thi và khó hơn chút ít so với câu thứ nhất là Khảo sát và vẽ đồ thị. Năm 2015 thi vào Giá trị lớn nhất – nhỏ nhất trong 1 khoảng. Năm 2016 thi vào Cực đại cực tiểu. Nhìn chung năm nay khả năng cao sẽ rơi vào Tiếp tuyến hoặc Tương giao. Tuy nhiên các em vẫn phải học tất bởi nó dễ mà. Tập trung cày chỉ 1 tháng là FULL SKILL.

2.1 Bài toán Tiếp tuyến

Dạng 1: *Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm* $M(x_0, y_0) \in (C): y = f(x)$

* Tính $y' = f'(x)$; tính $k = f'(x_0)$ (hệ số góc của tiếp tuyến)

* Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M\left(x_0; y_0\right)$ có phương trình

$$y - y_0 = f'(x_0)\left(x - x_0\right) \text{ với } y_0 = f(x_0)$$

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C):

a) Tại điểm A (-1; 7).
b) Tại điểm có hoành độ x = 2.
c) Tại điểm có tung độ y =5.

a) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ có dạng: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Ta có $y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y'(-1) = 0$.

Do đó phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A(-1; 7) là: $y - 7 = 0$ hay y = 7.

b) Từ $x = 2 \Rightarrow y = 7$.

y'(2) = 9. Do đó phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ x = 2 là:

$y - 7 = 9(x - 2) \Leftrightarrow y - 7 = 9x - 18 \Leftrightarrow y = 9x - 11$

c) Ta có: $y = 5 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 5 = 5 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{array}\right.$

+) Phương trình tiếp tuyến tại của (C) tại điểm (0; 5).

Ta có y'(0) = -3.

Do đó phương trình tiếp tuyến là: $y - 5 = -3(x - 0)$ hay y = -3x +5.

+) Phương trình tiếp tuyến tại của (C) tại điểm $(-\sqrt{3}; 5)$.

$y'(-\sqrt{3}) = 3(-\sqrt{3})^2 - 3 = 6$

Do đó phương trình tiếp tuyến là: $y - 5 = 6(x + \sqrt{3})$ hay $y = 6x + 6\sqrt{3} + 5$.

+) Tương tự phương trình tiếp tuyến của (C) tại $(-\sqrt{3};5)$ là: $y = 6x - 6\sqrt{3} + 5$.

Ví dụ 2: Cho đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2x - 4$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.
b) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.
c) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm x_0 thỏa mãn $y''(x_0) = 0$.

Ta có $y' = 3x^2 - 4x + 2$. Gọi $M\left(x_0; y_0\right)$ là tiếp điểm thì tiếp tuyến có phương trình:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \quad (1)$$

a) Khi $M = (C) \cap Ox$ thì $y_0 = 0$ và x_0 là nghiệm phương trình:

$x^3 - 2x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $y'(2) = 6$, thay các giá trị đã biết vào (1) ta được phương trình tiếp tuyến: $y = 6(x - 2)$

b) Khi $M = (C) \cap Oy$ thì $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = y(0) = -4$ và $y'(x_0) = y'(0) = 2$, thay các giá trị đã biết vào (1) ta được phương trình tiếp tuyến: $y = 2x - 4$.

c) Khi x_0 là nghiệm phương trình $y'' = 0$. Ta có: $y'' = 6x - 4$.

$y'' = 0 \Leftrightarrow 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} = x_0 \Rightarrow y_0 = y\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{88}{27}$; $y'(x_0) = y'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$

Thay các giá trị đã biết vào (1) ta được phương trình tiếp tuyến: $y = \frac{2}{3}x - \frac{100}{27}$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (C)

a) Viết phương trình tiếp tuyến d với (C) tai điểm có hoành độ x=2.

b)Tiếp tuyến d cắt lại đồ thị (C) tại điểm N, tìm tọa độ của điểm N.

a) Tiếp tuyến d tại điểm M của đồ thị (C) có hoành độ $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 3$

Ta có $y'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow y'(x_0) = y'(2) = 9$

Phương trình tiếp tuyến d tại điểm M của đồ thị (C) là
$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Rightarrow y = 9(x - 2) + 3 \Rightarrow y = 9x - 15$

Vậy phương trình tiếp tuyến d tại điểm M của đồ thị (C) là $y=9x-15$

b) Giả sử tiếp tuyến d cắt (C) tại N

Xét phương trình $x^3-3x+1=9x-15 \Leftrightarrow x^3-12x+16=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x-8)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-4 \end{array}\right.$

Vậy $N(-4;-51)$ là điểm cần tìm

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=x^3-3x+1 \quad (C)$ và điểm $A(x_0,y_0)\in$ (C), tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm A cắt (C) tại điểm B khác điểm A. tìm hoành độ điểm B theo x_0

Vì điểm $A(x_0,y_0)\in$ (C) $\Rightarrow y_0=x_0^3-3x_0+1$, $y'=3x^2-3 \Rightarrow y'(x_0)=3x_0^2-3$

Tiếp tuyến của đồ thị hàm có dạng:

$$y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0 \Leftrightarrow y=(3x_0^2-3)(x-x_0)+x_0^3-3x_0+1$$
$$\Leftrightarrow y=(3x_0^2-3)(x-x_0)-2x_0^3+1 \ (d)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C):

$$x^3-3x+1=(3x_0^2-3)(x-x_0)-2x_0^3+1 \Leftrightarrow x^3-3x_0^2x+2x_0^3=0 \Leftrightarrow (x-x_0)^2(x+2x_0)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-x_0)^2=0 \\ x+2x_0=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_0 \\ x=-2x_0 \end{array}\right. (x_0\neq 0)$$

Vậy điểm B có hoành độ $x_B=-2x_0$

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến d của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0 thỏa mãn $y''(x_0)=0$ và chứng minh d là tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất.

Ta có $y'=x^2-4x+3 \Rightarrow y''=2x-4$

$$y''(x_0)=0 \Leftrightarrow 2x_0-4=0 \Leftrightarrow x_0=2 \Rightarrow M(2;\frac{2}{3})$$

Khi đó tiếp tuyến tại M có hệ số góc $k_0=y'(x_0)=y'(2)=-1$

Vậy tiếp tuyến d của đồ thị (C) tại điểm $M\left(2;\frac{2}{3}\right)$ có phương trình $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

suy ra $y-\frac{2}{3}=-1(x-2)$ hay $y=-x+\frac{8}{3}$

Tiếp tuyến d có hệ số góc $k_0=-1$

Mặt khác tiếp tuyến của đồ thi (C) tại điểm bấy kỳ trên (C) có hệ số góc
$k=y'(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1\geq -1=k_0$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1$ nên tọa độ tiếp điểm trùng với $M\left(2;\frac{2}{3}\right)$

Vậy tiếp tuyến d của (C) tại điểm $M\left(2;\frac{2}{3}\right)$ có hệ số góc nhỏ nhất.

Ví dụ 6: Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C): $y=\frac{x+2}{x-1}$ tại các giao điểm của (C) với đường thẳng (d): $y=3x-2$.

+ Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C):

$\frac{x+2}{x-1}=3x-2\Leftrightarrow x+2=(3x-2)(x-1)$ (x = 1 không phải là nghiệm phương trình)

$\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow x=0\ (y=-2)\vee x=2\ (y=4)$

Vậy có hai giao điểm là: $M_1(0; -2)$ và $M_2(2; 4)$

+ Ta có: $y'=\frac{-3}{(x-1)^2}$.

+ Tại tiếp điểm $M_1(0; -2)$ thì y'(0) = -3 nên tiếp tuyến có phương trình: $y=-3x-2$

+ Tại tiếp điểm $M_2(2; 4)$ thì y'(2) = -3 nên tiếp tuyến có phương trình: $y=-3x+10$

Tóm lại có hai tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $y=-3x-2$ và $y=-3x+10$.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{m}{2}x^2+\frac{1}{3}$ (C_m).Gọi M là điểm thuộc đồ thị (C_m) có hoành độ bằng -1. Tìm m để tiếp tuyến với (C_m) tại M song song với đường thẳng d: 5x-y=0

Ta có $y'=x^2-mx$

Đường thẳng d: 5x-y=0 có hệ số góc bằng 5, nên để tiếp tuyến tại M song song với đường thẳng d trước hết ta cần có $y'(-1)=5\Leftrightarrow m+1=5\Leftrightarrow m=4$

Khi $m = 4$ ta có hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{3}$ ta có $x_0 = -1$ thì $y_0 = -2$

Phương trình tiếp tuyến có dạng $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Rightarrow y = 5(x+1) - 2 \Leftrightarrow y = 5x + 3$

Rõ ràng tiếp tuyến song song với đường thẳng d

Vậy $m = 4$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 8: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ (1).

Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị (1) tại điểm có hoành độ bằng 1 cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A và B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\frac{3}{2}$.

Với $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = m - 2 \Rightarrow$ M(1 ; m – 2)

- Tiếp tuyến tại M là d: $y = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0) + m - 2$

$\Rightarrow$ d: y = -3x + m + 2.

- d cắt trục Ox tại A: $0 = -3x_A + m + 2 \Leftrightarrow x_A = \frac{m+2}{3} \Rightarrow A\left(\frac{m+2}{3}; 0\right)$

- d cắt trục Oy tại B: $y_B = m + 2 \Rightarrow B(0; m+2)$

- $S_{OAB} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}|OA||OB| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow |OA||OB| = 3 \Leftrightarrow \left|\frac{m+2}{3}\right||m+2| = 3 \Leftrightarrow (m+2)^2 = 9$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+2=3 \\ m+2=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-5 \end{array}\right.$$

Vậy m = 1 và m = - 5

Dạng 2: Viết tiếp tuyến của đồ thi hàm số $y = f(x)$ (C) khi biết trước hệ số góc

+ Gọi $M(x_0, y_0)$ là tiếp điểm, giải phương trình $f'(x_0) = k \Rightarrow x = x_0$, $y_0 = f(x_0)$

+ Đến đây trở về **dạng 1**,ta dễ dàng lập được tiếp tuyến của đồ thị: $y = k(x - x_0) + y_0$

- **<u>Các dạng biểu diễn hệ số góc k:</u>**

*) Cho trực tiếp: $k = 5; k = \pm 1; k = \pm\sqrt{3}; k = \pm\frac{3}{\sqrt{7}}...$

*) Tiếp tuyến tạo với chiều dương của trục Ox một góc α, với $\alpha \in \left\{15^0;30^0;45^0;\frac{2\pi}{3};\frac{\pi}{3}....\right\}$. Khi đó hệ số góc k = $\tan\alpha$.

*) Tiếp tuyến song song với đường thẳng (d): y = ax + b. Khi đó hệ số góc k = a.

*) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng (d): y = ax + b$\Rightarrow ka = -1 \Leftrightarrow k = \frac{-1}{a}$.

*) Tiếp tuyến tạo với đường thẳng (d): y = ax + b một góc α. Khi đó, $\left|\frac{k-a}{1+ka}\right| = \tan\alpha$.

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết hệ số góc của tiếp tuyến k = -3.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow$ Tiếp tuyến tại M có hệ số góc $k = f'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$

Theo giả thiết, hệ số góc của tiếp tuyến k = - 3 nên: $3x_0^2 - 6x_0 = -3 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$

Vì $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -2 \Rightarrow M(1;-2)$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -3(x-1) - 2 \Leftrightarrow y = -3x + 1$

Ví dụ 10: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$(C). Biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng y = 9x + 6.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm $\Rightarrow$ Tiếp tuyến tại M có hệ số góc $k = f'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$

Theo giả thiết, tiếp tuyến đó song song với đường thẳng y = 9x + +6 $\Rightarrow$ tiếp tuyến có hệ số góc k = 9 $\Rightarrow$

$$3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \Rightarrow M(-1;-3) \\ x_0 = 3 \Rightarrow M(3;1) \end{array}\right.$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M(-1;-3) là: $y = 9(x+1) - 3 \Leftrightarrow y = 9x + 6$ **(loại)**

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M(3;1) là: $y = 9(x-3) + 1 \Leftrightarrow y = 9x - 26$

Ví dụ 11: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng $y = \frac{-1}{9}x$.

Ta có $y' = 3x^2 - 3$. Do tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng $y = \frac{-1}{9}x$ nên hệ số góc của tiếp tuyến k = 9.

Do đó $y' = k \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

+) Với x = 2 $\Rightarrow y = 4$. Pttt tại điểm có hoành độ x = 2 là:

$$y = 9(x-2) + 4 \Leftrightarrow y = 9x - 14.$$

+) Với $x = -2 \Rightarrow y = 0$. Pttt tại điểm có hoành độ x = - 2 là:

$$y = 9(x+2) + 0 \Leftrightarrow y = 9x + 18.$$

Vậy có hai tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{-1}{9}x$ là:

y =9x - 14 và y = 9x + 18.

Ví dụ 12: Lập phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số: $y = \frac{1}{4}x^4 + 2x^2$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng (d): $x + 5y - 2010 = 0$.

(d) có phương trình: $y = -\frac{1}{5}x + 402$ nên (d) có hệ số góc là -$\frac{1}{5}$.

Gọi Δ là tiếp tuyến cần tìm có hệ số góc k thì $-\frac{1}{5}.k = -1 \Leftrightarrow k = 5\,(do\ \Delta \perp (d))$.

Ta có: $y' = x^3 + 4x$ nên hoành độ tiếp điểm là nghiệm phương trình: $x^3 + 4x = 5$

$\Leftrightarrow x^3 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 5) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = \frac{9}{4}$

Vậy tiếp điểm M có tọa độ là $M\left(1;\frac{9}{4}\right)$

Tiếp tuyến có phương trình: $y - \frac{9}{4} = 5(x-1) \Leftrightarrow y = 5x - \frac{11}{4}$

Vậy tiếp tuyến cần tìm có phương trình: $y = 5x - \frac{11}{4}$.

Ví dụ 13: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết rằng tiếp tuyến cắt trục hoành tại A, trục tung tại B sao cho tam giác OAB vuông cân tại O, ở đây O là góc tọa độ.

Ta có: $y' = \dfrac{-1}{(2x+3)^2}$

Vì tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân nên hệ số góc của tiếp tuyến là: $k = \pm 1$

Khi đó gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị (C) ta có $y'(x_0) = \pm 1$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{(2x_0+3)^2} = \pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -2 \\ x_0 = -1 \end{array}\right.$$

Với $x_0 = -1$ thì $y_0 = 1$ lúc đó tiếp tuyến có dạng $y = -x$ (trường hợp này loại vì tiếp tuyến đi qua góc tọa độ, nên không tạo thành tam giác OAB)

Với $x_0 = -2$ thì $y_0 = -4$ lúc đó tiếp tuyến có dạng $y = -x - 2$

Vậy tiếp tuyến cần tìm là $y = -x - 2$

Ví dụ 14: Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C).

Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến này cắt các trục O*x*, O*y* lần lượt tại các điểm A và B thỏa mãn OA = 4OB.

Giả sử tiếp tuyến d của (C) tại $M(x_0; y_0) \in (C)$ cắt Ox tại A, Oy tại B sao cho $OA = 4OB$.

Do ΔOAB vuông tại O nên $\tan A = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow$ Hệ số góc của d bằng $\dfrac{1}{4}$ hoặc $-\dfrac{1}{4}$.

Hệ số góc của d là $y'(x_0) = -\dfrac{1}{(x_0-1)^2} < 0 \Rightarrow -\dfrac{1}{(x_0-1)^2} = -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \ \left(y_0 = \dfrac{3}{2}\right) \\ x_0 = 3 \quad \left(y_0 = \dfrac{5}{2}\right) \end{array}\right.$

Khi đó có 2 tiếp tuyến thỏa mãn là: $\left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{4}(x+1) + \dfrac{3}{2} \\ y = -\dfrac{1}{4}(x-3) + \dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4} \\ y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{13}{4} \end{array}\right.$.

Dạng 3: Tiếp tuyến đi qua điểm

Cho đồ thị (C): y = f(x). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(\alpha; \beta)$.

Cách giải

+ Tiếp tuyến có phương trình dạng: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, (với x_0 là hoành độ tiếp điểm).

+ Tiếp tuyến qua $A(\alpha;\beta)$ nên $\beta - f(x_0) = f'(x_0)(\alpha - x_0)$ (*)

+ Giải phương trình (*) để tìm x_0 rồi suy ra phương trình tiếp tuyến.

Ví dụ 15: Cho đồ thị (C): $y = x^3 - 3x + 1$, viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm A(-2; -1).

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$

Gọi M$\left(x_0; x_0^3 - 3x_0 + 1\right)$ là tiếp điểm. Hệ số góc của tiếp tuyến là $y'(x_0) = 3x_0^2 - 3$.

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại M là $\Delta: y - \left(x_0^3 - 3x_0 + 1\right) = (3x_0^2 - 3)(x - x_0)$

Δ qua A(-2;-1) nên ta có: $-1 - \left(x_0^3 - 3x_0 + 1\right) = (3x_0^2 - 3)(-2 - x_0) \Leftrightarrow x_0^3 + 3x_0^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x_0 - 1)(x_0^2 + 4x_0 + 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -1 \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -1 \end{array}\right.$

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm có phương trình là: $\Delta: y = -1$; $\Delta: y = 9x + 17$

Dạng 4. Một số bài toán tiếp tuyến nâng cao.

Ví dụ 16: Tìm hai điểm A, B thuộc đồ thị (C) của hàm số: $y = x^3 - 3x + 2$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau và độ dài đoạn AB = $4\sqrt{2}$.

Gọi $A(a; a^3 - 3a + 2)$, $B(b; b^3 - 3b + 2)$, $a \neq b$ là hai điểm phân biệt trên (C).

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$ nên các tiếp tuyến với (C) tại A và B có hệ số góc lần lượt là:
$y'(a) = 3a^2 - 3$ và $y'(b) = 3b^2 - 3$.

Tiếp tuyến tại A và B song song với nhau khi:
$y'(a) = y'(b) \Leftrightarrow 3a^2 - 3 = 3b^2 - 3 \Leftrightarrow (a - b)(a + b) = 0 \Leftrightarrow a = -b$ (vì $a \neq b \Leftrightarrow a - b \neq 0$)

$AB = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow AB^2 = 32 \Leftrightarrow (a - b)^2 + \left[(a^3 - 3a + 2) - (b^3 - 3b + 2)\right]^2 = 32$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 + \left[(a^3 - b^3) - 3(a - b)\right]^2 = 32 \Leftrightarrow (a - b)^2 + \left[(a - b)(a^2 + ab + b^2) - 3(a - b)\right]^2 = 32$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (a - b)^2\left[(a^2 + ab + b^2) - 3\right]^2 = 32$, thay a = -b ta được:

$$4b^2+4b^2\left(b^2-3\right)^2=32 \Leftrightarrow b^2+b^2\left(b^2-3\right)^2-8=0 \Leftrightarrow b^6-6b^4+10b^2-8=0$$

$$\Leftrightarrow (b^2-4)(b^4-2b^2+2)=0 \Leftrightarrow b^2-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2 \Rightarrow a=-2 \\ b=-2 \Rightarrow a=2 \end{array}\right.$$

- Với $a=-2$ và $b=2 \Rightarrow A(-2;0)$, $B(2;4)$
- Với $a=2$ và $b=-2 \Rightarrow A(2;4)$, $B(-2;0)$

Tóm lại cặp điểm A, B cần tìm có tọa độ là: $(-2;\ 0)$ và $(2;\ 4)$

Ví dụ 17: Tìm hai điểm A, B thuộc đồ thị (C) của hàm số: $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại A và B song song với nhau và độ dài đoạn AB = $2\sqrt{10}$.

Hàm số được viết lại: $y=2-\dfrac{3}{x+1}$

Gọi $A\left(a;2-\dfrac{3}{a+1}\right), B\left(b;2-\dfrac{3}{b+1}\right)$ là cặp điểm trên đồ thị (C) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với điều kiện: $a \neq b, a \neq -1, b \neq -1$.

Ta có: $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}$ nên hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B là:

$$y'(a)=\frac{3}{(a+1)^2} \text{ và } y'(b)=\frac{3}{(b+1)^2}$$

Tiếp tuyến tại A và B song song khi: $y'(a)=y'(b) \Leftrightarrow \dfrac{3}{(a+1)^2}=\dfrac{3}{(b+1)^2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+1=b+1 \\ a+1=-b-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=-b-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow a=-b-2 \quad (1) \quad (\text{do } a \neq b)$$

$$AB=2\sqrt{10} \Leftrightarrow AB^2=40 \Leftrightarrow (a-b)^2+\left(\frac{3}{b+1}-\frac{3}{a+1}\right)^2=40$$

$$\Leftrightarrow (-2b-2)^2+\left(\frac{3}{b+1}-\frac{3}{-b-1}\right)^2=40 \Leftrightarrow 4(b+1)^2+\left(\frac{6}{b+1}\right)^2=40 \text{ (do thay a ở (1))}$$

$$\Leftrightarrow (b+1)^4-10(b+1)^2+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (b+1)^2=1 \\ (b+1)^2=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b+1=1 \vee b+1=-1 \\ b+1=3 \vee b+1=-3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \Rightarrow a=-2 \\ b=-2 \Rightarrow a=0 \\ b=2 \Rightarrow a=-4 \\ b=-4 \Rightarrow a=2 \end{array}\right.$$

Cặp điểm A và B cần tìm có tọa độ là: $(-2;5)$ *và* $(0;-1)$; $(2;1)$ *và* $(-4;3)$

Ví dụ 18: Cho hàm số: $y = x^3 + 3x^2 + mx + 1$ có đồ (C_m); (m là tham số). Xác định m để (C_m) cắt đường thẳng y = 1 tại 3 điểm phân biệt C(0, 1), D, E sao cho các tiếp tuyến của (C_m) tại D và E vuông góc với nhau.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và đường thẳng y = 1 là:

$$x^3 + 3x^2 + mx + 1 = 1 \Leftrightarrow \quad x(x^2 + 3x + m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+3x+m=0 \end{array}\right. \qquad (2)$$

* (C_m) cắt đường thẳng y = 1 tại C(0, 1), D, E phân biệt:

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm x_D, $x_E \neq 0$.

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Delta = 9-4m > 0 \\ 0^2+3\times 0+m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \dfrac{4}{9} \end{cases}$$

Lúc đó tiếp tuyến tại D, E có hệ số góc lần lượt là:

$k_D = y'(x_D) = 3x_D^2 + 6x_D + m = -(x_D + 2m);$

$k_E = y'(x_E) = 3x_E^2 + 6x_E + m = -(x_E + 2m).$

Các tiếp tuyến tại D, E vuông góc khi và chỉ khi: $k_D k_E = -1$.

$\Leftrightarrow \quad (3x_D + 2m)(3x_E + 2m) = 9x_Dx_E + 6m(x_D + x_E) + 4m^2 = -1$

$\Leftrightarrow \quad 9m + 6m \times (-3) + 4m^2 = -1$; (vì $x_D + x_E = -3$; $x_Dx_E = m$ theo định lý Vi-t).

$\Leftrightarrow \quad 4m^2 - 9m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{8}\left(9 \mp \sqrt{65}\right)$

ĐS: $m = \dfrac{1}{8}\left(9 - \sqrt{65}\right)$ *hay* $m = \dfrac{1}{8}\left(9 \mp \sqrt{65}\right)$

Ví dụ 19: Lập phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số: $y = \dfrac{2x-2}{x+1}$, biết rằng khoảng cách từ điểm I(-1; 2) đến tiếp tuyến là lớn nhất.

Gọi Δ là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại tiếp điểm $M\left(a;\dfrac{2a-2}{a+1}\right),\left(M\in(C)\right)$.

Ta có: $y'=\dfrac{4}{(x+1)^2}\Rightarrow y'(a)=\dfrac{4}{(a+1)^2},\left(a\neq -1\right)$

Vậy $\Delta: y-\dfrac{2a-2}{a+1}=\dfrac{4}{(a+1)^2}(x-a)\Leftrightarrow 4x-(a+1)^2y+2a^2-4a-2=0\quad (*)$

$$d\left(I;\Delta\right)=\frac{\left|4(-1)-(a+1)^2.2+2a^2-4a-2\right|}{\sqrt{4+(a+1)^4}}=\frac{8\left|a+1\right|}{\sqrt{4+(a+1)^4}}.$$

Ta có: $4+(a+1)^4=2^2+\left[(a+1)^2\right]^2\geq 2.2(a+1)^2\Rightarrow\sqrt{4+(a+1)^4}\geq\sqrt{2.2(a+1)^2}=2\left|a+1\right|$

$\Rightarrow d\left(I;\Delta\right)\leq\dfrac{8\left|a+1\right|}{2\left|a+1\right|}=4$. Vậy $d\left(I;\Delta\right)$ lớn nhất khi $d\left(I;\Delta\right)=4$

$\Leftrightarrow 2^2=(a+1)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a+1=2\\a+1=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\a=-3\end{array}\right.$. Cả hai giá trị đều thỏa mãn $a\neq 1$

+ Với a = 1 thay vào (*) ta được phương trình tiếp tuyến là: $4x-4y-4=0\Leftrightarrow x-y-1=0$

+ Với a = -3 thay vào (*) ta được phương trình tiếp tuyến là: $4x-4y+28=0\Leftrightarrow x-y+7=0$

Tóm lại: Có hai tiếp tuyến cần tìm có phương trình là: $x-y-1=0$; $x-y-7=0$

Ví dụ 20: Cho (C) là đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{2x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung tương ứng tại các điểm A, B thỏa mãn Δ OAB vuông cân tại gốc tọa độ O.

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm. Tiếp tuyến với (C) tại M phải thỏa mãn song song với các đường thẳng

y = x hoặc y = -x.

Ta có: $y'=-\dfrac{1}{(2x+1)^2}$ nên tiếp tuyến với (C) tại M có hệ số góc là: $y'(x_0)=-\dfrac{1}{(2x_0+1)^2}<0$

Vậy tiếp tuyến với (C) tại M song song với đường thẳng d: y = -x

Do đó, $-\frac{1}{(2x_0+1)^2}=-1 \Leftrightarrow (2x_0+1)^2=1$; ($x_0=-\frac{1}{2}$ không là nghiệm phương trình)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x_0+1=1\\2x_0+1=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=0 \Rightarrow y_0=1\\x_0=-1 \Rightarrow y_0=0\end{array}\right.$. Vậy có hai tiếp điểm là: $M_1(0;1)$, $M_2(-1;0)$.

+ Tại điểm $M_1(0; 1)$ ta có phương trình tiếp tuyến là: y = - x + 1: thỏa mãn song song với d

+ Tại điểm $M_2(-1;)$ ta có phương trình tiếp tuyến là: y = - x - 1: thỏa mãn song song với d

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm có phương trình là: $y=-x+1$; $y=-x-1$

Ví dụ 21: Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x-1}$. Cho điểm $M_o(x_o;y_o)$ thuộc đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại M_0 cắt các tiệm cận của (C) tại các điểm A và B. Chứng minh M_o là trung điểm của đoạn thẳng AB.

$M_o(x_o;y_o) \in (C) \Rightarrow y_0=1+\frac{4}{x_0-1}$.

Phương trình tiếp tuyến (d) tại M_0: $y-y_0=-\frac{4}{(x_0-1)^2}(x-x_0)$

Giao điểm của (d) với các tiệm cận là: $A(2x_0-1;1)$, $B(1;2y_0-1)$.

$$\Rightarrow \frac{x_A+x_B}{2}=x_0; \frac{y_A+y_B}{2}=y_0 \Rightarrow M_0 \text{ là trung điểm AB.}$$

Ví dụ 22: Cho hàm số: $y=\frac{x+2}{x-1}$ (C) Chứng minh rằng mọi tiếp tuyến của đồ thị (C) đều lập với hai đường tiệm cận một tam giác có diện tích không đổi.

Giả sử $M\left(a;\frac{a+2}{a-1}\right) \in (C)$.

PTTT (d) của (C) tại M: $y=y'(a).(x-a)+\frac{a+2}{a-1} \Leftrightarrow y=\frac{-3}{(a-1)^2}x+\frac{a^2+4a-2}{(a-1)^2}$

Các giao điểm của (d) với các tiệm cận là: $A\left(1;\frac{a+5}{a-1}\right)$, $B(2a-1;1)$.

$$\vec{IA}=\left(0;\frac{6}{a-1}\right) \Rightarrow IA=\frac{6}{|a-1|}\ ;\ \vec{IB}=(2a-2;0) \Rightarrow IB=2|a-1|$$

Diện tích ΔIAB: $S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA.IB = 6$ (đvdt) $\Rightarrow$ ĐPCM.

<u>Ví dụ 23:</u> Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x-2}$. Cho M là điểm bất kì trên (C). Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các đường tiệm cận của (C) tại A và B. Gọi I là giao điểm của các đường tiệm cận. Tìm tọa độ điểm M sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất.

Giả sử $M\left(x_0; \frac{2x_0-3}{x_0-2}\right)$, $x_0 \neq 2$, $y'(x_0) = \frac{-1}{(x_0-2)^2}$

Phương trình tiếp tuyến (Δ) với (C) tại M: $y = \frac{-1}{x_0-2^{\,2}}(x-x_0) + \frac{2x_0-3}{x_0-2}$

Tọa độ giao điểm A, B của (Δ) với hai tiệm cận là: $A\left(2; \frac{2x_0-2}{x_0-2}\right)$; $B\left(2x_0-2; 2\right)$

Ta thấy $\frac{x_A+x_B}{2} = \frac{2+2x_0-2}{2} = x_0 = x_M$, $\frac{y_A+y_B}{2} = \frac{2x_0-3}{x_0-2} = y_M$ suy ra M là trung điểm của AB.

Mặt khác I(2; 2) và ΔIAB vuông tại I nên đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích

$$S = \pi IM^2 = \pi\left[(x_0-2)^2 + \left(\frac{2x_0-3}{x_0-2} - 2\right)^2\right] = \pi\left[(x_0-2)^2 + \frac{1}{(x_0-2)^2}\right] \geq 2\pi$$

Dấu "=" xảy ra khi $(x_0-2)^2 = \frac{1}{(x_0-2)^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{array}\right.$

Do đó điểm M cần tìm là M(1; 1) hoặc M(3; 3)

<u>Ví dụ 24:</u> Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$. Tìm tọa độ điểm M sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất.

Nếu $M\left(x_0; 2 - \frac{3}{x_0+1}\right) \in (C)$ thì tiếp tuyến tại M có phương trình $y - 2 + \frac{3}{x_0+1} = \frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)$

hay $3(x-x_0) - (x_0+1)^2(y-2) - 3(x_0+1) = 0$

Khoảng cách từ $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến là

$$d=\frac{\left|3(-1-x_0)-3(x_0+1)\right|}{\sqrt{9+\left(x_0+1\right)^4}}=\frac{6\left|x_0+1\right|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\frac{6}{\sqrt{\frac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}}.$$

Theo bất đẳng thức Côsi $\frac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2\ge 2\sqrt{9}=6$, vây $d\le\sqrt{6}$.

Khoảng cách d lớn nhất bằng $\sqrt{6}$ khi

$$\frac{9}{(x_0+1)^2}=(x_0+1)^2\Leftrightarrow\left(x_0+1\right)^2=3\Leftrightarrow x_0=-1\pm\sqrt{3}.$$

Vậy có hai điểm M: $M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$ hoặc $M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$

Ví dụ 25: Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết rằng tiếp tuyến cách đều hai điểm $A(2;4)$, $B(-4;-2)$.

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm ($x_0\ne -1$).

PTTT (d) là $y=\frac{1}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0+1}{x_0+1}\Leftrightarrow x-(x_0+1)^2y+2x_0^2+2x_0+1=0$

Ta có: $d(A,d)=d(B,d)\Leftrightarrow\left|2-4(x_0+1)^2+2x_0^2+2x_0+1\right|=\left|-4+2(x_0+1)^2+2x_0^2+2x_0+1\right|$

$$\Leftrightarrow x_0=1\vee x_0=0\vee x_0=-2$$

Vậy có ba phương trình tiếp tuyến: $y=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$; $y=x+1$; $y=x+5$

Chú ý: Bài toán này có thể giải bằng cách sau: Tiếp tuyến cách đều A, B nên có 2 khả năng: Tiếp tuyến song song (trùng) AB hoặc tiếp tuyến đi qua trung điểm của AB

Ví du 26: Cho hàm số $y=\frac{2x}{x+1}$ (C) tìm điểm M $\in(C)$ sao cho tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M cắt hai trục tọa độ tại A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\frac{1}{4}$

Gọi $M(x_0,y_0)\in(C)\to y_0=\frac{2x_0}{x_0+1}$, $y'=\frac{2}{(x+1)^2}$

Tiếp tuyến tại M có dạng:

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{(x_0+1)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0}{x_0+1} \Leftrightarrow y = \frac{2}{(x_0+1)^2}x + \frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2} \quad (d)$$

Gọi $A = (d) \cap$ ox $\Rightarrow$ tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{(x_0+1)^2}x + \dfrac{2x_0^2}{(x_0+1)^2} \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x_0^2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-x_0^2, 0)$$

Gọi $B = (d) \cap$ oy $\Rightarrow$ tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2}{(x_0+1)^2}x + \dfrac{2x_0^2}{(x_0+1)^2} \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{2x_0^2}{(x_0+1)^2} \end{cases} \Rightarrow B(0, \frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2})$$

Tam giác OAB vuông tại O ; OA = $\left|-x_0^2\right| = x_0^2$; OB = $\left|\dfrac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}\right| = \dfrac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}$

Diện tích tam giác OAB:

$$S = \frac{1}{2}\text{ OA.OB } = \frac{1}{2}.\frac{2x_0^4}{(x_0+1)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4x_0^4 = (x_0+1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x_0^2 = x_0 + 1 \\ 2x_0^2 = -x_0 - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x_0^2 - x_0 - 1 = 0 \\ 2x_0^2 + 1x_0 + 1\ (vn) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow y_0 = -2 \\ x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1 \end{array}\right.$$

Vậy tìm được hai điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán: $M_1(-\frac{1}{2};-2)$; $M_2(1,1)$

2.2 Bài toán Cực trị

Dạng 1: Tìm m để hàm số có Cực đại hoặc cực tiểu tại một điểm có hoành độ x_o hoặc tung độ y_o.

Cách 1

<u>Bước 1</u>: Tìm TXĐ

<u>Bước 2</u>: Tính $f'(x)$. Xác định các *điểm tới hạn.*

<u>Bước 3</u>: Lập bảng biến thiên. Kết luận.

Cách 2

<u>Bước 1</u>: Tìm TXĐ

<u>Bước 2</u>: Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x)=0$ và kí hiệu x_i $(i=1,\ 2,...)$ là các nghiệm của nó.

<u>Bước 3</u>: Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$. Kết luận

a/ <u>Điều kiện để hàm số có cưc trị tại x = x₀:</u>

$$\begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y' \text{ dôi dau qua } x_0 \end{cases} \boxed{\textbf{hoặc } \begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y''(x_0)\neq 0 \end{cases}}$$

b/ <u>Điều kiện để hàm số có cực đại tại x_0:</u>

$$\begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y' \text{ doi dau tu } +sang-qua.x_0 \end{cases} \boxed{\textbf{hoặc } \begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y''(x_0)<0 \end{cases}}$$

c/ <u>Điều kiện để hàm số có cực tiểu tại x_0:</u>

$$\begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y' \text{ doi dau tu } -sang+qua.x_0 \end{cases} \boxed{\textbf{hoặc } \begin{cases} y'(x_0)=0 \\ y''(x_0)>0 \end{cases}}$$

d/ <u>Điều kiện để hàm bậc 3 có cực trị (có cực đại, cực tiểu):</u>

$$\boxed{\text{y'= 0 có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \end{cases}}$$

e/ <u>Điều kiện để hàm bậc 4 có 3 cực trị:</u> $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Dạng 2 : Tìm điều kiện để các điểm cực trị của hàm số thỏa mãn điều kiện cho trước.

Phương pháp:

- Tìm điều kiện để hàm số có cực trị
- Biểu diễn điều kiện của bài toán qua tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số, từ đó đưa ra điều kiện của tham số.

VÍ DỤ

<u>Ví dụ 1:</u> Tìm cực trị của của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+2$.

<u>Cách 1.</u>

* Tập xác định:R.

Ta có: $y'=x^2-x-2; y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y		$\nearrow$	$\frac{19}{6}$	$\searrow$	$-\frac{4}{3}$	$\nearrow$	

Vậy hàm số đạt cực đại tại x = -1 và giá trị cực đại $y_{CĐ}= y(-1)=\frac{19}{6}$

Hàm số đạt cực tiểu tại x = 2 và giá trị cực tiểu $y_{CT}= y(2)=\frac{-4}{3}$.

<u>Cách 2. (Sử dụng quy tắc 2)</u>

* Tập xác định:.

Ta có: $y'=x^2-x-2; y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

* $y''=2x-1, y''(-1)=-3<0$ nên hàm số đạt cực đại tại điểm x = -1 và giá trị cực đại

$y_{CĐ}= y(-1)=\frac{19}{6}$

* $y''(2)=3>0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại x = 2 và giá trị cực tiểu .

Ví dụ 2: Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x-1$ b) $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x+\frac{2x+1}{2}$

(?) Ta thấy hàm số này rất khó xét dấu của y', do đó hãy sử dụng quy tắc 2 để tìm cực trị?

a) TXĐ: D=R

* $y'=-\sin x-\sin 2x$

$$y'=0\Leftrightarrow \sin x(1+2\cos x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+n2\pi\end{array}\right.$$

* $y''=-\cos x-2\cos 2x$

Ta có $y''(k\pi)=-\cos(k\pi)-2\cos(k2\pi)=\pm 1-2<0$

$\Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại: $x=k\pi\quad (k\in Z)$

$$y''\left(\pm\frac{2\pi}{3}+n2\pi\right)=-\cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)-2\cos\left(\pm\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}>0$$

$\Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại: $x=\pm\frac{2\pi}{3}+n2\pi\quad (n\in Z)$

b) TXĐ: D=R.

* $y'=\sqrt{3}\cos x-\sin x+1$

$y'=0\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x-\sin x=-1$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$$

* $y''=-\sqrt{3}\sin x-\cos x$

Ta có:

\+ $y''=\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)=-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2}=-\sqrt{3}<0$

\+ $y''\left(\frac{7\pi}{6}+k2\pi\right)=\sqrt{3}>0$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi$

***<u>Chú ý</u>**: Quy tắc 1 có ưu điểm là chỉ cần tính đạo hàm cấp một rồi xét dấu y' và lập bảng xét dấu y', từ đó suy ra các điểm cực trị. Nhưng quy tắc 1 có nhược điểm là nó đòi hỏi phải xét dấu y', điều này không phải bao giờ cũng đơn giản.*

Nếu bài toán không yêu cầu tìm điểm cực trị thì quy tắc 1 là hơi thừa, khi đó ta sử dụng quy tắc 2. Song quy tắc 2 cũng có nhược điểm là nhiều khi việc tính y" là rất phức tạp, đặc biệt khi không sử dụng được trong trường hợp $f'(x_0)=f''(x_0)=0$.

Quy tắc 1 thường được dùng cho các hàm đa thức, hàm phân thức và tích các lũy thừa. Quy tắc 2 thường được sử dụng cho các hàm lượng giác.

<u>Ví dụ 3:</u> Tìm m để hàm số: $y=\frac{1}{3}x^3+(m^2-m+2)x^2+(3m^2+1)x+m-5$ đạt cực tiểu tại $x=-2$.

$$y'(x)=x^2+2(m^2-m+2)x+3m^2+1 \Rightarrow y''(x)=2x+2(m^2-m+2)$$

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$ thì

$$\begin{cases} y'(-2)=0 \\ y''(-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2+4m-3=0 \\ m^2-m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(m-3)=0 \\ m(m-1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow m=3$$

<u>Ví dụ 4:</u> Cho hàm số: $y=x^3-3(m+1)x^2+9x-m$, với m là tham số thực. Xác định m để hàm số đã cho đạt cực trị tại x_1,x_2 sao cho $|x_1-x_2|\le 2$.

– Ta có $y'=3x^2-6(m+1)x+9$.

– Hàm số có cực đại, cực tiểu x_1, x_2. $\Leftrightarrow$ PT y' = 0 có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2.

$\Leftrightarrow$ $x^2-2(m+1)x+3=0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2.

$\Leftrightarrow \Delta'=(m+1)^2-3>0 \Leftrightarrow m>-1+\sqrt{3} \vee m<-1-\sqrt{3}$ (1)

Theo đề ta có: $|x_1-x_2|\le 2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2\le 4$ (*)

Theo định lý Viet ta có: $x_1+x_2=2(m+1); x_1x_2=3.$

$(*) \Leftrightarrow 4(m+1)^2-12\le 4 \Leftrightarrow (m+1)^2\le 4 \Leftrightarrow -3\le m\le 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra giá trị m cần tìm là: $-3\le m<-1-\sqrt{3}$ hoặc $-1+\sqrt{3}<m\le 1.$

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = f(x) = mx^3 + 3mx^2 - (m-1)x - 1$, m là tham số. Xác định các giá trị của m để hàm số $y = f(x)$ không có cực trị.

+ Khi m = 0 $\Rightarrow y = x - 1$, nên hàm số không có cực trị.

+ Khi $m \neq 0 \Rightarrow y' = 3mx^2 + 6mx - (m-1)$

Hàm số không có cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ không có nghiệm hoặc có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta' = 9m^2 + 3m(m-1) = 12m^2 - 3m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{1}{4}$

Vậy $0 \leq m \leq 4$ là gtct

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = -x^3 + (2m+1)x^2 - (m^2 - 3m + 2)x - 4$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m). Xác định m để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu nằm về hai phía của trục tung.

$y' = -3x^2 + 2(2m+1)x - (m^2 - 3m + 2)$.

(C_m) có các điểm CĐ và CT nằm về hai phía của trục tung $\Leftrightarrow$ *PT* $y' = 0$ *có 2 nghiệm trái dấu* $\Leftrightarrow$ $3(m^2 - 3m + 2) < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$.

Ví dụ 7: Tìm m để hàm số $f(x) = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$.

Hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow f'(x) = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - 3m(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - \frac{\sqrt{6}}{2} < m \neq 0 < 1 + \frac{\sqrt{6}}{2} \quad (*)$$

Với điều kiện (*) thì $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 và hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại x_1, x_2. Theo định lý Viet ta có: $x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m}; x_1x_2 = \frac{3(m-2)}{m}$

Ta có: $x_1 + 2x_2 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1 - \frac{2(m-1)}{m} = \frac{2-m}{m}; x_1 = \frac{2(m-1)}{m} - \frac{2-m}{m} = \frac{3m-4}{m}$

$$\Rightarrow \frac{2-m}{m} \cdot \frac{3m-4}{m} = \frac{3(m-2)}{m} \Leftrightarrow (2-m)(3m-4) = 3m(m-2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = \frac{2}{3} \end{array}\right.$$

Cả 2 giá trị này đều thỏa mãn điều kiện (*). Vậy $x_1 + 2x_2 = 1 \Leftrightarrow m = 2 \vee m = \frac{2}{3}$

Ví dụ 8. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ (m là tham số) có đồ thị là (C_m). Xác định m để (C_m) có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$

Để hàm số có cực đại và cực tiểu thì $m \neq 0$.

Giả sử hàm số có hai điểm cực trị là: $A(0; 4m^3)$, $B(2m; 0) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2m; -4m^3)$

Trung điểm của đoạn AB là $I(m; 2m^3)$

Điều kiện để AB đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$ là AB vuông góc với đường thẳng $y = x$ và I thuộc đường thẳng $y = x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 4m^3 = 0 \\ 2m^3 = m \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $m = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $m = 0$

Kết hợp với điều kiện ta có: $m = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$ (1). Tìm m để hàm số (1) có cực trị đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O bằng $\sqrt{2}$ lần khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$

Hàm số (1) có cực trị thì PT $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ có 2 nhiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = 1 > 0, \forall m$

Khi đó, điểm cực đại $A(m-1; 2-2m)$ và điểm cực tiểu $B(m+1; -2-2m)$

Ta có $OA = \sqrt{2}OB \Leftrightarrow m^2 + 6m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 + 2\sqrt{2} \\ m = -3 - 2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Ví dụ 10. Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ (C_m)(1). Tìm m để hàm số (1) có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4m^2x = 4x\left(x^2 - m^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m^2 \end{array}\right. \Rightarrow m \neq 0$ (*)

Với điều kiện (*) thì hàm số (1) có ba điểm cực trị. Gọi ba điểm cực trị là:

$A(0;1); B(-m;1-m^4); C(m;1-m^4)$. Do đó nếu ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân, thì đỉnh sẽ là A.

Do tính chất của hàm số trùng phương, tam giác ABC đã là tam giác cân rồi, cho nên để thỏa mãn điều kiện tam giác là vuông, thì AB vuông góc với AC.

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = (-m;-m^4); \overrightarrow{AC} = (m;-m^4); \overrightarrow{BC} = (2m;0)$$

Tam giác ABC vuông khi: $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow 4m^2 = m^2 + m^8 + (m^2 + m^8)$

$$\Leftrightarrow 2m^2(m^4-1) = 0; \Rightarrow m^4 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

Vậy với m = -1 và m = 1 thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 11. Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ (1).Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị A, B, C và diện tích tam giác ABC bằng 32 (đơn vị diện tích).

+) Ta có $y' = 4x^3 - 4m^2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m^2 \end{array}\right.$; ĐK có 3 điểm cực trị: $m \neq 0$

+) Tọa độ ba điểm cực trị: $A(0 ; 1)$, $B(- m ; 1 - m^4)$, $C(m ; 1 - m^4)$;

+) CM tam giác ABC cân đỉnh A. Tọa độ trung điểm I của BC là $I(0 ; 1 - m^4)$.

+) $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}AI.BC = m^4|m| = |m|^5 = 32 \Leftrightarrow m = \pm 2$ (tm)

Ví dụ 12. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ (1). Tìm các giá trị của tham số m để đồ thi hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua ba điểm này có bán kính bằng 1.

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow$ y' đổi dấu 3 lần

$\Leftrightarrow$ phương trình y' = 0 có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$

Khi m > 0, đồ thị hàm số (1) có 3 điểm cực trị là

$$A(\sqrt{m}\,;1-m^2) \quad , \quad B(-\sqrt{m}\,;1-m^2) \quad , \quad C(0\,;1)$$

Gọi I là tâm và R là bán kính của đường tròn đi qua 3 điểm A, B, C.

Vì 2 điểm A, B đối xứng qua trục tung nên I nằm trên trục tung.

Đặt I(0 ; y_0). Ta có: IC = R $\Leftrightarrow \sqrt{(1-y_0)^2} = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_0 = 0 \\ y_0 = 2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow I \equiv O(0\,;0)$ hoặc $I(0\,;2)$

* Với $I \equiv O(0\,;0)$

$$\text{IA} = \text{R} \Leftrightarrow \sqrt{m+(1-m^2)^2} = 1 \Leftrightarrow m^4 - 2m^2 + m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \\ m = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ m = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

So sánh điều kiện m > 0, ta được m = 1 và m = $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

* Với I(0 ; 2)

IA = R $\Leftrightarrow \sqrt{m+(-1-m^2)^2} = 1 \Leftrightarrow m^4 + 2m^2 + m = 0$ (*)

Phương trình (*) vô nghiệm khi m > 0

Vậy bài toán thỏa mãn khi m = 1 và m = $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Ví dụ 13. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ (1), với m là tham số thực. Xác định m để hàm số (1) có ba điểm cực trị, đồng thời các điểm cực trị của đồ thị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

$$y' = 4x^3 - 4mx = 4x\left(x^2 - m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ pt $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x đi qua các nghiệm đó $\Leftrightarrow m > 0$

- Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$A\left(0; m-1\right), B\left(-\sqrt{m}; -m^2 + m - 1\right), C\left(\sqrt{m}; -m^2 + m - 1\right)$

- $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|y_B - y_A|.|x_C - x_B| = m^2\sqrt{m}$; $AB = AC = \sqrt{m^4 + m}, BC = 2\sqrt{m}$

$$R = \frac{AB.AC.BC}{4S_{\Delta ABC}} = 1 \Leftrightarrow \frac{(m^4+m)2\sqrt{m}}{4m^2\sqrt{m}} = 1 \Leftrightarrow m^3 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{array}\right.$$

2.3 Bài toán Tương giao

Bài toán tương giao tổng quát:

Cho hai đồ thị hàm số: y = f(x, m) và y = g(x,m). Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình: f(x, m) = g(x,m) (1).

Nhận xét: Số nghiệm của (1) chính là số giao điểm của hai đồ thị hàm số.

Sau đó lập phương trình tương giao của d và (C).

Dạng 1: Cho hai đồ thị hàm số: y = f(x, m) và d: y =ax+b

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình f(x,m) = ax+b. (1)

Chú ý:

+ Nếu đường thẳng d đi qua điểm M(x_0; y_0) và có hệ số góc k thì phương trình d có Dạng: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

+ Khai thác tọa độ giao điểm ($M(x_M; y_M)$) của (C) và d, ta cần chú ý: x_M là nghiệm của (1);M thuộc d nên $y_M = ax_M + b$

+ Nếu (1) dẫn đên một phương trình bậc hai, ta có thể sử dụng định lý Viet

Dạng 2: Phương pháp hàm số

Chuyển phương trình hoành độ tương giao về: g(x) = m.

Khi đó số nghiệm chính là số giao điểm của đồ thị y = g(x) và đường thẳng y = m.

Bài tập bài giảng

Dạng 1 : Cho hai đồ thị hàm số: y = f(x, m) và d: y =ax+b

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình f(x,m) = ax+b. (1)

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-2}$ có đồ thị (C).

Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, đường thẳng y = x – m luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt.

- Đường thẳng y = x – m cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $\frac{2x-1}{x-2} = x - m$ có hai nghiệm phân biệt.

- Xét phương trình: $\frac{2x-1}{x-2} = x - m \quad (x \neq 2)$

$$\Leftrightarrow 2x-1 = (x-m)(x-2)$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - mx + 1 + 2m = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - (4+m)x + 1 + 2m = 0$$

Có $\Delta = (4+m)^2 - 4(1+2m)$

$$= m^2 + 8m + 16 - 4 - 8m$$
$$= m^2 + 12 > 0 \quad \forall m$$

- Vậy với mọi m thì đường thẳng y = x – m cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt.

Ví dụ 2. Tìm *m* để đường thẳng $y = -1$ cắt đồ thị y= $x^4 - (3m+2)x^2 + 3m$ (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và đường thẳng $y = -1$:

$$x^4 - (3m+2)x^2 + 3m = -1 \Leftrightarrow x^4 - (3m+2)x^2 + 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x^2 = 3m+1 \quad (*) \end{array}\right.$$

Đường thẳng $y = -1$ cắt (C_m) tại 4 điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2 khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác ±1 và nhỏ hơn 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 3m+1 < 4 \\ 3m+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}(C)$ Tìm tham số m để đường thẳng d: y = - 2x + m cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\sqrt{3}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$$\frac{2x+1}{x+1} = -2x + m \ (x \neq -1) \Leftrightarrow g(x) = 2x^2 - (m-4)x + 1 - m = 0 \ (1)$$

D cắt (C) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-4)^2 - 8(1-m) > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 8 > 0 \\ g(-1) = -1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 8 > 0 \Rightarrow m \in R.$$

Chứng tỏ với mọi m d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B

Gọi $A(x_1; -2x_1 + m); B(x_2; -2x_2 + m)$. Với: x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1)

Ta có $\overrightarrow{AB} = \left(x_2 - x_1; 2\left(x_1 - x_2\right)\right) \Rightarrow AB = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + 4\left(x_2 - x_1\right)^2} = |x_2 - x_1|\sqrt{5}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên d, thì khoảng cách từ O đến d là h:

$$\Rightarrow h = \frac{|m|}{\sqrt{2^2 + 1}} = \frac{|m|}{\sqrt{5}}$$

Theo giả thiết: $S = \frac{1}{2}AB.h = \frac{1}{2}\frac{|x_2 - x_1|}{\sqrt{5}}\sqrt{5} = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{1}{4}.\sqrt{m^2 + 8} = \sqrt{3}$

Vậy: $\sqrt{m^2 + 8} = \sqrt{4^2.3} \Leftrightarrow m^2 + 8 = 4^2.3 \Rightarrow m^2 = 40 \Leftrightarrow |m| = 2\sqrt{10}$ (*)

Với m thỏa mãn điều kiện (*) thì d cắt (C) tại A, B thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 2 : *Phương pháp hàm số*

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên.

b) Dựa vào đồ thị biện luận theo m số nghiệm của phương trình $x^3 - 3x^2 + m = 0$.

a) TXĐ: D = R.

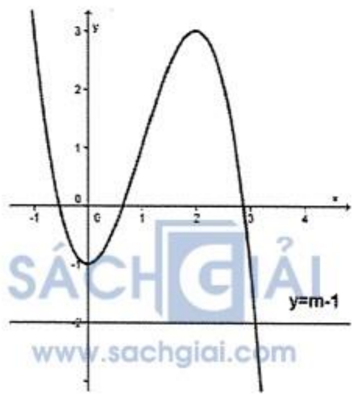
- $y' = -3x^2 + 6x$

  $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

- Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

- Hàm số đồng biến trên (0 ; 2); hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.
- Hàm số đạt cực đại tại x = 2, $y_{CĐ} = 3$; hàm số đạt cực tiểu tại x = 0, $y_{CT} = -1$.
- Đồ thị: Điểm đặc biệt: (0;-1), (-1; 3), (3; -1), (1; 1)



b) $x^3 - 3x^2 + m = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 - 1 = m - 1$

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ với đường thẳng y = m – 1.

Vậy $m-1 > 3 \Leftrightarrow m > 4$: Phương trình có 1 nghiệm.

$m-1 = 3 \Leftrightarrow m = 4$: Phương trình có 2 nghiệm.

$3 > m-1 > -1 \Leftrightarrow 4 > m > 0$: Phương trình có 3 nghiệm.

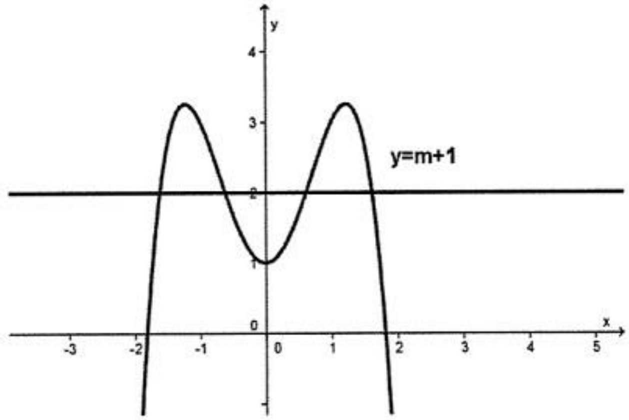
$m-1 = -1 \Leftrightarrow m = 0$: Phương trình có 2 nghiệm.

$m-1 < -1 \Leftrightarrow m < 0$: Phương trình có 1 nghiệm.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = -x^4 + 3x^2 + 1$ có đồ thị (C)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).
b) Dựa vào đồ thị (C) tìm m để phương trình $x^4 - 3x^2 + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

a) Thực hiện các bước tương tự như bài tập 2, ta được đồ thị hàm số sau:



b) $x^4 - 3x^2 + m = 0 \Leftrightarrow -x^4 + 3x^2 + 1 = m + 1$

- Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng y=m+1.
- Dựa vào đồ thị, phương trình có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 1 < m + 1 < \frac{13}{4} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{9}{4}$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4 \quad (C)$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm A(- 1; 0) với hệ số góc là k (k thuộc R). Tìm k để đường thẳng d cắt (C) tại ba điểm phân biệt và hai giao điểm B, C (B, C khác A) cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.

Đường thẳng d đi qua A(-1; 0) với hệ số góc là k, có phương trình là:

y = k(x+1) = kx+ k.

Nếu d cắt (C) tại ba điểm phân biệt thì phương trình: $x^3 - 3x^2 + 4 = kx + k$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - kx + 4 - k = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - 4x + 4 - k) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ g(x) = x^2 - 4x + 4 - k = 0 \end{array}\right.$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = x^2 - 4x + 4 - k = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác - 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ 9 - k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < k \neq 9 \quad (*)$

Với điều kiện: (*) thì d cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, C.Với A(-1;0), do đó B,C có hoành độ là hai nghiệm của phương trình g(x) = 0.

Gọi $B(x_1; y_1); C(x_2; y_2)$ với $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 4x + 4 - k = 0$. Còn $y_1 = kx_1 + k; y_2 = kx_2 + k$.

Ta có: $\overrightarrow{BC} = \left(x_2 - x_1; k\left(x_2 - x_1\right)\right) \Rightarrow BC = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2\left(1 + k^2\right)} = \left|x_2 - x_1\right|\sqrt{\left(1 + k^2\right)}$

Khoảng cách từ O đến đường thẳng d: $h=\frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}$

Vậy theo giả thiết:

$$S=\frac{1}{2}h.BC=\frac{1}{2}\frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}.\left|2\sqrt{k}\right|\sqrt{1+k^2}=2\sqrt{k^3}=1\Rightarrow\sqrt{k^3}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow k^3=\frac{1}{4}\Rightarrow k=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

Ví dụ 6. Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4\,(1)$. Tìm m để đường thẳng d: y = x + 4 cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho tam giác MBC có diện tích bằng 4. (Điểm B, C có hoành độ khác không ; M(1;3)).

Đồ thị (1) cắt d tại ba điểm A, B, C có hoành độ là nghiệm của phương trình:

$$\Leftrightarrow x^3+2mx^2+(m+3)x+4=x+4;\Leftrightarrow x\left[x^2+2mx+m+2\right]=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2+2mx+m+2=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\Delta'=m^2-m-2>0\Leftrightarrow m<-1\vee m>2\quad(*)$$

Với m thỏa mãn (*) thì d cắt (1) tại ba điểm A(0; 4), còn hai điểm B,C có hoành độ là hai nghiệm của phương trình: $\Leftrightarrow x^2+2mx+m+2=0\Rightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2-m-2>0\\m+2\neq0\end{cases}\Leftrightarrow m<-1\vee m>2;m\neq-2$

- Ta có $B(x_1;x_1+4);C(x_2;x_2+4)\Rightarrow\overrightarrow{BC}=(x_2-x_1;x_2-x_1)$

$$\Rightarrow BC=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(x_2-x_1)^2}=|x_2-x_1|\sqrt{2}$$

-Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên d. h là khoảng cách từ M đến d thì:

$$\Rightarrow h=\frac{|1-3+4|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Rightarrow S=\frac{1}{2}BC.h=\frac{1}{2}|x_2-x_1|\sqrt{2}.\sqrt{2}=|x_2-x_1|$$

- Theo giả thiết: S = 4 $\Leftrightarrow|x_2-x_1|=4;\Leftrightarrow2\sqrt{\Delta'}=4;\Rightarrow m^2-m-2=4\Rightarrow m^2-m-6=0$

Kết luận: với m thỏa mãn: $m=-2\vee m=3\Rightarrow m=3$ (chọn).

Ví dụ 7. Cho hàm số $y=x^4-(m+1)x^2+m\ (C_m)$. Xác định $m>1$ để đồ thị (C_m) cắt trục *Ox* tại 4 điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi và trục *Ox* có diện tích phần phía trên trục *Ox* bằng diện tích phần phía dưới trục *Ox*.

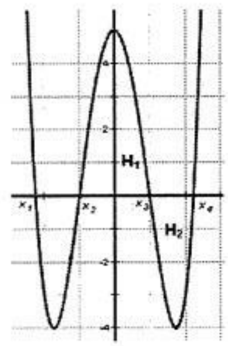
Đồ thị hàm số cắt *Ox* tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow x^4-(m+1)x^2+m=0$ (1) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow t^2-(m+1)t+m=0\,(2)$ có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m+1)^2 - 4m > 0 \\ m+1 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0 \,\&\, m \neq 1$$

Hai nghiệm của (2) là $t = 1,\ t = m$, do $m > 1$ nên 4 nghiệm phân biệt của (1) theo thứ tự tăng là: $-\sqrt{m}, -1, 1, \sqrt{m}$

Hàm số là chẵn nên hình phẳng trong bài toán nhận Oy làm trục đối xứng. Khi đó đồ thị có dạng như hình bên.



Bài toán thỏa mãn

$$S_{H_1} = S_{H_2}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left|x^4 - (m+1)x^2 + m\right| dx = \int_1^{\sqrt{m}} \left|x^4 - (m+1)x^2 + m\right| dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \left(x^4 - (m+1)x^2 + m\right) dx = -\int_1^{\sqrt{m}} \left(x^4 - (m+1)x^2 + m\right) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\sqrt{m}} \left(x^4 - (m+1)x^2 + m\right) dx = 0$$

$$\left(\frac{x^5}{5} - (m+1)\frac{x^3}{3} + mx\right)\Bigg|_0^{\sqrt{m}} = 0 \Leftrightarrow \frac{m}{5} - \frac{m+1}{3} + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 5.$$

KL: $m = 5$ thỏa mãn yêu cầu

Ví dụ 8. Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 2$. Tìm m để đường thẳng $y = 1$ cắt (C_m) tại bốn điểm phân biệt A, B, C, D sao cho $OA + OB + OC + OD = 4 + 2\sqrt{2}$

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 2 = 1 \Leftrightarrow x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1 = 0$$

Đặt $t = x^2\ (t \geq 0)$, ta có phương trình $t^2 - 2(m+1)t + 2m + 1 = 0, (*)$

Để có 4 giao điểm phân biệt thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - (2m+1) > 0 \\ 2m + 1 > 0 \\ 2(m+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Với điều kiện trên phương trình (*) có hai nghiệm dương t_1, t_2. Theo Vi-et ta có,

$t_1 + t_2 = 2(m+1), \quad t_1t_2 = 2m+1$

Từ $t_1 = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{t_1}$; $t_2 = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{t_2}$

Đặt $x_A = \sqrt{t_1}, \quad x_B = -\sqrt{t_1}, \quad x_C = \sqrt{t_2}, \quad x_D = -\sqrt{t_2}$

$\Rightarrow A\left(\sqrt{t_1};1\right), \quad B\left(-\sqrt{t_1};1\right), \quad C\left(\sqrt{t_1};1\right), \quad D\left(-\sqrt{t_2};1\right)$

$\Rightarrow OA + OB + OC + OD = 2\sqrt{1+t_1} + 2\sqrt{1+t_1}$

Theo đề $\Rightarrow 2\sqrt{1+t_1} + 2\sqrt{1+t_2} = 4 + 2\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+t_1} + \sqrt{1+t_2} = 2 + \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+t_1} + \sqrt{1+t_2}\right)^2 = 6 + 4\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow t_1 + t_2 + 2\sqrt{t_1t_2 + t_1 + t_2 + 1} = 4 + 4\sqrt{2}$$

$\Rightarrow 2(m+1) + 2\sqrt{2m+1+2(m+1)+1} = 4 + 4\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{4m+4} = 1 + 2\sqrt{2} - m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2\sqrt{2} - m \geq 0 \\ 4m + 4 = \left(1 + 2\sqrt{2} - m\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 + 2\sqrt{2} \\ m^2 - 2\left(3 + 2\sqrt{2}\right)m + 5 + 4\sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

Vậy điều kiện phải tìm là $m = 1$.

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$ có đồ thị là (C_m). Định m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1 = 0 \qquad (1)$

Đặt $t = x^2, t \geq 0$ thì (1) trở thành: $f(t) = t^2 - 2(m+1)t + 2m + 1 = 0$.

Để (C_m) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt thì $f(t) = 0$ phải có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 > 0 \\ S = 2(m+1) > 0 \\ P = 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\dfrac{1}{2} \\ m \neq 0 \end{cases} (*)$$

Với (*), gọi $t_1 < t_2$ là 2 nghiệm của $f(t) = 0$, khi đó hoành độ giao điểm của (C_m) với Ox lần lượt là: $x_1 = -\sqrt{t_2}; x_2 = -\sqrt{t_1}; x_3 = \sqrt{t_1}; x_4 = \sqrt{t_2}$

x_1, x_2, x_3, x_4 lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$

$$\Leftrightarrow m+1+|m| = 9\left(m+1-|m|\right) \Leftrightarrow 5|m| = 4\left(m+1\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5m = 4m+4 \\ -5m = 4m+4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -\dfrac{4}{9} \end{array}\right.$$

Vậy $m = \left\{4; -\dfrac{4}{9}\right\}$

2.4 Bài toán Suy đồ thị- Biện luận số nghiệm

Kiến thức cơ bản: Đồ thị chứa dấu trị tuyệt đối

$y = f(x)$ có đồ thị (C)	$y = \left|f(x)\right|$ có đồ thị (C')	$y = f\left(\left|x\right|\right)$ có đồ thị (C'')
	$y = \left|f(x)\right| \geq 0, \forall x \in D$. Ta cã: y = f($\left|x\right|$) = $\begin{cases} f(x) & khi \quad x \geq 0. \\ f(-x) & khi \quad x < 0. \end{cases}$ Do đó: +Ta phải giữ nguyên phần (C) phía trên trục *Ox* +Lấy đối xứng qua Ox với phần phía dưới trục *Ox*. +Bỏ đi phần (C) nằm ở phía dưới Ox	$y = f\left(\left|x\right|\right)$ có $f\left(\left|-x\right|\right) = f\left(\left|x\right|\right), \forall x \in D$ nên đây là hàm số chẵn do đó có đồ thị đối xứng qua trục tung *Oy*. Do đó: +) Ta phải giữ nguyờn phần (C) bên phải Oy +Bỏ đi phần (C) nằm ở bên trái Oy +Lấy đối xứng qua Oy với phần đồ thị (C) ở bờn phải Oy

4.2. Ví dụ và bài tập

Ví dụ 1: Cho hàm số: $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ (C)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số *(đề thi đại học khối A- 2006)*

2) Dựa vào đồ thị (C) vẽ đồ thị các hàm số:

a) $y = \left|2x^3 - 9x^2 + 12x - 4\right|$

b) $y = 2\left|x\right|^3 - 9x^2 + 12\left|x\right| - 4$

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số: $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ (C)

*) Khảo sát sự biến thiên: *(Bạn đọc tự giải)*

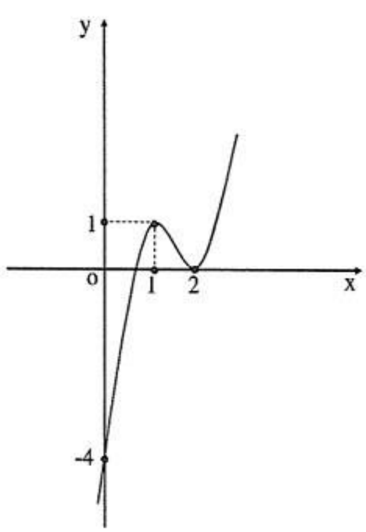
Ta có: $y' = 6x^2 - 18x + 12$.

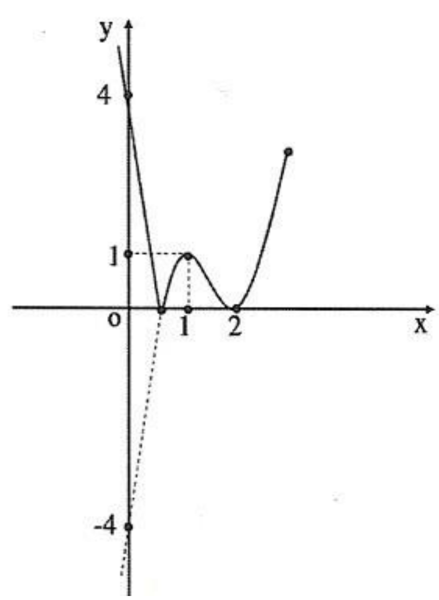
$y'' = 12x - 18$

CĐ(1; 1) ; CT(2; 0)

*) Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$





2) Dựa vào đồ thị (C) vẽ đồ thị các hàm số:

a) $y = |2x^3 - 9x^2 + 12x - 4|$

(Đặt $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$)

Ta có $y = |2x^3 - 9x^2 + 12x - 4| = |f(x)|$

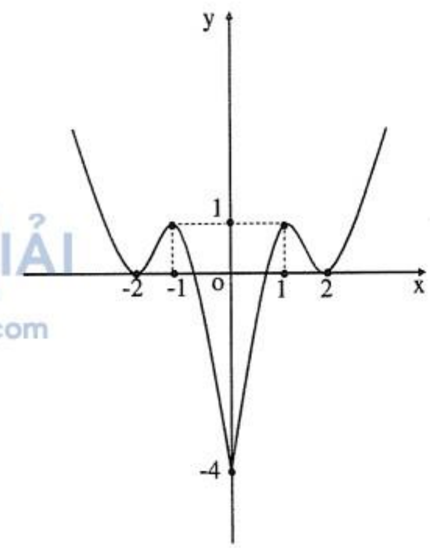
Do đó đồ thị hàm số:

$y = |2x^3 - 9x^2 + 12x - 4|$ gồm:

+) Phần từ trục hoành trở lên của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

+) Đối xứng phần đồ thị phía dưới trục hoành của đồ thị hàm số $y = f(x)$ qua trục hoành

b) $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4$



(Đặt $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$)

Ta có: $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4$

$$= f(|x|) = \begin{cases} f(x) & khi \quad x \geq 0. \\ f(-x) & khi \quad x < 0. \end{cases}$$

Và $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn nên đồ thị có trục đối xứng là Oy.

Do đó đồ thị hàm số:

$y = f(|x|) = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4$ gồm:

+) Phần bên phải Oy của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

+) Đối xứng phần đồ thị trên qua Oy

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{-x+1}$ có đồ thị (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $\dfrac{|x|+1}{-|x|+1} = m.$

* *Tập xác định*: D=R\{1}

* *Sự biến thiên:*

$$y' = \frac{2}{(1-x)^2} > 0, \forall x \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Cực trị: Hàm số không có cực trị.

Giới hạn, tiệm cận:

$$\lim_{x\to 1^-} y = \lim_{x\to 1^-} \frac{x+1}{-x+1} = +\infty; \quad \lim_{x\to 1^+} y = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{-x+1} = -\infty$$

Do đó đường thẳng x = 1 là tiệm cận đứng.

$$\lim_{x\to -\infty} y = \lim_{x\to -\infty} \frac{x+1}{-x+1} = -1; \quad \lim_{x\to +\infty} y = \lim_{x\to +\infty} \frac{x+1}{-x+1} = -1$$

Do đó đường thẳng y = - 1 là tiệm cận ngang.

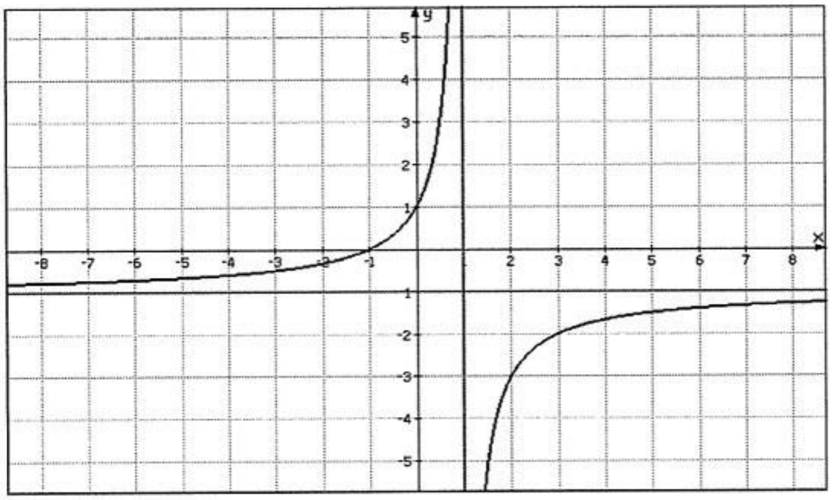
Bảng biến thiên:

x	-∞		1		+∞
y'		+	‖	+	
y	-1	$\nearrow$	+∞ ‖ -∞	$\nearrow$	-1

* *Đồ thị:*

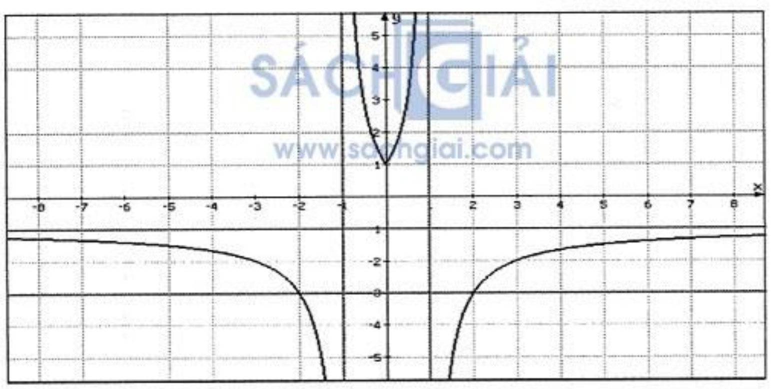
Đồ thị cắt trục Oy tại điểm (0; 1) và cắt trục hoành tại điểm (-1; 0).

Đồ thị có tâm đối xứng là giao điểm I(1; -1) của hai tiệm cận.



b)Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $\dfrac{|x|+1}{-|x|+1}=m.\quad (1)$

lập luận để suy từ đồ thị (C) sang đồ thị $y=\dfrac{|x|+1}{-|x|+1}\quad (C')$.



Số nghiệm của pt (1) bằng số giao điểm của đthị $y=\dfrac{|x|+1}{-|x|+1}$ và đg thẳng y = m.

Suy ra đáp số: $m<-1; m>1$: phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

$m=1$: phương trình có 1 nghiệm.

$-1\le m<1$: phương trình vô nghiệm.

2.5 BÀI TOÁN MAX,MIN

(GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT)

Bài toán này xuất hiện trong đề thi Toán THPT quốc gia 2015. Nhìn chung là một câu dễ dàng xử lý chỉ cần các em biết tính đạo hàm là xong.

Bài 1: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}} \text{ trên đoạn } [-1; 2].$$

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn [–1; 2]

$y' = \dfrac{2-2x}{(\sqrt{x^2+2})^3}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [-1; 2]$

Ta có $f(-1) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $f(1) = \sqrt{3}$; $f(2) = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

Vậy $\underset{[-1;2]}{Max} f(x) = \sqrt{3}$; $\underset{[-1;2]}{Min} f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Bài 2: Tìm cực trị của hàm số : $y = x - \sin 2x + 2$.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

$f'(x) = 1 - 2\cos 2x$, $f''(x) = 4\sin 2x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$f''\left(-\dfrac{\pi}{6} + k\pi\right) = 4\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3} < 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực đại tại $x_i = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$

Với $y_{CĐ} = f\left(-\dfrac{\pi}{6} + k\pi\right) = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$f''\left(\dfrac{\pi}{6} + k\pi\right) = 4\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3} > 0 \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $x_i = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$

Với $y_{CT} = f\left(\dfrac{\pi}{6} + k\pi\right) = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Bài 3: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ trên đoạn [- 2; 2].

Xét trên đoạn $\left[-2;2\right]$ ta có: $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3\ (l) \\ x = 1 \end{array}\right.$

Ta có: f(-2) = 23, f(1) = - 4 , f(2) = 3

Vậy: $\max\limits_{[-2;2]} f(x) = f(-2) = 23$, $\min\limits_{[-2;2]} f(x) = f(1) = -4$

Bài 4: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(x\right) = x^2 - \ln\left(1-2x\right)$ trên đoạn $\left[-1;0\right]$.

Ta có $f'\left(x\right) = 2x + \dfrac{2}{1-2x}; f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Tính $f\left(-1\right) = 1 - \ln 3; f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} - \ln 2; f\left(0\right) = 0$

Vậy $\min\limits_{[-1;0]} f\left(x\right) = \dfrac{1}{4} - \ln 2; \max\limits_{[-1;0]} f\left(x\right) = 0$

Bài 5: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right) = x^2 - 4\ln x$ trên đoạn $\left[1;e\right]$.

Ta có $f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[1;e\right]$; $f'\left(x\right) = 2x - \dfrac{4}{x}$.

Với $x \in \left[1;e\right]$, $f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Ta có $f\left(1\right) = 1, f\left(\sqrt{2}\right) = 2 - 2\ln 2, f\left(e\right) = e^2 - 4$.

Vậy $\min\limits_{[1;e]} f\left(x\right) = 2 - 2\ln 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}; \max\limits_{[1;e]} f\left(x\right) = e^2 - 4 \Leftrightarrow x = e$

Bài 6: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$ trên đoạn $\left[2;4\right]$.

Ta có f(x) liên tục trên đoạn $\left[2;4\right]$, $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$

Với $x \in \left[2;4\right]$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Ta có: $f(2) = 4, f(3) = 3, f(4) = \dfrac{10}{3}$

Vậy $\underset{[2;4]}{Min} f(x) = 3$ tại x = 3; $\underset{[2;4]}{Max} f(x) = 4$ tại x = 2

Bài 7: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x-1}{2x-1}$ trên đoạn $\left[2;4\right]$.

Hàm số liên tục trên đoạn $\left[2;4\right]$

Ta có $y' = \dfrac{1}{\left(2x-1\right)^2} > 0, \forall x \in \left[2;4\right]$

Có $y\left(2\right) = \dfrac{1}{3}; y\left(4\right) = \dfrac{3}{7}$

Vậy $\max\limits_{[2;4]} y = \dfrac{3}{7}$ khi $x = 4$ và $\min\limits_{[2;4]} y = \dfrac{1}{3}$ khi $x = 2$

Bài 8: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = x + \sqrt{4-x^2}$.

*) TXĐ: D = $\left[-2;2\right]$.

*) Ta có: $y' = 1 - \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$

Hàm số liên tục trên D và có: $\begin{array}{l} y(-2) = -2 \\ y(2) = 2 \\ y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \end{array}$

Vậy $\max\limits_{[-2;2]} y = 2\sqrt{2}$ tại $x = \sqrt{2}$, $\min\limits_{[-2;2]} y = -2$, tại $x = -2$.

Bài 9: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ trên [−1; 5].

$y' = 6x^2 + 6x - 12$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1\left(\in\left[-1;5\right]\right) \\ x = -2\left(\notin\left[-1;5\right]\right) \end{array}\right.$$

Ta có: $y(-1) = 14$, $y(1) = -6$, $y(5) = 266$

Vậy $\max\limits_{[-1;5]} y = 266$ *khi* $x = 5$, $\min\limits_{[-1;5]} y = -6$ *khi* $x = 1$

Bài 10: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=\left(x-\sqrt{2}\right)^2\left(x+\sqrt{2}\right)^2$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};2\right]$

.

Ta có $f\left(x\right)=x^4-4x^2+4$; $f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};0\right]$;

$f'\left(x\right)=4x^3-8x.$

Với $x\in\left[-\frac{1}{2};2\right], f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=0; x=\sqrt{2}$

Ta có $f\left(-\frac{1}{2}\right)=3\frac{1}{16}, f\left(0\right)=4, f\left(\sqrt{2}\right)=0, f\left(2\right)=4$.

Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};0\right]$ lần lượt là

4 và 0.

Bài 11: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=x-3+\frac{4}{x-1}$ trên đoạn $\left[2;5\right]$.

- Ta có $f\left(x\right)$ liên tục và xác định trên đoạn $\left[2;5\right]$; $f'\left(x\right)=1-\frac{4}{\left(x-1\right)^2}$

- Với $x\in\left[2;5\right]$ thì

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=3$ - Ta có: $f\left(2\right)=3, f\left(3\right)=2, f\left(5\right)=3$

- Do đó: $\underset{[2;5]}{Max} f\left(x\right)=3\Leftrightarrow x=2\vee x=5$, $\quad \underset{[2;5]}{min} f\left(x\right)=2\Leftrightarrow x=3$

Bài 12: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số : $y=x^4-2x^2+3$ trên đoạn $\left[0;4\right]$.

y'=$4x^3$-4x =4x(x^2-1)

y'= 0 <=> x=0, x=1 $\in\left[0;4\right]$ x= -1 loại

Ta có: f(0) =3 , f(1)=2 , f(4)=227

Vậy GTLN y = 227 , trên $\left[0;4\right]$ khi x=4

GTNN y= 2 trên trên $\left[0;4\right]$ khi x=1

Bài 13: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=x+\sqrt{4-x^2}$. trên đoạn $\left[-2;\dfrac{1}{2}\right]$.

+ Ta có $f'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

+ $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}\notin[-2;\dfrac{1}{2}]$

+ Có $f(-2)=-2; f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1+\sqrt{15}}{2}$

$\max\limits_{[-2;\frac{1}{2}]} f(x)=\dfrac{1+\sqrt{15}}{2}$; $\min\limits_{[-2;\frac{1}{2}]} f(x)=-2$

Bài 14: Tìm GTLN-GTNN của hàm số sau : $y=-x^4+2x^2+1$ trên đoạn $\left[-2;\dfrac{1}{2}\right]$

$y'=-4x^3+4x$

Trên $\left[-2;\dfrac{1}{2}\right]$ *có* $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.$

$y(-2)=-7,\ y(-1)=2,\ y(0)=1,\ y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{23}{16}$

Kết luận $\max\limits_{\left[-2;\frac{1}{2}\right]} y=y(-1)=2$ và $\min\limits_{\left[-2;\frac{1}{2}\right]} y=y(-2)=-7$

Bài 15: Tìm GTLN, GTNN của hàm số $f(x)=-2x^4+4x^2+10$ trên đoạn $[0;2]$.

Ta có: $f'(x)=-8x^3+8x$

Với $x\in[0;2]$ thì: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Ta có: f(0) = 10; f(1) = 12; f(2) = -6

Vậy: $\mathop{Max}\limits_{[0;2]} f(x)=f(1)=12$; $\min\limits_{[0;2]} f(x)=f(2)=-6$

Bài 16: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=-x^3-3x^2+9x-3$ trên đoạn $[0;2]$

Ta có hàm số f(x) xác định và liên tục trên đoạn $[0;2]$;

$f'(x) = -3x^2 - 6x + 9$

Với $x \in [0;2], f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Ta có f(0)=-3, f(1)=2, f(2)=-5

Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số f(x) trên đoạn $[0;2]$ lần lượt là 2 và -5.

Bài 17: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x-1}{2x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.

Ta có $y' = \dfrac{1}{(2x-1)^2} > 0, \forall x \in [2;4]$

Có $y(2) = \dfrac{1}{3}; y(4) = \dfrac{3}{7}$

Vậy $\max\limits_{[2;4]} y = \dfrac{3}{7}$ khi $x = 4$ và $\min\limits_{[2;4]} y = \dfrac{1}{3}$ khi $x = 2$

Bài 18: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^2 - 4\ln x$ trên đoạn $[1;e]$.

Ta có $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[1;e]$; $f'(x) = 2x - \dfrac{4}{x}$.

Với $x \in [1;e]$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Ta có $f(1) = 1, f(\sqrt{2}) = 2 - 2\ln 2, f(e) = e^2 - 4$.

Vậy $\min\limits_{[1;e]} f(x) = 2 - 2\ln 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}; \max\limits_{[1;e]} f(x) = e^2 - 4 \Leftrightarrow x = e$

Bài 19: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x-1}$ trên đoạn [2;5]

Hàm số liên tục và có đạo hàm trên [2;5].

$y' = 1 - \dfrac{4}{(x-1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \in [2;5] \\ x = -1 \notin [2;5] \end{array}\right.$

$y(2) = 5;\ y(3) = 4;\ y(5) = 5$

$\max\limits_{[2;5]} y = 5$ khi $x = 2 \vee x = 5$; $\min\limits_{[2;5]} y = 4$ khi $x = 3$

Bài 20: Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $f\;x\; = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[0;2]$.

Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[0;2]$, $f'\;x\; = 3x^2 - 3$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1(n) \\ x = -1(l) \end{array}\right.$$

$f(0) = 1, f(2) = 3, f(1) = -1$

Giá trị lớn nhất của $f(x)$ bằng 3 khi $x = 2$

Giá trị bé nhất của $f(x)$ bằng -1 khi $x = 1$

PHẦN 3: ĐỀ THI CÁC NĂM TRƯỚC

Câu 1 (Đề THPT 2016): Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^4 + 2x^2$

Câu 2 (Đề THPT 2016): Tìm *m* để hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị đó, tìm *m* để $x_1{}^2 + x_2{}^2 = 3$

$\boxed{\text{Đ/s: } m = \frac{3}{2}}$

Câu 3 (Đề THPT 2015): Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x$

Câu 4 (Đề THPT 2015): Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{4}{x}$ trên [1;3]

Đ/s: Vậy : $\min f(x) = 4$ tại x=2; $\max f(x) = 5$ tại x=1

Câu 5 (A-2014) Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) hàm số (1).

b) Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng $y = -x$ bằng $\sqrt{2}$.

Đ/s: M(0;-2) M(-2;0)

Câu 6(B,D-2014) Cho hàm số $y = x^3 - 3x - 2$ (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc bằng 9.

Đ/s: M(-2; -4) M(2; 0)

Câu 7 (A-2013) Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1$ (1), với m là tham số thực

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m = 0

b) Tìm m để hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Đ/s: $m \leq -1$

Câu 8 (B-2013) Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx$ (1), với m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = -1.

b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị *A* và *B* sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng y = x + 2.

Đ/s: m = 0 hay m = 2.

Câu 9 (A-2012) Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ *(1)* ,với m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m = 0.

b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông

Đ/s: m=0

Câu 10 (B-2012) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^3$ (1), m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = 1.
b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị *A* và *B* sao cho tam giác *OAB* có diện tích bằng 48.

Đ/s: m = ±2

Câu 11 (D-2012) Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ (1), m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = 1.

b) Tìm m để hàm số (1) có hai điểm cực trị x_1 và x_2 sao cho $x_1.x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$

Đ/s: $m = \frac{2}{3}$

Câu 12 (A-2011) Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Chứng minh rằng với mọi *m* đường thẳng y = x + m luôn cắt đồ thì (C) tại 2 điểm phân biệt A và B . Gọi k_1 và k_1 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B . Tìm *m* để tổng $k_1 + k_1$ đạt giá trị lớn nhất.

Đ/s: m= -1

Câu 13 (B-2011) Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ (1), m là tham số.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m = 1.

b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho OA = BC, O là gốc tọa độ, A là cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại.

Đ/s: $m = 2 + 2\sqrt{2}$

Câu 14 (D- 2011) Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho

b) Tìm k để đường thẳng y = kx + 2k +1 cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

Đ/s: k = – 3

Câu 15 (A-2010) Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m$ (1), m là số thực

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi m = 1.

b) Tìm m để đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện : $x_1^2 + x_2^2 + x_2^3 < 4$

Đ/s: $\begin{cases} -\frac{1}{4} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$

Câu 16 (B-2010) Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Tìm m để đường thẳng y = –2x + m cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho ΔOAB có diện tích bằng $\sqrt{3}$, O là gốc tọa độ.

Đ/s: m = 2 V m = –2

Câu 17 (D-2010) Cho hàm số $y = -x^4 - x^2 + 6$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b)Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{6}x - 1$

Đ/s: $y = -6x + 10$

Câu 18 (D-2009) Cho hàm số $y = x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m$ có đồ thị là (C_m), m là tham số.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho khi m = 0.

b) Tìm m để đường thẳng y = -1 cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

Đ/s: $\begin{cases} -\frac{1}{3} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$

Câu 19 (B-2009) Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2$ (1)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (1)

b) Với giá trị nào của m, phương trình $x^2.|x^2-2| = m$ có 6 nghiệm thực phân biệt

Đ/s: $0<m<1$

Câu 20 (A-2009) Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ (1)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (1)

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại 2 điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O.

Đ/s: $y=-x-2$

Câu 1 (Đề THPT 2016): Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^4 + 2x^2$

Câu 2 (Đề THPT 2016): Tìm *m* để hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị đó, tìm *m* để $x_1^2 + x_2^2 = 3$

Đ/s: $m=\frac{3}{2}$

Câu 3 (Đề THPT 2015): Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x$

Câu 4 (Đề THPT 2015): Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{4}{x}$ trên [1;3]

Đ/s: Vậy : $\min f(x) = 4$ tại x=2; $\max f(x) = 5$ tại x=1

Câu 5 (A-2014) Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) hàm số (1).

b) Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng $y = -x$ bằng $\sqrt{2}$.

Đ/s: M(0;-2) M(-2;0)

Câu 6(B,D-2014) Cho hàm số $y = x^3 - 3x - 2$ (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc bằng 9.

Đ/s: M(-2; -4) M(2; 0)

Câu 7 (A-2013) Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1$ (1), với m là tham số thực

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m = 0

b) Tìm m để hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Đ/s: $m \leq -1$

Câu 8 (B-2013) Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx$ (1), với m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = -1.

b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị *A* và *B* sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng y = x + 2.

Đ/s: m = 0 hay m = 2.

Câu 9 (A-2012) Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ (1), với m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m = 0.

b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông

Đ/s: m=0

Câu 10 (B-2012) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^3$ (1), m là tham số thực.

c) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = 1.
d) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị *A* và *B* sao cho tam giác *OAB* có diện tích bằng 48.

Đ/s: m = ±2

Câu 11 (D-2012) Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ (1), m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = 1.

b) Tìm m để hàm số (1) có hai điểm cực trị x_1 và x_2 sao cho $x_1.x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$

Đ/s: $m = \frac{2}{3}$

Câu 12 (A-2011) Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$.

c) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
d) Chứng minh rằng với mọi *m* đường thẳng y = x + m luôn cắt đồ thì (C) tại 2 điểm phân biệt A và B .
Gọi k_1 và k_1 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B .
Tìm *m* để tổng $k_1 + k_1$ đạt giá trị lớn nhất.
Đ/s: m= -1

Câu 13 (B-2011) Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ (1), m là tham số.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi m = 1.

b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho OA = BC, O là gốc tọa độ, A là cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại.

Đ/s: $m = 2 + 2\sqrt{2}$

Câu 14 (D- 2011) Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho

b) Tìm k để đường thẳng y = kx + 2k +1 cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

Đ/s: k = – 3

Câu 15 (A-2010) Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m$ (1), m là số thực

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi m = 1.

b) Tìm m để đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện : $x_1^2 + x_2^2 + x_2^3 < 4$

Đ/s: $\begin{cases} -\frac{1}{4} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$

Câu 16 (B-2010) Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Tìm m để đường thẳng y = –2x + m cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho ΔOAB có diện tích bằng $\sqrt{3}$, O là gốc tọa độ.

Đ/s: m = 2 V m = –2

Câu 17 (D-2010) Cho hàm số $y = -x^4 - x^2 + 6$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b)Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{6}x - 1$

Đ/s: y = – 6x + 10

Câu 18 (D-2009) Cho hàm số $y = x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m$ có đồ thị là (C_m), m là tham số.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho khi m = 0.

b) Tìm m để đường thẳng y = -1 cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

Đ/s: $\begin{cases} -\frac{1}{3} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$

Câu 19 (B-2009) Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2$ (1)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (1)

b) Với giá trị nào của m, phương trình $x^2.|x^2-2| = m$ có 6 nghiệm thực phân biệt

Đ/s: $0 < m < 1$

Câu 20 (A-2009) Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ (1)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (1)

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại 2 điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O.

Đ/s: y=-x-2

Các em đã luyện tập về tự luận và hiểu bản chất các dạng toán về hàm số bây giờ là lúc rèn luyện TƯ DUY TRẮC NGHIỆM. Về bản chất thì dù thi bằng hình thức gì cũng không thể bỏ được tư duy Toán học tự luận nhưng vì Trắc nghiệm cho sẵn đáp án nên ta có thể dựa vào đáp án và một số Skill Casio để giải quyết.

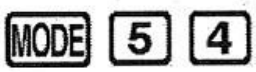
Một vài Skill CASIO để giải hàm số

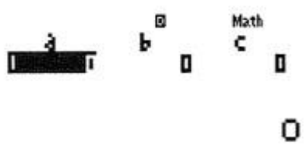
Biện luận số nghiệm, Tìm điều kiện để có một số nghiệm

Ví dụ 1: Phương trình $x^3+x=m^2+m$ có 3 nghiệm phân biệt khi:

A. $m<1$ B. $-1<m<2$ C. $-2<m<1$ D. $m>-21$

Để xửa nhanh dạng này các em vào luôn tính năng giải phương trình bậc 3 của máy tính rồi lại "chọn bừa" m như ví dụ trước:

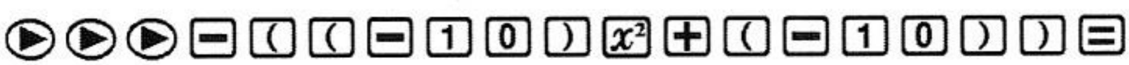


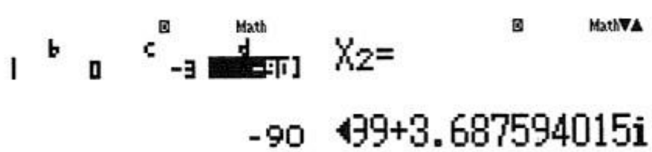


Ta sẽ lấy $m=-100$ xem A có đúng không?

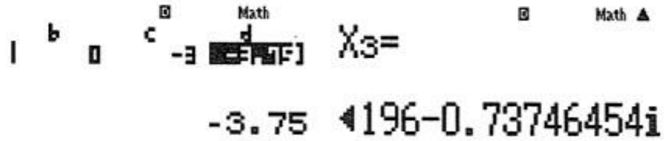
Đó ta thấy loại A luôn vì có nghiệm phức

Tiếp tục với $m=-10$ xem D đúng không, nếu không đúng thì lại thử giá trị B có C không có





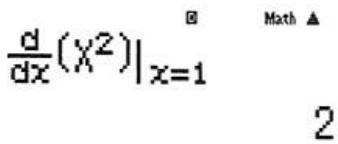
Tiếp tục thử với $m=1,5$



Do đó Loại B vì nó chứa giá trị trên, và duy nhất C đúng ^^ các em không tin thì thử mà xem

Bài toán Cực trị

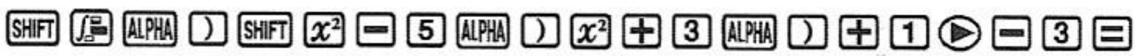
Các bài toán hàm số chủ yếu là hỏi về cực trị do đó chúng ta sẽ sử dụng tính năng đạo hàm:

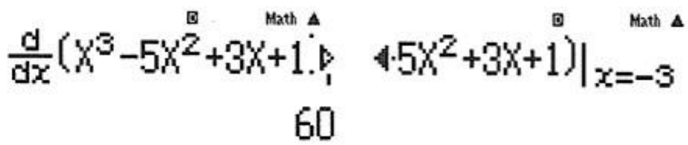


Ví dụ 1: Hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$ đạt cực trị khi :

A. $\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-\frac{1}{3} \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\frac{10}{3} \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{10}{3} \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\frac{1}{3} \end{array}\right.$

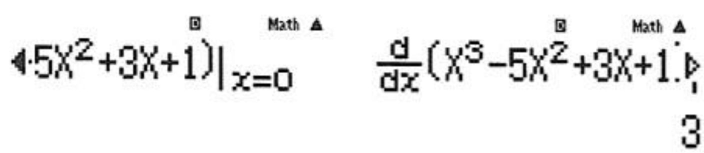
Các em sẽ nhập như sau:





Đó đó loại A vì đạo hàm của y không bằng 0 tại x = -3 nên nó ko thể là cực trị được

Tương tự các em thử với x = 0

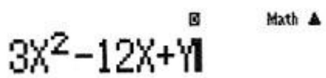


Vậy loạt nốt B,C Do đó ta sẽ chọn D.

Ví dụ 2: Hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên miền $(0,+\infty)$ khi giá trị m là:

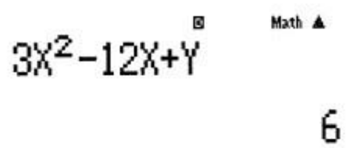
A. $m \geq 0$ B. $m \geq 12$ C. $m \leq 0$ D. $m \leq 12$

Những bài như thế này tốt nhất là các em đạo hàm tay cho dễ xét, ta đạo hàm luôn trên máy và thay tham số m bằng tham số Y trên máy

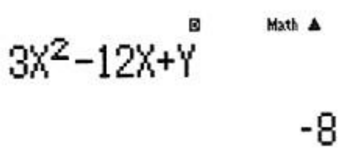


Tìm Y để biểu thức trên > 0 với mọi x thuộc $(0,+\infty)$ thì khi đó hàm sẽ đồng biến thôi ^^

Các em chọn bừa x=1 rồi chọn Y theo hướng loại dần đáp án, trước hết chọn Y=15 xem A,B đúng không? Hay là C,D đúng



Do đó A,B sẽ đúng, giờ A với B nó khác nhau giá trị 0→12 ta chọn bừa x=1



Vậy loại A do lớn hơn 0 vẫn chưa được, chắc phải lớn hơn 12 ^^ do đó chỉ còn chọn B

Ví dụ 3: Tìm m để hàm số $y = x^3 - 2x^2 + mx + m$ đạt cực tiểu tại điểm có hoành độ bằng 1

Đơn giản là các em giải phương trình $3.1^2 - 4.1 + m = 0$ thôi ^^

TRẮC NGHIỆM HÀM SỐ

Câu 1: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+9x-7$ có đồ thị (C_m). Tìm m để (C_m) cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

A. $m=\frac{-1-\sqrt{15}}{2}$ **B.** $m=1$ **C.** $m=\frac{-1+\sqrt{15}}{2}$ **D.** $m=\frac{1+\sqrt{15}}{2}$

Câu 2: Cho hàm số $y=x^4+(3m+1)x^2-3$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị

A. $m=-\frac{5}{3}$ **B.** $m=\frac{5}{3}$ **C.** $m=\frac{-5}{2}$ **D.** $m=\frac{5}{2}$

Câu 3: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2-3m+1$ (1), m là tham số. Tìm m để hàm số (1) đồng biến trên khoảng (1; 2)

A. $0<m\le 2$ **B.** $0<m\le 1$ **C.** $m\le 1$ **D.** $0<m\le 3$

Câu 4: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x$ tại điểm có tung độ bằng -2.

A. y= -2; y=9x+14 B. y= -2; y=9x+16 C. y= -2; y=9x-16 D. y= -2; y=9x+18

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)=x^4-(m+1)x^2+m^2+1$. Xác định giá trị của m để hàm số đạt cực đại tại điểm có hoành độ $x=0$.

A. $m>-1$ B. $m>-2$ C. $m>-3$ D.m>-4

Câu 6: Tìm GTLN của hàm số $y=f(x)=x^2-2\ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2},2\right]$

A. $4-2\ln 2$ B.1 C.3 D.5

Câu 7: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^3+4x$ biết tiếp tuyến song song đường thẳng $y=x+2$.

A. $y=x+2$ B. $y=x-2$ C. $y=2x-2$ D. $y=x-3$

Câu 8: Xác định giá trị của m để đường thẳng $y=x+m$ cắt đồ thị $y=\frac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+3x_1x_2=3$.

A.m= -2 B.m=3 C. không có m thỏa mãn D. Vô số m

Câu 9: Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2(1-m^2)x^2+m+1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích lớn nhất ?

A.m= 0 B.m=1 C. m=2 D. m=3

Câu 10: Tìm m để $d: 2x-y+m=0$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$ tại 2 điểm phân biệt có tung độ dương.

A. $m>4-\sqrt{40}$ B. $m>4+\sqrt{40}$ C. $m>4$ D. $m>\sqrt{40}$

Câu 11.Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=mx^3-3(m-1)x^2+9(m-2)x+2$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+2x_2=1$.

A. $m=2, m=\dfrac{2}{3}$. B. $m=\dfrac{2}{3}$. C. $m=2$. D. $m=3$.

Câu 12:. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$ (C) và đường thẳng d: $y=-2x+m-1$ (m là tham số thực). đường thẳng d luôn cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc tiếp tuyến tại A và B của (C). Xác định m để $(3k_1+1)^2+(3k_2+1)^2=98$.

A. $m=-1$. B. $m=2$. C. $m=-2$. D. $m=3$.

Câu 13: Cho hàm số $y=\dfrac{x+3}{-x+2}$ có đồ thị (*C*), đường thẳng (*d*) có phương trình $y=x-m-1$. Tìm m để (*d*) cắt (*C*) tại hai điểm phân biệt *A*, *B* sao cho tam giác *OAB* vuông tại *O*, (*O* là gốc tọa độ).

A. $m=3$ B. $m=-3$ C. $m=-2$ D. $m=2$

Câu 14: Cho đồ thị (C): $y=\dfrac{-2x+1}{x-1}$ và đường thẳng d: y = x + m (m là tham số). Tìm m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt

A. m < – 5 hoặc m > – 1 B. m < – 5 C. m > – 1 D. m > – 2

Câu 15: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x-2+\dfrac{4}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$

A.3 B. 4 C. -3 D.-4

Câu 16: Tìm GTLN của hàm số $y=\sqrt{4-x^2}+x$.

A. $2\sqrt{2}$ B. $-2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $-\sqrt{2}$

Câu 17: Cho hàm số: $y=x^4-2(m^2+1)x^2+1$ (1) Tìm các giá trị của tham số m để hàm số (1) có 3 điểm cực trị thỏa mãn giá trị cực tiểu đạt giá trị lớn nhất.

A. m=0 B. m=-1 C. m=-2 D.m=-3

Câu 18: Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x-m=0$ có một nghiệm duy nhất

A. $\left[\begin{array}{l}m<0\\m>2\end{array}\right.$ B. $m<1$ C. $\left[\begin{array}{l}m<1\\m>2\end{array}\right.$ D. $m>2$

Câu 19: Tìm m để đồ thị của hàm số $y=-x^3+3mx+1$ có 2 điểm cực trị A,B sao cho tam giác OAB vuông tại O (với O là gốc tọa độ)

A. $m=\frac{1}{2}$ B. $m=\frac{-1}{2}$ C. $m=\frac{1}{3}$ D. $m=\frac{-1}{2}$

Câu 20: Khi m = 2, viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + (m+1)x^2 + (m^2 - 4)x - m + 1$ với trục tung.

A. $y=-4$ B. $y=-2$ C. $y=-3$ D. $y=-1$

Câu 21: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2+1$ biết tiếp điểm có tung độ $y=1$.

A. $y=1$ B. $y=-2$ C. $y=-3$ D. $y=-1$

Câu 22: Viết PT tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}$ tại M có hoành độ $x_0=1$

A. $y=-x+3$ B. $y=-x+1$ C. $y=-x+2$ D. $y=-x+4$

Câu 23: Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2$ tại điểm M có hoành độ $x_0=\sqrt{2}$.

A. $y=4\sqrt{2}x-4$. B. $y=4\sqrt{2}x-8$. C. $y=4\sqrt{2}x+8$. D. $y=4\sqrt{2}x-6$.

Câu 24: Tìm m để phương trình $x(x-3)^2=m$ có 3 nghiệm phân biệt

A. $0<m<5$ B. $0<m<3$ C. $0<m<4$ D. $1<m<4$

Câu 25: Tìm tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^2-3$ cắt đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2-3$ tại 3 điểm phân biệt và tạo thành hình phẳng có diện tích bằng $\frac{128}{15}$

A. $m=1$ B. $m=2$ C. $m=3$ D. $m=4$

Câu 26: Tìm trên đồ thị hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$ các điểm M có hoành độ âm sao cho M cùng với hai điểm $A(1;0),B(3;1)$ tạo thành một tam giác có diện tích bằng $\frac{5}{2}$

A. $M\left(-3;\frac{1}{2}\right)$ B. $M\left(-2;\frac{1}{2}\right)$ C. $M\left(-4;\frac{1}{2}\right)$ D. $M\left(-5;\frac{1}{2}\right)$

Câu 27: Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$ và vuông góc với tiếp tuyến của đồ thị (C) tại gốc tọa độ.

A.y= 1/3x+5/3 B.y= -1/3x-5/3 C. y= -1/3x+5/3 D. y= -1/3x+4/3

Câu 28: Tìm trên trục hoành những điểm mà từ đó kẽ được các tiếp tuyến với đồ thị của hàm số $y=-x^3-6x^2-9x$, sao cho trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc nhau .

A. $M\left(-\frac{82}{27};0\right)$ B. $M\left(-\frac{83}{27};0\right)$ C. $M\left(-\frac{85}{27};0\right)$ D. $M\left(-\frac{86}{27};0\right)$

Câu 29: Tìm m để hàm số $y=\frac{2}{3}x^3+(m+1)x^2+(m^2+4m+3)x+1$ có hai cực trị tại hai điểm x_1,x_2 .Khi đó, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A=|x_1x_2-2(x_1+x_2)|$.

A.m = – 2 B. m = – 1 C. m = – 3 D. m = – 4

Câu 30: Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}$ Viết phương trình tiếp tuyến biết tiếp tuyến cách đều 2 điểm $A(2,4)$, $B(-4,-2)$.

A. $y=x-1$ B. $y=x+1$ C. $y=x+3$ D. $y=x+5$

1.A	**2.A**	**3.B**	**4.B**	**5.A**	**6A**	**7B**	**8C**	**9A**	**10B**
11.A	**12.C**	**13B**	**14.A**	**15.A**	**16.A**	**17.A**	**18.A**	**19.A**	**20D**
21A	**22C**	**23B**	**24C**	**25B**	**26A**	**27C**	**28A**	**29D**	**30B**

Chuyên đề Mũ – Logarit

A. Kiến thức cần nhớ:

I. Các phép toán về lũy thừa:

$a^0 = 1$	$(a.b)^m = a^m.b^m$	$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
$a^1 = a$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
$a^{-m} = \dfrac{1}{m}$	$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
$a^m.a^n = a^{m+n}$	$a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^m = b^m \Leftrightarrow a = b$	

II. Các phép toán về logarit:

$\log_a 1 = 0$	$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$	$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$
$\log_a a = 1$	$\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b$	$\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
$a^{\log_a b} = b$	$\log_{a^\alpha} b^\alpha = \log_a b$	$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ $\qquad \Rightarrow \log_a b \log_b a = 1$

$\log_a b.\log_b c = \log_a 1 = 0 \Leftrightarrow \log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$ $\qquad a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

Phương trình mũ

Phương trình mũ cơ bản:

Dạng 1. $a^x = b \ (0 < a \neq 1)$

+ Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

+ Nếu b > 0 thì phương trình có nghiệm duy nhất x = $\log_a b$

Dạng 2. $a^{f(x)} = a^{g(x)} \ (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Ví dụ 1. Nghiệm của phương trình : $8^{\frac{x}{x+2}} = 4.3^{4-x}$ là ?

A. $\left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -\log_3 2 - 2 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 1 \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\log_3 2 \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Lời giải:

Tự Luận:

Cách 1:

$$8^{\frac{x}{x+2}}=4.3^{4-x}\Leftrightarrow 2^{\frac{3x}{x+2}-2}=3^{4-x}\Leftrightarrow \frac{x-4}{x+2}=(4-x)\log_2 3\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\ x=-2-\log_3 2\end{array}\right.$$

Cách 2:

$$8^{\frac{x}{x+2}}=4.3^{4-x}\Leftrightarrow 2^{\frac{3x}{x+2}-2}=3^{4-x}\Leftrightarrow (2^{\frac{1}{x+2}}.3)^{x-4}=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-4=0\\ 2^{\frac{1}{x+2}}.3=1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\ \frac{1}{x+2}=\log_2\frac{1}{3}=-\frac{1}{\log_3 2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\ x=-\log_3 2-2\end{array}\right.$$

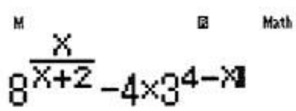
Trắc nghiệm :

Cách giải nhanh sử dụng máy tính

Cách 1: Dựa vào đáp án: CALC

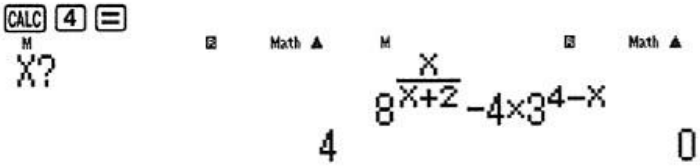
Bước 1: Nhập phương trình vào máy tính

8 $x^{\blacksquare}$ $\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$ ALPHA) ▼ ALPHA) + 2 ▶ ▶ − 4 × 3 $x^{\blacksquare}$ 4 − ALPHA)



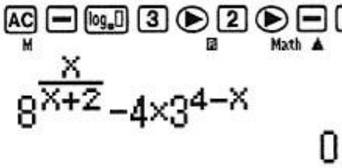
Bước 2: Tính giá trị biểu thức tại X = 4 (Xét đáp án A)

CALC 4 =



Vậy X=4 là một nghiệm của phương trình, tương tự các em CALC với $x=-\log_3 2-2$

AC − $\log_{\blacksquare}\square$ 3 ▶ 2 ▶ − 2 SHIFT RCL) ▲ =

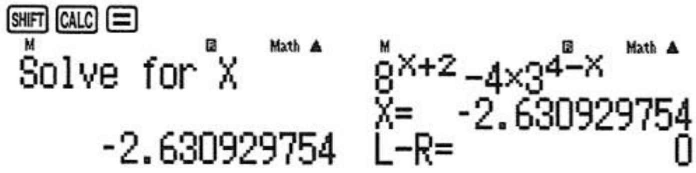


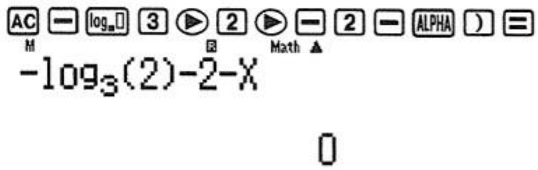
Vậy chúng ta chọn đáp án A

Cách 2: Dò nghiệm của phương trình bằng SOLVE

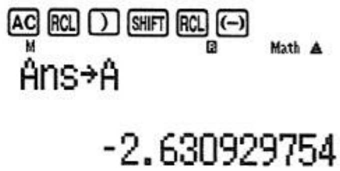
Bước 1: như trước

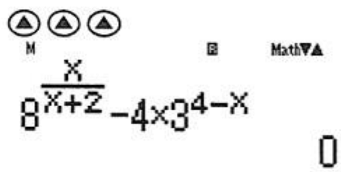
Bước 2:

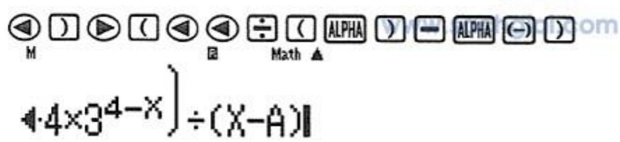


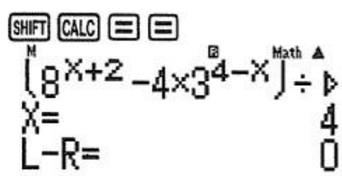


Để tìm tiếp nghiệm khác , các em lưu nghiệm lẻ vào A









Vậy chúng ta có thể dễ dàng chọn A!

Ví dụ 2. Phương trình: $2^{x^2-2x}.3^x = \frac{3}{2}$ có mấy nghiệm ?

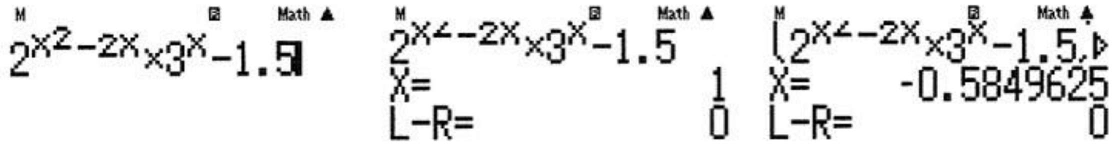
A. Vô nghiệm B. 1 C. 2 D. 3

Lời giải:

***Tự Luận:**

$$2^{x^2-2x}.3^x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2^{(x-1)^2}.3^{x-1} = 1 \Leftrightarrow \log_2\left[2^{(x-1)^2}.3^{x-1}\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1-\log_2 3 \end{array}\right.$$

Trắc nghiệm :



Vậy chọn C

Ví dụ 3. Cho phương trình: $x^3.3^x + 27x = x.3^{x+1} + 9x^3$ tìm tổng các nghiệm của phương trình

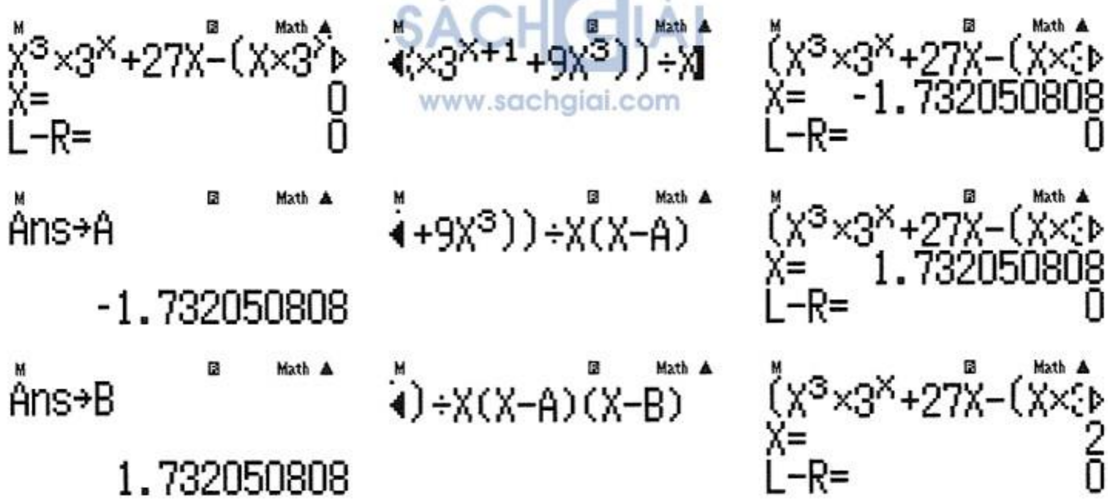
A. 1 B. 2 C. 3 D.4

Lời giải:

Tự luận

$$x^3.3^x + 27x = x.3^{x+1} + 9x^3 \Leftrightarrow \left(3^x - 9\right)\left(x^3 - 3x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x - 9 = 0 \\ x^3 - 3x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Trắc nghiệm :



Vậy các em chọn B nhé.

Ví dụ 4. Trung bình cộng của nghiệm phương trình: $16^{\frac{x+10}{x-10}} = 0,125.8^{\frac{x+5}{x-15}}$ **là:**

A.0 **B.20** **C.10** **D.15**

Lời giải:

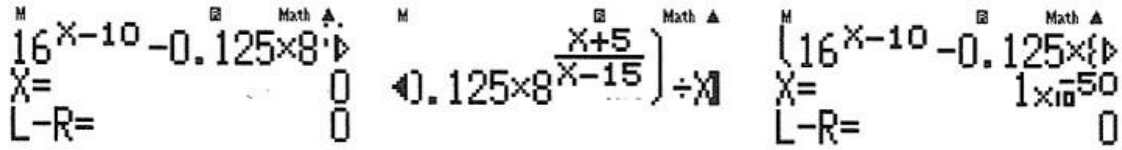
Tự luận

$$16^{\frac{x+10}{x-10}} = 0,125.8^{\frac{x+5}{x-15}} \Leftrightarrow 2^{4.\frac{x+10}{x-10}} = \frac{1}{2^3}.2^{3.\frac{x+5}{x-15}} \Leftrightarrow 2^{\frac{4x+40}{x-10}} = 2^{\frac{3x+15}{x-15}-3}$$

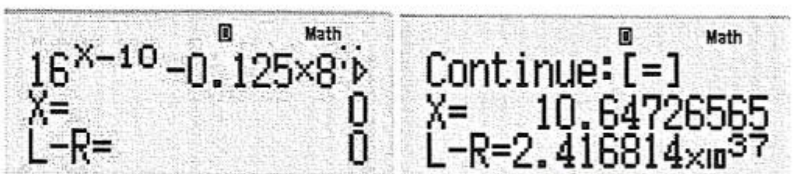
$$\Leftrightarrow \frac{4x+40}{x-10} = \frac{3x+15}{x-15} - 3 \Leftrightarrow (4x+40)(x-15) = 60(x-10) \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 20 \Rightarrow C$$

Trắc nghiệm: Solve chịu! Do thuật toán của nó

Đây là 570VN Plus



Đây là vinacal



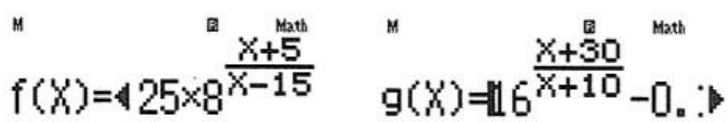
Lưu ý quan trọng: Solve chỉ mạnh trong giải phương trình vô tỉ chứ đối với mũ và logarit nó tỏ ra yếu đuối hẳn

Mẹo: Ta thấy các đáp án đều nguyên nên rất có thể nghiệm cũng sẽ nguyên do đó các em sẽ dùng Table để kiểm tra nghiệm từ 0 tới 29

Lưu ý là ở bài này phải sử sụng tới TABLE mở rộng giá trị lên tới 40 giá trị thay vì mặc định là 20 bằng cách sau xét G(Y) có Y=X+20

$$F(\mathrm{x}) = 16^{\frac{x+10}{x-10}} - 0,125.8^{\frac{x+5}{x-15}}; G(\mathrm{x}) = 16^{\frac{(x+20)+10}{(x+20)-10}} - 0,125.8^{\frac{(x+20)+5}{(x+20)-15}}$$

Các em vào Mode 7



Ta được kết quả

Vậy là có nghiệm x=0, x=20

Bài tập rèn luyện

Lưu ý: Các em nên giải tay trước khi sử dụng máy tính để giúp hiểu bài toán mới sử dụng tới công cụ giải nhanh

Bài 1. Nghiệm của phương trình: $2^{x^2-x+8}=4^{1-3x}$ là:

A. $x=-2;x=3$ B. $x=-2;x=-3$ C. $x=2;x=-3$ D. $x=2;x=3$

Lời giải:

$$2^{x^2-x+8}=4^{1-3x}\Leftrightarrow 2^{x^2-x+8}=2^{2(1-3x)}\Leftrightarrow x^2-x+8=2(1-3x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-3\end{array}\right.$$

Vậy chọn B.

Bài 2. Tổng các nghiệm của phương trình: $2^{x^2-6x-\frac{5}{2}}=16\sqrt{2}$ là:

A.3 B.4 C.5 D.6

Lời giải:

$$2^{x^2-6x-\frac{5}{2}}=16\sqrt{2}\Leftrightarrow 2^{x^2-6x-\frac{5}{2}}=2^4.2^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x^2-6x-\frac{5}{2}=4+\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=7\end{array}\right.\Rightarrow D$$

Bài 3. Phương trình $2^x+2^{x-1}+2^{x-2}=3^x-3^{x-1}+3^{x-2}$ có mấy nghiệm?

A.1 B.2 C.3 D.4

Lời giải:

$$2^x+2^{x-1}+2^{x-2}=3^x-3^{x-1}+3^{x-2}\Leftrightarrow 2^{x-2}(2^2+2+1)=3^{x-2}(3^2-3+1)$$

$$\Leftrightarrow 7.2^{x-2}=7.3^{x-2}\Leftrightarrow(\frac{3}{2})^{x-2}=1\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2\rightarrow \text{A}$$

Bài 4. Phương trình. $2^x.3^{x-1}.5^{x-2}=12$ có nghiệm là:

A.1 B.2 C.3 D.4

Lời giải:

$$2^x.3^{x-1}.5^{x-2}=12\Leftrightarrow 2^x.3^{x-1}.5^{x-2}=2^2.3\Leftrightarrow 2^{x-2}.3^{x-2}.5^{x-2}=1\Leftrightarrow(2.3.5)^{x-2}=1\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2\rightarrow B$$

Bài 5. Tìm x thỏa mãn: $(\sqrt{x-x^2})^{x-2}=1$

A.1 B.2 C. 3 D. không có giá trị nào

Lời giải:

Điều kiện : $0\le x\le 1$

$$(\sqrt{x-x^2})^{x-2}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-x^2}=1\\x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-x^2=1\ (VN)\\x=2(loai)\end{array}\right.\rightarrow D$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 6. Tìm x thỏa mãn: $(x+1)^{\sqrt{x-3}}=1$

A.1 B.2 C.3 D.4

Lời giải:

Điều kiện: $x\ge 3\Rightarrow x+1\ge 4$. Do đó:

$(x+1)^{\sqrt{x-3}}=1\Leftrightarrow\sqrt{x-3}=0\Leftrightarrow x=3$ (thỏa mãn điều kiện) $\Rightarrow C$

Bài 7. Số nghiệm của phương trình: $(x^2-2x+2)^{\sqrt{4-x^2}}=1$ **là:**

A.1 **B.2** **C.3** **D.4**

Lời giải:

Điều kiện : $|x|\le 2$

Phương trình tương đương:

$$\left[\begin{array}{l}x^2-2x+2=1\\\begin{cases}x^2-2x+2\ne 1\\\sqrt{4-x^2}=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\\begin{cases}x\ne 1\\4-x^2=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\\begin{cases}x\ne 1\\x\pm 2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=1\ (tm)\\x=-2\end{array}\right.\Rightarrow \text{C}$$

Bài 8. Nghiệm của phương trình: $9^{|3x-1|}=3^{8x-2}$ (1) là:

A.0 B.$\dfrac{2}{7}$ C.$\dfrac{7}{2}$ D.$\dfrac{1}{3}$

Lời giải:

Điều kiện $x\ge\dfrac{1}{4}$

$$(1) \Leftrightarrow 3^{2|3x-1|} = 3^{8x-2} \Leftrightarrow |3x-1| = 4x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 7x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0(loai) \\ x=\frac{2}{7} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm là $x=\frac{2}{7} \to B$

Bài 9*: Nghiệm của phương trình: $15^{2x+3} = 5^{3x-1}.2^{x+7}$ là:

A. 1 **B.** $\log_9 10$ **C.** $1-\log_9 10$ **D.** $\log_{\frac{9}{10}}\left(\frac{25,6}{3375}\right)$

Lời giải:

Phương trình tương đương:

$$3^{2x+3}.5^{2x+3} = 5^{3x-1}.2^{x+7}$$
$$\Leftrightarrow 3^{2x+3} = 5^{x-4}.2^{x+7}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x-4}.\left(\frac{3}{2}\right)^{x+7} = 1$$
$$\Leftrightarrow (x+7)+(x-4)\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{5} = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{4\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{5}-7}{1+\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{5}} = \log_{\frac{9}{10}}\left(\frac{25,6}{3375}\right) \to D$$

Bài 10*. Tìm nghiệm của phương trình sau: $2^{2x+1}+2^{3-2x} = \frac{8}{\log_3(4x^2-4x+4)}$

A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

Lời giải:

Ta có:

$$\log_3(4x^2-4x+4) = \log_3[(2x-1)^2+3] \ge 1$$
$$\Rightarrow VP \le 8$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$VT = 2^{2x+1}+2^{3-2x} \ge 2\sqrt{2^{2x+1}.2^{3-2x}} = 8$$

Ta có $VT \ge VP$ nên phương trình có nghiệm khi $\begin{cases} 2x-1=0 \\ 2x+1=3-2x \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \to A$

Bài 11*. Tính tổng nghiệm của phương trình sau: $27^x + 2 = 3\sqrt[3]{3^{x+1} - 2}$ **(1)**

A.0 **B.1** **C.3** **D.4**

Lời giải:

Đặt : $3^x = t > 0$

Ta có: Bấm máy được t = 1 do đó ghép căn với số 1

$t^3 + 2 = 3\sqrt[3]{3t - 2}$

$\Leftrightarrow t^3 - 1 = 3\left(\sqrt[3]{3t-2} - 1\right)$

$\Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+1) = 3.\dfrac{3t-2-1}{\sqrt[3]{(3t-2)^2} + \sqrt[3]{3t-2} + 1}$

$\Leftrightarrow (t-1)\left[\left(t^2+t+1\right)\left(\sqrt[3]{(3t-2)^2} + \sqrt[3]{3t-2} + 1\right) - 9\right] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \\ \left(t^2+t+1\right)\left(\sqrt[3]{(3t-2)^2} + \sqrt[3]{3t-2} + 1\right) - 9 = 0 (*) \end{array}\right.$$

Giải (*) : Dễ thấy VT đồng biến do $t^2 + t + 1$, $\sqrt[3]{(3t-2)^2} + \sqrt[3]{3t-2} + 1$ đồng biến nên nếu (*) có nghiệm thì đó là nghiệm duy nhất, dễ thấy t=1 là nghiệm $\Rightarrow x = 0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x=0 $\rightarrow A$

Bài 12. Tổng các nghiệm của phương trình: $12 + 6^x = 4.3^x + 3.2^x$ là:

A.1 B.2 C.3 D.4

Lời giải:

Phương trình tương đương:

$12 - 4.3^x = 3.2^x - 6^x$

$\Leftrightarrow 4(3 - 3^x) = 2^x(3 - 3^x)$

$\Leftrightarrow (4 - 2^x)(3 - 3^x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4 - 2^x = 0 \\ 3 - 3^x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 4 \\ 3^x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm x=1 và x=2 $\rightarrow C$

Bài 13. Phương trình: $e^5 + e^{4x} = e^{3x+2} + e^{x+3}$ có nghiệm là :

A. $x = -1, x = 2$ B. $x = 1, x = -2$ C. $x = -1, x = -2$

Lời giải:

Phương trình tương đương:

$$e^{4x}-e^{x+3}=e^{3x+2}-e^{5}$$
$$\Leftrightarrow e^{x}(e^{3x}-e^{3})=e^{2}(e^{3x}-e^{3})$$
$$\Leftrightarrow (e^{x}-e^{2})(e^{3x}-e^{3})=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e^{x}=e^{2} \\ e^{3x}=e^{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm x=1 và x=2 $\rightarrow D$

Bài 14. Nghiệm của phương trình: $3.8^{x}+6.12^{x}-18^{x}-2.27^{x}=0$ là:

A. $\log_{\frac{4}{9}}3$ B. $\log_{\frac{3}{4}}3$ C. $\log_{\frac{3}{2}}3$ D. $\log_{\frac{9}{4}}3$

Lời giải:

$$3.8^{x}+6.12^{x}-18^{x}-2.27^{x}=0 \Leftrightarrow 3.4^{x}(2^{x}+2.3^{x})-9^{x}(2^{x}+2.3^{x})=0$$
$$\Leftrightarrow (2^{x}+2.3^{x})(3.4^{x}-9^{x})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x}+2.3^{x}=0\ (VN) \\ 3.4^{x}-9^{x}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^{x}=3 \Leftrightarrow x=\log_{\frac{9}{4}}3 \rightarrow D$$

Bài 15. Tích các nghiệm phương trình: $\frac{1}{3}.6^{x\sqrt{x}}+1=2^{x\sqrt{x}}+3^{x\sqrt{x}-1}$ là:

A. 1 B. 2 C.4 D.0

Lời giải:

Điều kiện : $x\geq 0$

$$\frac{1}{3}.6^{x\sqrt{x}}+1=2^{x\sqrt{x}}+3^{x\sqrt{x}-1} \Leftrightarrow \frac{1}{3}.6^{x\sqrt{x}}-2^{x\sqrt{x}}+1-3^{x\sqrt{x}-1}=0 \Leftrightarrow 2^{x\sqrt{x}}(3^{x\sqrt{x}-1}-1)-(3^{x\sqrt{x}-1}-1)=0$$
$$\Leftrightarrow (3^{x\sqrt{x}-1}-1)(2^{x\sqrt{x}}-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{x\sqrt{x}-1}-1=0 \\ 2^{x\sqrt{x}}-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\sqrt{x}-1=0 \\ x\sqrt{x}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \end{array}\right. \rightarrow D$$

Bài 16. Số nghiệm phương trình: $x^{3}.3^{x}+27x=x.3^{x+1}+9x^{3}$

A. 1 B. 2 C.4 D.3

Lời giải:

$x^3.3^x+27x=x.3^{x+1}+9x^3 \Leftrightarrow 3^x(x^3-3x)+9(3x-x^3)=0 \Leftrightarrow \left(3^x-9\right)\left(x^3-3x\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x-9=0\\ x^3-3x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=0\\ x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right. \Rightarrow C$$

Bài 17. Phương trình: $81^{x^2}-3^{(x+1)^2}+3^{2x+3}=3^{3x^2+2}$ có mấy nghiệm?

A.1 B.2 C.3 D.4

Lời giải:

$81^{x^2}-3^{(x+1)^2}+3^{2x+3}=3^{3x^2+2} \Leftrightarrow (3^{4x^2}-3^{3x^2+2})-(3^{(x+1)^2}-3^{2x+3})=0 \Leftrightarrow 3^{3x^2}(3^{x^2}-3^2)-3^{2x+1}(3^{x^2}-3^2)=0$

$$\Leftrightarrow (3^{x^2}-3^2)(3^{3x^2}-3^{2x+1})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^{x^2}-3^2=0\\ 3^{3x^2}-3^{2x+1}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2=2\\ 3x^2=2x+1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\sqrt{2}\\ x=1\\ x=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right. \Rightarrow D$$

Bài 18. Nhiệm của phương trình: $8-x.2^x+2^{3-x}-x=0$ là:

A. 1 B.2 C.3 D.4

Lời giải:

$8-x.2^x+2^{3-x}-x=0 \Leftrightarrow (2^3+2^{3-x})-(x.2^x+x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2^3(1+2^x)}{2^x}-x(2^x+1)=0$

$\Leftrightarrow (2^x+1)(2^{3-x}-x)=0 \Leftrightarrow 2^{3-x}-x=0 \Leftrightarrow x.2^x=8 \Leftrightarrow x=2.$

(do hàm $y=x; y=2^x$ đồng biến trên R nên phương trình $x.2^x=8$ có nghiệm duy nhất là 2)

Bài 19. Tích các nghiệm của phương trình: $5^{2x+1}+7^{x+1}-175^x-35=0$

A. 0.5 B. 1 C. 1.5 D. 2

Lời giải:

$5^{2x+1}+7^{x+1}-175^x-35=0 \Leftrightarrow (5^{2x+1}-175^x)+(7^{x+1}-35)=0 \Leftrightarrow 5^{2x}(5-7^x)+7(7^x-5)=0$

$$(5-7^x)(5^{2x}-7)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}7^x=5\\ 5^{2x}=7\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\log_7 5\\ x=\dfrac{1}{2}\log_5 7\end{array}\right. \Rightarrow A$$

Bài 20. Phương trình: $4^{x^2+x}+2^{1-x^2}=2^{(x+1)^2}+1$ có mấy nghiệm?

A.0 B.1 C.2 D.3

$$4^{x^2+x}+2^{1-x^2}=2^{(x+1)^2}+1 \Leftrightarrow 2^{2x^2+2x}-2^{(x+1)^2}+2^{1-x^2}-1=0 \Leftrightarrow 2^{2x^2+2x}(1-2^{1-x^2})+2^{1-x^2}-1=0$$

$$\Leftrightarrow (2^{1-x^2}-1)(1-2^{2x^2+2x})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{1-x^2}=1 \\ 2^{2x^2+2x}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x^2=0 \\ 2x^2+2x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=0 \end{array}\right. \to D$$

Bài 21. Tìm tổng các nghiệm của phương trình: $4^{x^2-3x+2}+4^{x^2+6x+5}=4^{2x^2+3x+7}+1$

A. -3 B. -2 C. -1 D. 0

Lời giải:

Rất nhiều em sẽ bấm máy thiếu nghiệm dẫn tới tính sai ở câu hỏi này!

$$4^{x^2-3x+2}+4^{x^2+6x+5}=4^{2x^2+3x+7}+1 \Leftrightarrow 4^{x^2-3x+2}-4^{2x^2+3x+7}+4^{x^2+6x+5}-1=0$$

$$\Leftrightarrow 4^{x^2-3x+2}(1-4^{x^2+6x+5})+4^{x^2+6x+5}-1=0 \Leftrightarrow (4^{x^2+6x+5}-1)(1-4^{x^2-3x+2})=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4^{x^2+6x+5}=1 \\ 4^{x^2-3x+2}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+6x+5=0 \\ x^2-3x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-5 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow A$$

Phương trình Logarrit

Ví dụ 1. Nghiệm của phương trình $\log_2^2 x+(x-4)\log_2 x-x+3=0$ là:

A.1 B. 2 C.3 D.4

Lời giải:

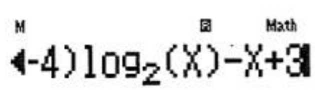
***Tự luận :**

$$\log_2^2 x+(x-4)\log_2 x-x+3=0 \Leftrightarrow (\log_2 x-1)(\log_2 x+x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x-1=0 \\ \log_2 x+x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=2$$

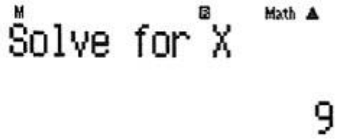
Các em có thể dùng Solve hay Calc

***SOLVE**

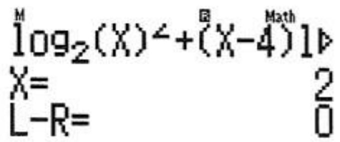
Bước 1: Nhập phương trình :



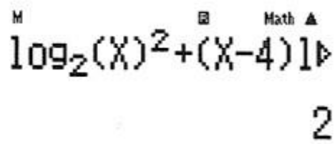
Sau đó khởi động chương trình Solve : SHIFT CALC

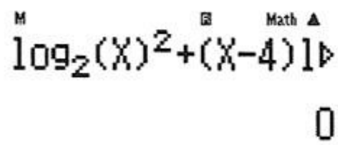


Kết quả



*CALC





Ví dụ 2. Tích các nghiệm của phương trình $2(\log_9 x)^2 = \log_3 x.\log_3(\sqrt{2x+1}-1)$ là:

A.1 B.2 C.4 D.8

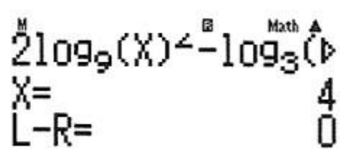
Lời giải:

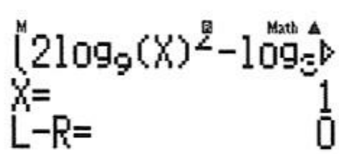
Tự luận: ĐK: x > 0.

$$2(\log_9 x)^2 = \log_3 x.\log_3(\sqrt{2x+1}-1) \Leftrightarrow \log_3 x\left(\log_3 x - 2\log_3(\sqrt{2x+1}-1)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x = 0\\ \log_3 x - 2\log_3(\sqrt{2x+1}-1) = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1\\ x = (\sqrt{2x+1}-1)^2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1\\ x = 4\end{array}\right.$$

Trắc nghiệm:





Vậy chọn C

Ví dụ 3. Phương trình $\log_2 x + \log_3 x + \log_5 x = \log_2 x.\log_3 x.\log_5 x$ có mấy nghiệm?

A.0 B.1 C.2 D.3

Lời giải:

Tự luận: ĐK: x > 0.

$$\log_2 x+\log_3 x+\log_5 x=\log_2 x.\log_3 x.\log_5 x$$
$$\Leftrightarrow \log_2 5.\log_5 x+\log_3 5.\log_5 x+\log_5 x=\log_2 3.\log_3 x.\log_3 x.\log_5 x$$
$$\Leftrightarrow \log_5 x\left(\log_2 3(\log_3 x)^2-\log_2 5-\log_3 5-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_5 x=0\\ (\log_3 x)^2=\dfrac{\log_2 5+\log_3 5+1}{\log_2 3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3^{\pm\sqrt{\frac{\log_2 5+\log_3 5+1}{\log_2 3}}}\end{array}\right.$$

$\Rightarrow D$

Trắc nghiệm

```
log2(X)+log3(X)▶        (log2(X)+log3(X▶        (log2(X)+log3(X▶
X=                 1    X=   0.148191874        X=   6.748008328
L-R=               0    L-R=           0        L-R=           0
```

Cách bấm tất cả các nghiệm của phương trình như sau:

Để tìm nghiệm thứ nhất các em giải Phương Trình : $f(x)=0$

Tìm nghiệm thứ 2 thì giải phương trình : $f(x):(x-a)=0$

Nghiệm thứ 3 các em giải: $f(x):(x-a)(x-b)=0$

Đến khi nào máy báo can't solve là phương trình hết nghiệm.

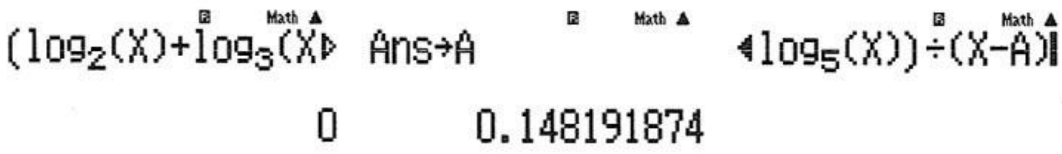
Bước 1: Nhập phương trình vào:

```
(log2(X)+log3(X▶

                0
```

Bước 2: Gọi lệnh Solve : Shift Solve và ấn =

```
Solve for X             (log2(X)+log3(X▶
                        X=   0.148191874
                0       L-R=           0
```

Được nghiệm xấu thì lưu ngay vào biến A nhưng trước khi lưu thì đẩy sang trái và ấn = để lưu phương trình, sau đó mới ấn RCL X Shift Sto A để lưu nghiệm lẻ sang A , rồi đẩy lên để tìm lại phương trình và đẩy sang trái để sửa lại thành (PT) : (X-A) , sửa xong lại quay lại gọi lệnh Solve



Ví dụ 4. Tính tổng các nghiệm của phương trình: $\log_3^2 x+\log_{3x}\dfrac{3}{x}=1$ (*)

A. 4 $\qquad$ B. $\dfrac{10}{9}$ $\qquad$ C. $\dfrac{28}{9}$ $\qquad$ D. $\dfrac{37}{9}$

Lời giải:

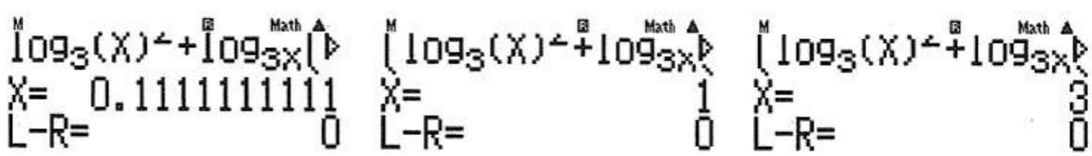
Tự luận: Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq \dfrac{1}{3} \end{cases}$

$$\log_3^2 x+\log_{3x}\frac{3}{x}=1 \Leftrightarrow \log_3^2 x+\log_{3x}3-\log_{3x}x=1 \Leftrightarrow \log_3^2 x+\frac{1}{\log_3 3x}-\frac{1}{\log_x 3x}=1$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x+\frac{1}{1+\log_3 x}-\frac{1}{\log_x 3+1}=1 \Leftrightarrow \log_3^2 x+\frac{1}{1+\log_3 x}-\frac{1}{\dfrac{1}{\log_3 x}+1}=1$$

Đặt $t=\log_3 x \Rightarrow (*)$: $t^2+\dfrac{1-t}{t+1}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-2 \\ t=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{9} \\ x=1 \\ x=3 \end{array}\right. \to D$

Trắc nghiệm



Bài tập rèn luyện

Bài 1. Nghiệm của phương trình $\log_3 x+\log_4 x=\log_5 x$ là :

A.1 $\qquad$ B.2 $\qquad$ C.3 $\qquad$ D.4

Lời giải:

ĐK: x > 0

$\log_3 x + \log_4 x = \log_5 x$

$\Leftrightarrow \log_3 x + \log_4 3.\log_3 x = \log_5 3 \log_3 x$

$\Leftrightarrow \log_3 x(1 + \log_4 3 - \log_5 3) = 0$

$\Leftrightarrow \log_3 x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Bài 2. Tính trung bình cộng nghiệm của phương trình : $\log_5 x.\log_3 x = \log_5 x + \log_3 x$

A. 2 B.4 C.6 D.8

Lời giải:

Điều kiện : x>0

$$\text{PT} \Leftrightarrow \log_5 x.\log_3 x - \log_5 x - \frac{\log_5 x}{\log_5 3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_5 x\left(\log_3 x - 1 - \frac{1}{\log_3 5}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_5 x\left(\log_3 x - \log_3 15\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 x = 0 \\ \log_3 x - \log_3 15 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 15 \end{array}\right.(tm) \to \text{D}$$

Bài 3.Tính $\log_2 x_o$ biết x_0 là nghiệm của phương trình: $\log_2(25^{x+3} - 1) = 2 + \log_2(5^{x+3} + 1)$ là:

A. -1 B. -2 C. 0 D. Không tồn tại

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 25^{x+3} - 1 > 0 \\ 5^{x+3} + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \log_2(25^{x+3} - 1) = \log_2 4 + \log_2(5^{x+3} + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(25^{x+3} - 1) = \log_2\left[4.\left(5^{x+3} + 1\right)\right] \Leftrightarrow 25^{x+3} - 1 = 4.5^{x+3} + 4$$

$$\Leftrightarrow (5^{x+3})^2 - 4.5^{x+3} - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^{x+3} = -1 \\ 5^{x+3} = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow x + 3 = 1 \Leftrightarrow x = -2\,(tm)$$

Vậy chọn D nhé các em vì $x_o > 0$

Bài 4. Nghiệm của phương trình: $\frac{1}{2}\log_2(x-1)^2 + \log_{\frac{1}{2}}(x+4) = \log_2(3-x)$

A. $x = -1 + \sqrt{14}; x = \sqrt{11}$ B. $x = -\sqrt{11}; x = 1 + \sqrt{14}$ C. $x = -1 + \sqrt{14}; x = \pm\sqrt{11}$ D. $x = -1 + \sqrt{14}; x = -\sqrt{11}$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ x + 4 > 0 \\ 3 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x > -4 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < 3 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Phương trình tương đương:

$$\log_2|x-1|-\log_2(x+4)=\log_2(3-x)\Leftrightarrow \log_2|x-1|=\log_2[(3-x)(x+4)]$$

$$\Leftrightarrow |x-1|=(3-x)(x+4)\Leftrightarrow |x-1|=-x^2-x+12$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2-x+12\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x-1=-x^2-x+12 \\ x-1=x^2+x-12 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\le x\le 3 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1\pm\sqrt{14} \\ x=\pm\sqrt{11} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1+\sqrt{14} \\ x=-\sqrt{11} \end{array}\right. \to D$$

Bài 5. Nghiệm của phương trình: $3+\dfrac{1}{\log_{32}x}=\log_x\left(\dfrac{89x}{2}-\dfrac{25}{2x}\right)$

A. $\dfrac{5}{8}$ B. $\dfrac{8}{5}$ C. $\dfrac{3}{8}$ D. $\dfrac{8}{3}$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 0<x\ne 1 \\ \dfrac{89x}{2}-\dfrac{25}{2x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x\ne 1 \\ \dfrac{89x^2-25}{2x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>\dfrac{5}{\sqrt{89}}, x\ne 1$

Phương trình tương đương:

$$3+\log_x 32=\log_x\frac{89x^2-25}{2x}$$

$$\Leftrightarrow \log_x x^3+\log_x 32=\log_x\frac{89x^2-25}{2x}$$

$$\Leftrightarrow 32x^3=\frac{89x^2-25}{2x}\Leftrightarrow 64x^4-89x^2+25=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=\dfrac{25}{64} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=\pm\dfrac{5}{8} \end{array}\right. \Rightarrow x=\frac{5}{8}\to A$$

Bài 6. Nghiệm của phương trình : $\log_3\dfrac{3}{x}.\log_2 x-\log_3\dfrac{x^3}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}+\log_2\sqrt{x}$

A. $1;2$ **B.** $1;\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{8};\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ **D.** $1;\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

Lời giải:

Điều kiện : $x>0$

Phương trình tương đương:

$$(\log_3 3-\log_3 x).\log_2 x-(\log_3 x^3-\log_3\sqrt{3})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_2 x$$

$$\Leftrightarrow (1-\log_3 x).\log_2 x-\left(3\log_3 x-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_2 x$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x-\log_2 x.\log_3 x-3\log_3 x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log_2 x=0$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2 x - \log_2 x.\log_3 x - 3\log_3 x = 0$

$\Leftrightarrow \log_2 x - 2\log_2 x.\log_3 x - 6\log_3 x = 0$

$\Leftrightarrow \log_2 x - 2\log_2 x.\log_3 x - \frac{6\log_2 x}{\log_2 3} = 0$

$\Leftrightarrow \log_2 x.[1 - 2\log_3 x - 6\log_3 2] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 0 \\ \log_3 x = \frac{1}{2} - 3\log_3 2 = \log_3 \frac{\sqrt{3}}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{\sqrt{3}}{8}(tm) \end{array}\right. \rightarrow \text{D}$$

Bài 7*. Số nghiệm của phương trình: $\log_{3x+7}(4x^2+12x+9) + \log_{2x+3}(6x^2+23x+21) = 4$

A. 0 B.1 C.2 D.4

Gợi ý:

Điều kiện : $\begin{cases} 3x+7>0 \\ 3x+7 \neq 1 \\ 6x^2+23x+21=0 \end{cases}$

PT $\Leftrightarrow \log_{3x+7}(2x+3)^2 + \log_{2x+3}(2x+3)(3x+7) = 4$

$\Leftrightarrow 2\log_{3x+7}(2x+3) + \log_{2x+3}(3x+7) = 3$

$\Leftrightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0 \quad \left(\log_{3x+7}(2x+3) = t > 0\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \Rightarrow 3x+7 = 2x+3 \rightarrow x = -4 \\ t = \frac{1}{2} \Rightarrow 3x+7 = \sqrt{2x+3}(\text{loai}) \end{array}\right. \rightarrow B$$

Bài 8*. Số nghiệm của phương trình : $\log_4\left(x-\sqrt{x^2-1}\right).\log_5\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \log_{20}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$

A.0 B.1 C.2 D.3

Lời giải:

Điều kiện : $\begin{cases} x-\sqrt{x^2-1}>0 \\ x+\sqrt{x^2-1}>0 \Leftrightarrow x \geq 1 \\ x^2-1>0 \end{cases}$

Phương trình tương đương:

$\log_4 20.\log_{20}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right).\log_5\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \log_{20}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \log_{20}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left[\log_4 20.\log_5\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) - 1\right] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{20}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=0 \\ \log_4 20.\log_5\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\sqrt{x^2-1}=1 \\ \log_5\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_{20}4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2-1}=x-1 \\ x+\sqrt{x^2-1}=5^{\log_{20}4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1\ge 0 \\ x^2-1=x^2-2x+1 \end{cases} \\ \sqrt{x^2-1}=5^{\log_{20}4}-x \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 1 \\ x=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 5^{\log_{20}4}=t \\ x^2+1=t^2-2tx+x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 2tx=a^2-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{1}{2t}\left(t^2-1\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{1}{2.5^{\log_{20}4}}\left(25^{\log_{20}4}-1\right) \end{array}\right.(tm)\to \text{C}$$

Bài 9*. Nghiệm của phương trình $\log_3\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\log_5\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\log_{15}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$ là:

A. $x=1;x=\dfrac{1}{2}\left(5^{\log_5 3}+5^{-\log_{15}3}\right)$ B. $x=1;x=\dfrac{1}{2}\left(5^{\log_{15}3}+5^{-\log_5 3}\right)$

C. $x=1;x=\dfrac{1}{2}\left(5^{\log_{15}3}+5^{\log_{15}3}\right)$ D. $x=1;x=\dfrac{1}{2}\left(5^{\log_{15}3}+5^{-\log_{15}3}\right)$

Lời giải:

Đk: $\begin{cases} x^2-1\ge 0 \\ x-\sqrt{x^2-1}>0 \Leftrightarrow x\ge 1. \\ x+\sqrt{x^2+1}>0 \end{cases}$

Nhận thấy $\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=1$ nên ta có:

$$PT \Leftrightarrow \log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{-1}\log_5\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_{15}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\log_5\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_{15}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

Sử dụng phép đổi biến cơ số ta có:

$$\log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_3 15.\log_{15}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_3 15.\log_{15}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

Khi đó phương trình được viết dưới dạng:

$$\log_3 15.\log_{15}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).\log_5 15.\log_{15}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_{15}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\log_{15}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=0 & (1)\\ \log_3 15.\log_5 15.\log_{15}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=1 & (2)\end{array}\right.$$

Giải (1):

$(1)\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2-1}=1\Leftrightarrow\sqrt{x^2-1}=1-x\Leftrightarrow x=1$

Giải (2):

$$(2)\Leftrightarrow\log_3 15.\log_5\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow\log_5\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_{15}3$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2-1}=5^{\log_{15}3}$$

Ta có:

$$\begin{cases}x+\sqrt{x^2-1}=5^{\log_{15}3}\\ x-\sqrt{x^2-1}=5^{-\log_{15}3}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\left(5^{\log_{15}3}+5^{-\log_{15}3}\right)$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=1;x=\frac{1}{2}\left(5^{\log_{15}3}+5^{-\log_{15}3}\right)\to D$.

Bài 10*. Nghiệm của phương trình: $\frac{3}{2}\log_{1/4}(x+2)^2-3=\log_{1/4}(4-x)^3+\log_{1/4}(x+6)^3$

A. $x=2;x=1+\sqrt{33}$ B. $x=2;x=2-\sqrt{33}$ C. $x=3;x=1-\sqrt{33}$ D. $x=2;x=1-\sqrt{33}$

Lời giải:

Đk : $-6<x<4;x\neq-2$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{3}{2}\log_{1/4}(x+2)^2-3=\log_{1/4}(4-x)^3+\log_{1/4}(x+6)^3$$

$$\Leftrightarrow-\frac{3}{2}\log_2|x+2|-3=-\frac{3}{2}\log_2(4-x)-\frac{3}{2}\log_2(x+6)$$

$$\Leftrightarrow\frac{3}{2}\left(-\log_2|x+2|+\log_2(4-x)+\log_2(x+6)\right)=3$$

$$\Leftrightarrow\log_2|x+2|-\log_2(4-x)-\log_2(x+6)=-2$$

Nếu $-6<x<-2$ phương trình (*) tương đương với:

$$\log_2(-x-2)-\log_2(4-x)-\log_2(x+6)=-2$$
$$\Leftrightarrow \log_2\frac{-x-2}{(4-x)(x+6)}=-2$$
$$\Leftrightarrow \frac{-x-2}{(4-x)(x+6)}=-\frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow -4x-8=\left(-x^2-2x+24\right)$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x-32=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{33}\,(loai) \\ x=1-\sqrt{33} \end{array}\right.$$

Nếu $-2<x<6$ khi đó phương trình (*) tương đương với

$$\Leftrightarrow \log_2(x+2)-\log_2(4-x)-\log_2(x+6)=-2$$
$$\Leftrightarrow \log_2\frac{x+2}{(4-x)(x+6)}=-2$$
$$\Leftrightarrow \frac{x+2}{(4-x)(x+6)}=\frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow 4(x+2)=(4-x)(x+6)$$
$$\Leftrightarrow x^2+6x-16=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-8\,(loai) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=2; x=1-\sqrt{33} \to D$

Bài 11. Tổng các nghiệm của phương trình: $x^{\log_9 x-2}=3^{3(\log_9 x-1)}$

A. 15 B.452 C.732 D.3

Lời giải:

$$x^{\log_9 x-2}=3^{3(\log_9 x-1)}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ (\log_9 x-2)\log_9 x=\frac{1}{2}\left[3(\log_9 x-1)\right] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ 2\log^2{}_9 x-7\log_9 x+3=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ \left[\begin{array}{l} \log_9 x=\frac{1}{2} \\ \log_9 x=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=9^3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=9^3 \end{array}\right. \to C$$

Bài 12. Tích các nghiệm phương trình: $(x-2)^{\log_2 4(x-2)}=4(x-2)^3$

A.3 B. 9 C. 12 D. 15

Lời giải:

TXĐ: x > 2.

$(x-2)^{\log_2 4(x-2)} = 4(x-2)^3 \Leftrightarrow \log_2(x-2)^{\log_2 4(x-2)} = \log_2 4(x-2)^3 \Leftrightarrow \log_2 4(x-2).\log_2(x-2) = 2+3\log_2(x-2)$
$\Leftrightarrow (2+\log_2(x-2)).\log_2(x-2) = 2+3\log_2(x-2)$

$$t = \log_2(x-2) \Rightarrow (2+t)t = 2+3t \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=\dfrac{1}{2} \\ x-2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{2} \\ x=6 \end{array}\right. \rightarrow D$$

Bài 13. Tính $\log_5 a$ với a là nghiệm phương trình: $5^{3-\log_5 x} = 25x$

A.0,5 B.1 C.1,5 D.2

Lời giải:

TXĐ: x > 0.

$$5^{3-\log_5 x} = 25x \Leftrightarrow \log_5 5^{3-\log_5 x} = \log_5 25x \Leftrightarrow 3-\log_5 x = 2+\log_5 x \Leftrightarrow \log_5 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{5} \rightarrow A$$

Bài 14. Số nghiệm của phương trình: $x^{-6}.3^{-\log_x 3} = 3^{-5}$

A.0 B.1 C.2 D.3

Lời giải:

TXĐ: x > 0, x khác 1.

$$x^{-6}.3^{-\log_x 3} = 3^{-5} \Leftrightarrow \log_3(x^{-6}.3^{-\log_x 3}) = \log_3 3^{-5} \Leftrightarrow -6\log_3 x - \log_x 3 = -5 \Leftrightarrow -6\log_3 x - \frac{1}{\log_3 x} = -5$$

$$\Leftrightarrow 6(\log_3 x)^2 - 5\log_3 x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = \dfrac{1}{2} \\ \log_3 x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{3} \\ x=\sqrt[3]{3} \end{array}\right. \rightarrow C$$

Bài 15. Nghiệm của phương trình $3^{\log_2 x} + x^{\log_2 3} = 6$ (*)

A.0 B.1 C.2 D.3

Lời giải:

TXĐ x > 0.

$$t = \log_2 x \Rightarrow x = 2^t \Rightarrow (*): 3^t + (2^t)^{\log_2 3} = 6 \Leftrightarrow 3^t + (2^{\log_2 3})^t = 6 \Leftrightarrow 2.3^t = 6 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow x = 2 \rightarrow C$$

Bài 16. Tính $\log_4 a$ biết a là nghiệm của phương trình $x + x^{\log_2 3} = x^{\log_2 5}$ (*)

A.0,5 B.1 C.2 D.3

Lời giải:

TXĐ x > 0, đặt $t = \log_2 x \Rightarrow x = 2^t$

$\Rightarrow (*): 2^t + (2^t)^{\log_2 3} = (2^t)^{\log_2 5} \Leftrightarrow 2^t + 3^t = 5^t \Leftrightarrow (\frac{2}{5})^t + (\frac{3}{5})^t = 1 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow x = 2 \rightarrow A$

Bài 17. Nghiệm của phương trình $\log_3(3^x - 1)\log_3(3^{x+1} - 3) = 6$

A. $\left[\begin{array}{l}\log_3 \frac{28}{27}\\ \log_3 11\end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l}\log_3 \frac{28}{27}\\ \log_3 9\end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l}\log_3 \frac{28}{27}\\ \log_3 10\end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l}\log_3 \frac{27}{28}\\ \log_3 10\end{array}\right.$

Lời giải:

$\log_3(3^x - 1)\log_3(3^{x+1} - 3) = 6 \Leftrightarrow \log_3(3^x - 1)\left[1 + \log_3(3^x - 1)\right] = 6$

$t = \log_3(3^x - 1) \Rightarrow t(t+1) = 6 \Leftrightarrow t_1 = -3; t_2 = 2 \Rightarrow x_1 = \log_3 \frac{28}{27}; x_2 = \log_3 10 \rightarrow C$

Bài 18. Số nghiệm của phương trình: $\log_{\frac{x}{2}} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x}\sqrt{x} = 0.$

A.0 B.1 C.2 D.3

Lời giải:

- Điều kiện: $x > 0; x \neq 2; x \neq \frac{1}{4}; x \neq \frac{1}{16}.$

Dễ thấy x = 1 là một nghiệm của phương trình đã cho

- Với $x \neq 1$. Đặt $t = \log_x 2$ và biến đổi phương trình về dạng

$\frac{2}{1-t} - \frac{42}{4t+1} + \frac{20}{2t+1} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}; t = -2 \Rightarrow x = 4; x = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow C$

Bài 19. Tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{5}{x}} 5 + \log_5 25x = 3$ (*)

A.6 B.16 C.26 D.36

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 5 \end{cases}$ Đặt: $t = \log_5 x \Rightarrow (*): \dfrac{1}{1-t} + (t+2) = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 25 \end{array}\right. \to C$

Bài 20. Nghiệm của phương trình : $\log_x 2 + 2\log_{2x} 4 = \log_{\sqrt{2x}} 8$

A.0 B.1 C.2 D.3

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq \left\{\dfrac{1}{2}; 1\right\} \end{cases}$

$\log_x 2 + 2\log_{2x} 4 = \log_{\sqrt{2x}} 8 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_2 x} + \dfrac{4}{1+\log_2 x} = \dfrac{6}{1+\log_2 x}$ (*)

Đặt: $t = \log_2 x \Rightarrow (*): \dfrac{1}{t} + \dfrac{4}{t+1} = \dfrac{6}{t+1} \Leftrightarrow 2t = t+1 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow x = 2 \to C$

Bất phương trình Logarit:

Ví dụ 1: Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_{\frac{1}{2}}(4^x+4) \geq \log_{\frac{1}{2}}(2^{2x+1} - 3.2^x)$

A. $x \geq 2$ B. $x < 2$ C. $\left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq -1 \end{array}\right.$ D. $-1 \leq x \leq 2$

Lời giải:

Tự Luận

Bất phương trình tương đương với:

$\begin{cases} 2^{2x+1} - 3.2^x > 0 \\ 4^x + 4 \leq 2^{2x+1} - 3.2^x \end{cases} \Leftrightarrow 0 < 4^x + 4 \leq 2.4^x - 3.2^x$

$\Leftrightarrow 4^x - 3.2^x - 4 = 0$

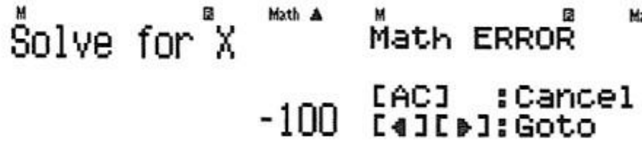
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x \leq -1 (loai) \\ 2^x \geq 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \geq 2$

Trắc nghiệm các em làm như sau: Các em sẽ thử đáp án

Đầu tiên ta thử với $x \geq 2$ thì chọn $x = 100$

Bước 1: Nhập biểu thức: $\log_{\frac{1}{2}}(4^x+4) - \log_{\frac{1}{2}}(2^{2x+1} - 3.2^x)$

Vậy A hoặc C đúng thử tiếp với $x = -100$



Vậy loại C nên chọn A.

Ví dụ 2: Nghiệm của bất phương trình: $\log_{\frac{\pi}{4}}\left[\log_2\left(x+\sqrt{2x^2-x}\right)\right]<0$ là:

A. $-4<x<1$ B. $\left[\begin{array}{l} x<-3 \\ x>1 \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} x<-4 \\ x>2 \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} x<-4 \\ x>1 \end{array}\right.$

Lời giải:

Tự luận

Bất phương trình tương đương với:

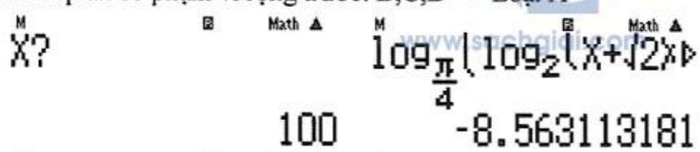
$$\begin{cases} x+\sqrt{2x^2-x}>0 \\ \log_2(x+\sqrt{2x^2-x})>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\sqrt{2x^2-x}>0 \\ x+\sqrt{2x^2-x}>2 \end{cases} \Leftrightarrow x+\sqrt{2x^2-x}>2$$

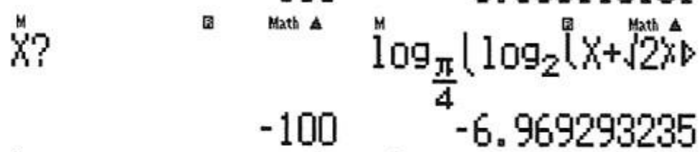
$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-x}>2-x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x<0 \\ 2x^2-x\ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2-x\ge 0 \\ 2x^2-x>x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x\le 0 \vee x\ge 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x\le 2 \\ x<-4 \vee x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-4 \\ x>1 \end{array}\right.$$

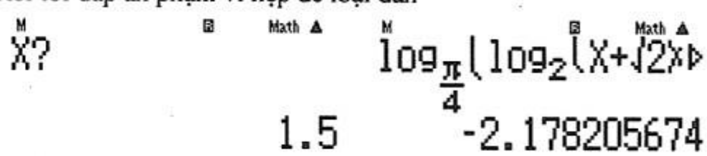
Trắc nghiệm : Ví dụ này các em cũng làm tương tự

Xét đáp án có phạm vi rộng trước: B,C,D => Loại A

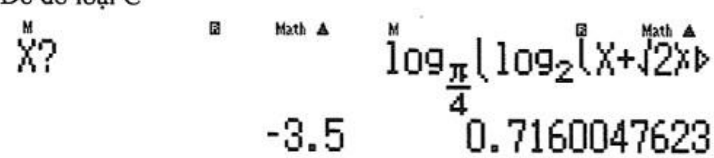




Rồi tới đáp án phạm vi hẹp để loại dần



Do đó loại C



Loại tiếp B.Vậy chọn D

Ví dụ 3. Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_{0,7}\left(\log_6\frac{x^2+x}{x+4}\right)<0$

A. $\left[\begin{array}{l}-4<x<-3 \\ x>9\end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l}-4<x<-3 \\ x>8\end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l}-5<x<-3 \\ x>8\end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l}-5<x<-3 \\ x>0\end{array}\right.$

Lời giải:

Bất phương trình tương đương với:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{x+4}>0 \\ \log_6\dfrac{x^2+x}{x+4}>1\end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x+4}>6 \Leftrightarrow \frac{(x+3)(x-8)}{x+4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-4<x<-3 \\ x>8\end{array}\right.$$

Ví dụ 4 .Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x^2-3x+2}{x}\geq 0$

A. $\left[\begin{array}{l}2-\sqrt{2}\leq x<2 \\ 2<x\leq 2+\sqrt{2}\end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l}2-\sqrt{2}\leq x<1 \\ -2<x\leq 2+\sqrt{2}\end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l}2-\sqrt{2}\leq x<1 \\ 2<x\leq 2+\sqrt{2}\end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l}2-\sqrt{2}\leq x<1 \\ -2<x\leq 2-\sqrt{2}\end{array}\right.$

Lời giải:

Bất phương trình tương đương với:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x}>0 \\ \dfrac{x^2-3x+2}{x}\leq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<x<1 \vee x>2 \\ \dfrac{x^2-4x+2}{x}\leq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}0<x<1 \\ x>2\end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l}x<0 \\ 2-\sqrt{2}\leq x\leq 2+\sqrt{2}\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2-\sqrt{2}\leq x<1 \\ 2<x\leq 2+\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Bài tập tự luyện

Bài 1: Tìm nghiệm của bất phương trình : $\left(2^x+5.2^{-x}\right)^{2\log_2 x-\log_2(x+6)}>1$ (*)

A. $x\geq 3$ B. $x<3$ C. $\left[\begin{array}{l}x\geq 3 \\ x\leq -1\end{array}\right.$ D. $x>3$

Lời giải:

Điều kiện: $\begin{cases}x>0 \\ x+6>0\end{cases} \Leftrightarrow x>0$

Do $2^x+5.2^{-x}\geq 2\sqrt{5.2^x.2^{-x}}>1$

$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow 2\log_2 x-\log_2(x+6)>\log_{(2^x+5.2^{-x})}1=0$

$\Leftrightarrow \log_2 x^2>\log_2(x+6) \Leftrightarrow x^2>x+6 \Leftrightarrow x^2-x-6>0 \Leftrightarrow x<-2 \cup x>3$

Kết hợp điều kiện: $x>3$

Bài 2: Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_3\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3)<1$ (*)

A. $\left[\begin{array}{l}\frac{5\sqrt{2}}{4}<x<2\\ -2<x<\frac{5\sqrt{2}}{4}\end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l}-\frac{5\sqrt{2}}{4}<x<2\\ 0<x<\frac{5\sqrt{2}}{4}\end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l}\frac{5\sqrt{2}}{4}<x<2\\ -2<x<-\frac{5\sqrt{2}}{4}\end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l}-\frac{5\sqrt{2}}{4}<x<2\\ -2<x<-\frac{5\sqrt{2}}{4}\end{array}\right.$

Lời giải:

$$\log_3 \log_{\frac{1}{2}}(x^2-3)<1 \Leftrightarrow 0<\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3)<3 \Leftrightarrow \frac{1}{8}<x^2-3<1$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{8}<x^2<4 \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{2}}{4}<|x|<2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{5\sqrt{2}}{4}<x<2\\ -2<x<-\frac{5\sqrt{2}}{4}\end{array}\right.$$

Bài 3: Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_{\frac{1}{3}}\frac{4x+6}{x}\geq 0$

A. $-2\leq x<-\frac{3}{2}$ B. $-2\leq x<\frac{3}{2}$ C. $-2\leq x<-1$ D. $-2\leq x<0$

Lời giải:

$$\log_{\frac{1}{3}}\frac{4x+6}{x}\geq 0 \Leftrightarrow 0<\frac{4x+6}{x}\leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>0\\ x<-\frac{3}{2}\end{array}\right.\\ -1\leq x<0\end{cases} \Leftrightarrow -2\leq x<-\frac{3}{2}$$

Bài 4: Tìm nghiệm của bất phương trình : $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}^2\left(\frac{2x}{4-x}\right)-4}\leq\sqrt{5}$

A. $\left[\begin{array}{l}-\frac{8}{3}\leq x\leq\frac{16}{5}\\ -\frac{4}{17}\leq x\leq\frac{4}{9}\end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l}\frac{8}{3}\leq x\leq\frac{16}{5}\\ \frac{4}{17}\leq x\leq\frac{4}{9}\end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l}-\frac{8}{3}\leq x\leq\frac{16}{5}\\ \frac{4}{17}\leq x\leq\frac{4}{9}\end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l}\frac{8}{3}\leq x\leq\frac{16}{5}\\ -\frac{4}{17}\leq x\leq\frac{4}{9}\end{array}\right.$

Lời giải:

Bất phương trình tương đương với:

$$\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}^2\frac{2x}{4-x}-4\geq 0\\ \log_{\frac{1}{2}}^2\frac{2x}{4-x}\leq 9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3\leq\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x}{4-x}\leq -2\\ 2\leq\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x}{4-x}\leq 3\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4\leq\frac{2x}{4-x}\leq 8\\ \frac{1}{8}\leq\frac{2x}{4-x}\leq\frac{1}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{8}{3}\leq x\leq\frac{16}{5}\\ \frac{4}{17}\leq x\leq\frac{4}{9}\end{array}\right.$$

Bài 5: Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_{x(3-x)}(3-x)>1$

A. $\left[\begin{array}{l}\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<x<1\\ x>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l}\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<x<1\\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<x<3\end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l}\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<x<1\\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}<x<3\end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l}\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<x<2\\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}<x<1\end{array}\right.$

Lời giải:

Điều kiện : $\begin{cases}3-x>0\\ x(3-x)>0, x(3-x)\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<x<3\\ x^2-3x+1\neq 0\end{cases}$

Bất phương trình tương đương với:

$1-\log_{x(3-x)}(3-x)<0$

$\Leftrightarrow \log_{x(3-x)}x(3-x)-\log_{x(3-x)}(3-x)<0$

$\Leftrightarrow \log_{x(3-x)}x<0$

$\Leftrightarrow \left[x(3-x)-1\right](x-1)<0$

$\Leftrightarrow (x^2-3x+1)(x-1)>0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<x<1\\ x>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện được : $\left[\begin{array}{l}\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<x<1\\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}<x<3\end{array}\right.$

Bài 6: Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}2\leq\log_{\sqrt{x+1}}2$

A. $\dfrac{-3-2\sqrt{3}}{3}\leq x\leq\dfrac{-3+2\sqrt{3}}{3}$ B. $\left[\begin{array}{l}\dfrac{-3-2\sqrt{3}}{3}<x<1\\ \dfrac{-3+2\sqrt{3}}{3}<x<3\end{array}\right.$ C. $\dfrac{3-2\sqrt{3}}{3}\leq x\leq\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$ D. $\left[\begin{array}{l}\dfrac{-3-2\sqrt{3}}{3}<x<2\\ \dfrac{-3+2\sqrt{3}}{3}<x<1\end{array}\right.$

Lời giải:

Điều kiện : $\begin{cases} x+2\geq 0 \\ x\geq 0 \\ x+1\geq 0 \\ \sqrt{x+2}-\sqrt{x}>0,\neq 1 \\ \sqrt{x+1}>0,\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq \dfrac{1}{4} \end{cases} (*)$

Bất phương trình tương đương với:

$$\frac{1}{\log_2\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)} \leq \frac{1}{\log_2\sqrt{x+1}}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right) \geq \log_2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \log_2\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)-\log_2\sqrt{x+1}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}-\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x+2\geq x+x+1+2\sqrt{x(x+1)} \Leftrightarrow 1-x\geq 2\sqrt{x(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x\geq 0 \\ (1-x)^2\geq 4x(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 1 \\ 3x^2+6x-1\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 1 \\ \dfrac{-3-2\sqrt{3}}{3}\leq x\leq \dfrac{-3+2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-3-2\sqrt{3}}{3}\leq x\leq \frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$$

Bài 7. Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_{\frac{1}{2}}(4^x+4)\geq \log_{\frac{1}{2}}(2^{2x+1}-3.2^x)$

A. $x\geq 2$ B. $x<2$ C. $\left[\begin{array}{l} x\geq 2 \\ x\leq -1 \end{array}\right.$ D. $x>2$

Lời giải:

Bất phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} 2^{2x+1}-3.2^x>0 \\ 4^x+4\leq 2^{2x+1}-3.2^x \end{cases} \Leftrightarrow 0<4^x+4\leq 2.4^x-3.2^x$$

$$\Leftrightarrow 4^x-3.2^x-4=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x\leq -1 (loai) \\ 2^x\geq 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\geq 2$$

Bài 8. Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_{\frac{\pi}{4}}\left[\log_2\left(x+\sqrt{2x^2-x}\right)\right]<0$

A. $-1\leq x\leq 4$ B. $\left[\begin{array}{l} x<-4 \\ x>1 \end{array}\right.$ C. $1\leq x\leq 4$ D. $\left[\begin{array}{l} x<4 \\ x>-1 \end{array}\right.$

Lời giải:

Bất phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} x+\sqrt{2x^2-x}>0 \\ \log_2(x+\sqrt{2x^2-x})>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\sqrt{2x^2-x}>0 \\ x+\sqrt{2x^2-x}>2 \end{cases} \Leftrightarrow x+\sqrt{2x^2-x}>2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-x}>2-x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x<0 \\ 2x^2-x\ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2-x\ge 0 \\ 2x^2-x>x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x\le 0\vee x\ge 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x\le 2 \\ x<-4\vee x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-4 \\ x>1 \end{array}\right.$$

Bài 9 .Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_{0,7}\left(\log_6 \dfrac{x^2+x}{x+4}\right)<0$

A. $-4\le x\le 3$ B. $\left[\begin{array}{l} -4<x<3 \\ x>8 \end{array}\right.$ C. $-4\le x\le 8$ D. $\left[\begin{array}{l} -4<x<-3 \\ x>8 \end{array}\right.$

Lời giải:

Bất phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+x}{x+4}>0 \\ \log_6 \dfrac{x^2+x}{x+4}>1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x+4}>6 \Leftrightarrow \frac{(x+3)(x-8)}{x+4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4<x<-3 \\ x>8 \end{array}\right.$$

Bài 10 .Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x^2-3x+2}{x}\ge 0$

A. $2-\sqrt{2}\le x<1$ B. $\left[\begin{array}{l} 2-\sqrt{2}\le x<1 \\ 2<x\le 2+\sqrt{2} \end{array}\right.$ C. $2-\sqrt{2}\le x\le 2+\sqrt{2}$ D. $\left[\begin{array}{l} 2-\sqrt{2}\le x<1 \\ -2<x\le 2+\sqrt{2} \end{array}\right.$

Lời giải:

Bất phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x}>0 \\ \dfrac{x^2-3x+2}{x}\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1\vee x>2 \\ \dfrac{x^2-4x+2}{x}\le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 0<x<1 \\ x>2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x<0 \\ 2-\sqrt{2}\le x\le 2+\sqrt{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-\sqrt{2}\le x<1 \\ 2<x\le 2+\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Bài 11: Tìm nghiệm của bất phương trình : $1+log_4(x+1)^2\ge 2\log_2\sqrt{x+3}+\log_8(3-x)^3$

A. $-3<x\le 1+2\sqrt{3}$ B. $\left[\begin{array}{l} -3<x\le 1-2\sqrt{3} \\ -1+2\sqrt{2}\le x<3 \end{array}\right.$ C. $-3<x\le 1-2\sqrt{3}$ D. $\left[\begin{array}{l} -3\le x\le 1-2\sqrt{3} \\ -1+2\sqrt{2}\le x<3 \end{array}\right.$

Lời giải:

Điều kiện : $\begin{cases}(x+1)^2>0\\ x+3>0\\ 3-x>0\end{cases} \Leftrightarrow -3<x<-1 \cup -1<x<3$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \log_2 2|x+1| \geq \log_2(9-x^2) \Leftrightarrow 2|x+1| \geq 9-x^2$

+ Với $-3<x<-1$, *ta có* : $2(-x-1)\geq 9-x^2 \Leftrightarrow x^2-2x-11\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 1-2\sqrt{3} \cup x\geq 1+2\sqrt{3}$

Kết hợp điều kiện : $-3<x\leq 1-2\sqrt{3}$

+ Với $-1<x<3$, *ta có* $2(x+1)\geq 9-x^2$

$\Leftrightarrow x^2+2x-7\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -1-2\sqrt{2} \cup x\geq -1+2\sqrt{2}$

Kết hợp với $-1<x<3$ ta được $-1+2\sqrt{2}\leq x<3$

Đáp số : $\left[\begin{array}{l}-3<x\leq 1-2\sqrt{3}\\ -1+2\sqrt{2}\leq x<3\end{array}\right.$

Giải các bất phương trình mũ sau:

Ví dụ 1. Tìm nghiệm của bất phương trình : $3^{2-x}+6.3^{1-x}>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+x-2}-3}$

A. $-2<x\leq 3$ B. $\left[\begin{array}{l}x\leq -2\\ x>2\end{array}\right.$ C. $-2<x\leq 2$ D. $\left[\begin{array}{l}x\leq -2\\ x>3\end{array}\right.$

Lời giải:

Điều kiện: $x^2+x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -2 \cup x\geq 1$

Bất phương trình $\Leftrightarrow 3.3^{1-x}+6.3^{1-x}>3^{3-\sqrt{x^2+x-2}}$

$\Leftrightarrow 9.3^{1-x}>3^{3-\sqrt{x^2+x-2}}$

$\Leftrightarrow 3^{3-x}>3^{3-\sqrt{x^2+x-2}} \Leftrightarrow 3-x>3-\sqrt{x^2+x-2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x-2}>x$

+ Với $x\leq -2$ thì bất phương trình luôn vô nghiệm

+ Với $x\geq 1$, bình phương 2 vế ta có: $x^2+x-2>x^2$

$\Leftrightarrow x-2>0 \Leftrightarrow x>2$

Đáp số: $\left[\begin{array}{l}x\leq -2\\ x>2\end{array}\right.$

Trắc nghiệm: Các em vẫn dùng chức năng CALC để tính giá trị biểu thức xét âm dương với các giá trị khác nhau ở 4 đáp án.

Ví dụ 2. Tìm nghiệm của bất phương trình : $2^{\sqrt{x^2-x-6}}<13.2^{x-1}-3.2^{x+1}$

A. $3\leq x<7$ B. $\left[\begin{array}{l}x\leq 3\\ x\geq 7\end{array}\right.$ C. $-3\leq x<7$ D. $\left[\begin{array}{l}x\leq -3\\ x\geq 7\end{array}\right.$

Lời giải:

Điều kiện: $x^2-x-6\ge 0 \Leftrightarrow x\le -2\cup x\ge 3$

Bất phương trình $\Leftrightarrow 2^{\sqrt{x^2-x-6}}<\frac{13.2^x}{2}-6.2^x$

$\Leftrightarrow 2^{1+\sqrt{x^2-x-6}}<2^x \Leftrightarrow 1+\sqrt{x^2-x-6}<x$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-6}<x-1$

+ Với $x\le -2$ thì bất phương trình vô nghiệm

+ Với $x\ge 3$, bình phương 2 vế ta có: $x^2-x-6<x^2-2x+1 \Leftrightarrow x<7$

Kết hợp với $x\ge 3$, ta có: $3\le x<7$

Ví dụ 3. Tìm nghiệm của bất phương trình $\left(x^2-2x+3\right)^{\log_{0,5}\left(\frac{2x-3}{x+1}\right)}>1$

A. $3\le x<7$ B. $\left[\begin{array}{l}x\le 3\\ x\ge 7\end{array}\right.$ C. $-3\le x<7$ D. $\left[\begin{array}{l}x\le -3\\ x\ge 7\end{array}\right.$

Lời giải:

Điều kiện : $\begin{cases}\frac{2x-3}{x+1}>0\\ x\ne -1\end{cases} \Leftrightarrow x<-1\cup x>\frac{3}{2}$

Ta có cơ số : $x^2-2x+3=(x+1)^2+2>1$

Do đó bất phương trình $\Leftrightarrow \log_{0,5}\left(\frac{2x-3}{x+1}\right)>0$

$\Leftrightarrow \frac{2x-3}{x+1}<1 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x+1}-1<0$

$\Leftrightarrow \frac{x-4}{x+1}<0 \Leftrightarrow -1<x<4$

Kết hợp điều kiện : $\frac{3}{2}<x<4$

Ví dụ 4. Tìm nghiệm của bất phương trình : $(0,25)^{\sqrt{x^2-2x}}\ge (0,125)^{\frac{2}{3}(2|x-1|-x)}$

A. $x\le 0$ B. $x=2$ C. $x\le 2\cup x=0$ D. $x\le 2$

Lời giải:

Điều kiện : $x^2-2x\ge 0 \Leftrightarrow x\le 0\cup x\ge 2$

Bất phương trình . $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2\sqrt{x^2-2x}}\ge \left(\frac{1}{2}\right)^{2(2|x-1|-x)}$.

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-2x}\le 2(2|x-1|-x)$

+ Với $x\ge 2$, ta có $2\sqrt{x^2-2x}\le 2(2(x-1)-x)$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-2x}\le 2(x-2)$

$\Leftrightarrow x^2-2x\le x^2-4x+4$

$\Leftrightarrow 2x \le 4 \Leftrightarrow x \le 2$, kết hợp với $x \ge 2 \Rightarrow x = 2$ là nghiệm

+ Với $x \le 0$, ta có : $2\sqrt{x^2-2x} \le 2\left(2(1-x)-x\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x} \le 2-3x \Leftrightarrow x^2-2x \le 4-12x+9x^2$

$\Leftrightarrow 8x^2-10x+4 \ge 0$ (luôn thỏa mãn)

Đáp số : $x \le 0 \cup x = 2$

Bài tập rèn luyện

Bài 1. Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{3^x-4^x}{3^{x+1}-4^{x+1}} < \dfrac{1}{7}$

A. $-1 < x < 1$ B. $\left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>1 \end{array}\right.$ C. $0 < x < 1$ D. $x \ge 1$

Lời giải:

$3^{x+1} \ne 4^{x+1} \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{4}\right)^{x+1} \ne 1 \Leftrightarrow x+1 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne -1$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{7.3^x-7.4^x}{3.3^x-4.4^x} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{4.3^x-3.4^x}{3.3^x-4.4^x} < 0$

$\Leftrightarrow \left(4.3^x-3.4^x\right)\left(3.3^x-4.4^x\right) < 0$

$\Leftrightarrow \left[\left(\dfrac{3}{4}\right)^x - \dfrac{3}{4}\right]\left[\left(\dfrac{3}{4}\right)^x - \dfrac{4}{3}\right] < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{4} < \left(\dfrac{3}{4}\right)^x < \dfrac{4}{3} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-1}$

$\Leftrightarrow -1 < x < 1$

Bài 2. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(5+2\sqrt{6}\right)^{\frac{x-1}{x+2}} > \left(5-2\sqrt{6}\right)^3$.

A. $-\dfrac{5}{4} < x < 2$ B. $\left[\begin{array}{l} x<-2 \\ x>-\dfrac{5}{4} \end{array}\right.$ C. $\dfrac{5}{4} < x < 2$ D. $\left[\begin{array}{l} x<-2 \\ x>\dfrac{5}{4} \end{array}\right.$

Lời giải:

Điều kiện : $x \ne -2$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \left(5+2\sqrt{6}\right)^{\frac{x-1}{x+2}} > \left(5+2\sqrt{6}\right)^{-3} \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+2} > -3$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+2} + 3 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x+5}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ x>-\dfrac{5}{4} \end{array}\right.$

Bài 3. Tìm nghiệm của bất phương trình : $4^x > 2^{x+2} + 32$

A. $x \geq 3$ B. $x < 3$ C. $\left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq -1 \end{array}\right.$ D. $x > 3$

Lời giải:

Bất phương trình $\Leftrightarrow 4^x - 4.2^x - 32 > 0$

Đặt $2^x = t > 0$. Khi đó bất phương trình trở thành $t^2 - 4t + 32 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -4 (\text{loai}) \\ t > 8 \end{array}\right.$

Với $t > 8$, ta có : $2^x > 8 = 2^3 \Leftrightarrow x > 3$

Đáp số : $x > 3$

Bài 4. Tìm nghiệm của bất phương trình : $16^x - 20.4^x + 64 \geq 0$

A. $\left[\begin{array}{l} x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{array}\right.$ B. $1 < x < 2$ C. $\left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x > 2 \end{array}\right.$ D. $1 \leq x \leq 2$

Lời giải:

Đặt $4^x = t > 0$ thì bất phương trình trở thành : $t^2 - 20t + 64 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq 4 \\ t \geq 16 \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện $t > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < t \leq 4 \\ t \geq 16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < 4^x \leq 4 \\ 4^x \geq 16 = 4^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{array}\right.$

Bài 5. Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{8.3^x}{9.(3^x - 2^x)} \leq \dfrac{3^x + 2^x}{3^x}$

A. $\left[\begin{array}{l} x \geq \log_2 3 \\ x < 0 \end{array}\right.$ B. $0 < x < \log_2 3$ C. $\left[\begin{array}{l} x \geq \log_{\frac{3}{2}} 3 \\ x < 0 \end{array}\right.$ D. $0 \leq x \leq \log_{\frac{3}{2}} 3$

Lời giải:

Điều kiện : $3^x - 2^x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{8.\left(\frac{3}{2}\right)^x}{9\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1\right]} \leq \dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^x + 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^x}$

Đặt : $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x = t,\ 0 < t \neq 1$. Khi đó bất phương trình trở thành $\dfrac{8t}{9(t-1)} \leq \dfrac{t+1}{t}$

$$\Leftrightarrow \frac{t+1}{t} - \frac{8t}{9(t-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 9}{t(t-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \geq 3 \\ 0 < t < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^x \geq 3 \\ 0 < \left(\frac{3}{2}\right)^x < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq \log_{\frac{3}{2}} 3 \\ x < 0 \end{array}\right.$$

Bài 6. Tìm nghiệm của bất phương trình : $\left(\sqrt{5} - 1\right)^x + \left(\sqrt{5} + 1\right)^x - 2^{x + \frac{3}{2}} \leq 0$

A. $\left[\begin{array}{l} x \ge \log_{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\left(\sqrt{2}+1\right) \\ x \le \log_{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\left(\sqrt{2}-1\right) \end{array}\right.$

B. $\log_{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\left(\sqrt{2}-1\right) \le x \le \log_{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\left(\sqrt{2}+1\right)$

C. $\left[\begin{array}{l} x > \log_{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\left(\sqrt{2}+1\right) \\ x < \log_{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\left(\sqrt{2}-1\right) \end{array}\right.$

D. $\log_{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\left(\sqrt{2}-1\right) < x < \log_{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\left(\sqrt{2}+1\right)$

Lời giải:

Bất phương trình $\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x - 2\sqrt{2} \le 0$

Đặt $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x = t,\ t > 0$ khi đó $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^x = \frac{1}{t}$

Bất phương trình trở thành $t + \frac{1}{t} - 2\sqrt{2} \le 0 \Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 \le 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2} - 1 \le t \le \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} - 1 \le \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x \le \sqrt{2} + 1$

$\Leftrightarrow \log_{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\left(\sqrt{2}-1\right) \le x \le \log_{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\left(\sqrt{2}+1\right)$

Bài 7. Tìm nghiệm của bất phương trình : $4^x - 3.2^{x+\sqrt{x^2-2x-3}} - 4^{1+\sqrt{x^2-2x-3}} > 0$

A. $\left[\begin{array}{l} x \ge \frac{7}{2} \\ x \le 3 \end{array}\right.$ B. $3 \le x < \frac{7}{2}$ C. $\left[\begin{array}{l} x \ge \frac{7}{2} \\ x < 3 \end{array}\right.$ D. $3 < x < \frac{7}{2}$

Lời giải:

Điều kiện : $x^2 - 2x - 3 \ge 0 \Leftrightarrow x \le -1 \cup x \ge 3$

Bất phương trình $\Leftrightarrow 4^x - 3.2^{x+\sqrt{x^2-2x-3}} - 4.4^{\sqrt{x^2-2x-3}} > 0$

$\Leftrightarrow 4^{x-\sqrt{x^2-2x-3}} - 3.2^{\sqrt{x^2-2x-3}} - 4 > 0$

Đặt $\Leftrightarrow 2^{x-\sqrt{x^2-2x-3}} = t$

Khi đó ta có bất phương trình $t^2 - 3t - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -1 \text{(loai)} \\ t > 4 \end{array}\right.$

Với t > 4 ta có $2^{x-\sqrt{x^2-2x-3}} > 4 = 2^2$

$\Leftrightarrow x-\sqrt{x^2-2x-3}>2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x-3}<x-2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2>0 \\ x^2-2x-3<(x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<\dfrac{7}{2} \end{cases}$

Kết hợp điều kiện $3 \le x < \dfrac{7}{2}$

Bài 8. Tìm nghiệm của bất phương trình : $5^{1+x^2}-5^{1-x^2}>24$

A. $x<-1 \cup x>1$ B. $x \le -1 \cup x \ge 1$ C. $x \le -1$ D. $x>1$

Lời giải: Bất phương trình $\Leftrightarrow 5.5^{x^2}-\dfrac{5}{5^{x^2}}>24$

Đặt $5^{x^2}=t$. Khi đó ta có bất phương trình $5t^2-24t-5>0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-\dfrac{1}{5} \quad \text{(loại)} \\ t>5 \end{array}\right.$ Với t > 5, ta có : $5^{x^2}>5 \Leftrightarrow x^2>1 \Leftrightarrow x<-1 \cup x>1$

Đáp số : $x<-1 \cup x>1$

Bài 9. Tìm nghiệm của bất phương trình : $5.3^{2x-1}-7.3^{x-1}+\left|3^{x+1}-1\right| \le 0$

A. $\left[\begin{array}{l} x \ge \log_3\left(\dfrac{3}{5}\right) \\ x \le \log_3\left(\dfrac{1}{5}\right) \end{array}\right.$ B. $\log_3\left(\dfrac{1}{5}\right) \le x \le \log_3\left(\dfrac{3}{5}\right)$ C. $\left[\begin{array}{l} x \ge \log_3\left(\dfrac{3}{5}\right) \\ x \le \log_3\left(\dfrac{2}{5}\right) \end{array}\right.$ D. $\log_3\left(\dfrac{2}{5}\right) \le x \le \log_3\left(\dfrac{3}{5}\right)$

Lời giải:

Bất phương trình $\Leftrightarrow 5.\dfrac{3^{2x}}{3}-7.\dfrac{3^x}{3}+\left|3.3^x-1\right| \le 0$

$\Leftrightarrow 5.3^{2x}-7.3^x+3\left|3.3^x-1\right| \le 0$

Đặt $3^x=t,\ t>0$ thay vào bất phương trình ta có : $5t^2-7t+3\,|\,3t-1\,| \le 0$

+ Với $0<t<\dfrac{1}{3}$ thì ta có :

$5t^2-7t+3(-3t+1) \le 0 \Leftrightarrow 5t^2-16t+3 \le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{5} \le t \le 3$

Kết hợp với $0<t<\dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{5} \le t < \dfrac{1}{3}$ (1)

+ Với $t \ge \dfrac{1}{3}$ thì ta có :

$5t^2-7t+3(3t-1)\le 0 \Leftrightarrow 5t^2+2t-3\le 0$

$\Leftrightarrow -1\le t\le \frac{3}{5}$ (2)

Hợp nghiệm (1) với (2) ta có : $\frac{1}{5}\le t\le \frac{3}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{5}\le 3^x\le \frac{3}{5} \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{1}{5}\right)\le x\le \log_3\left(\frac{3}{5}\right)$

Bài 10. Tìm nghiệm của bất phương trình : $3^{\frac{x+3}{5x-2}}-4\ge 5^{\frac{9x-7}{5x-2}}$

A. $\left[\begin{array}{l} x\ge \frac{7}{9} \\ x\le \frac{2}{5} \end{array}\right.$ B. $\frac{2}{5}<x\le \frac{7}{9}$ C. $\left[\begin{array}{l} x\ge \frac{7}{9} \\ x<\frac{2}{5} \end{array}\right.$ D. $\frac{2}{5}<x<\frac{7}{9}$

Lời giải: Điều kiện $x\ne \frac{2}{5}$

Bất phương trình $\Leftrightarrow 3^{\frac{x+3}{5x-2}}-4\ge 5.3^{2-\frac{x+3}{5x-2}}$

Đặt $3^{\frac{x+3}{5x-2}}=t$. Bất phương trình trở thành $t^2-4t-45\ge 0 \Rightarrow t\ge 9$ $(do\ t>0)$

$\Leftrightarrow 3^{\frac{x+3}{5x-2}}\ge 9 \Leftrightarrow \frac{x+3}{5x-2}\ge 2 \Leftrightarrow \frac{x+3}{5x-2}-2\ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{7-9x}{5x-2}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}<x\le \frac{7}{9}$

Bài 11. Tìm nghiệm của bất phương trình : $\sqrt{2^{x+3}-2}+\frac{2^x+1}{\sqrt{2}}<\sqrt{4^x+9.2^{x+1}-3}$

A. $x\ge \log_2\left(-9+\sqrt{84}\right)$ B. $\begin{cases} x\ge \log_2\left(-9+\sqrt{84}\right) \\ x\ne \log_2\left(7+\sqrt{44}\right) \end{cases}$ C. $x\ge \log_2\left(-7+\sqrt{84}\right)$ D. $x>1$

Lời giải:

Điều kiện : $\begin{cases} 2^{x+3}-2\ge 0 \\ 4^x+9.2^{x+1}-3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3\ge 1 \\ 4^x+18.2^x-3\ge 0 \Leftrightarrow 2^x\ge -9+\sqrt{84} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ x\ge \log_2\left(-9+\sqrt{84}\right) \end{cases}$

$x\ge \log_2\left(-9+\sqrt{84}\right)$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{2^{x+3}-2}\ge 0 \Rightarrow u^2=8.2^x-2 \\ v=\frac{2^x+1}{\sqrt{2}}>0 \Rightarrow v^2=\frac{1}{2}\left(4^x+2.2^x+1\right) \end{cases}$

Khi đó bất phương trình trở thành $u+v<\sqrt{2u^2+2v^2}$

$\Leftrightarrow u^2+2uv+v^2<2u^2+2v^2$

$\Leftrightarrow u^2-2uv+v^2>0 \Leftrightarrow (u-v)^2>0 \Leftrightarrow u\neq v$

$\Leftrightarrow u^2\neq v^2 \Leftrightarrow 8.2^x-2\neq \frac{1}{2}\left(4^x+2.2^x+1\right)$

$\Leftrightarrow 4^x-14.2^x+5\neq 0$

$\Leftrightarrow 2^x\neq 7\pm\sqrt{44} \Leftrightarrow x\neq \log_2\left(7\pm\sqrt{44}\right)$

Đáp số : $\begin{cases} x\geq \log_2\left(-9+\sqrt{84}\right) \\ x\neq \log_2\left(7+\sqrt{44}\right) \end{cases}$

Bài 12. Tìm nghiệm của bất phương trình : $\left(31+8\sqrt{15}\right)^x+2\left(4-\sqrt{15}\right)^x\leq 3$

A. $x<-1\cup x=0$ B. $x\leq -1\cup x\geq 0$ C. $x=0$ D. $x>0$

Lời giải:

Bất phương trình $\Leftrightarrow \left(4+\sqrt{15}\right)^{2x}+2\left(4-\sqrt{15}\right)^x\leq 3$

Đặt $\left(4+\sqrt{15}\right)^x=t \Rightarrow \left(4-\sqrt{15}\right)^x=\frac{1}{t},\ t>0$

Khi đó ta có bất phương trình $t^2+\frac{2}{t}-3\leq 0 \Leftrightarrow t^3-3t+2\leq 0$

$\Leftrightarrow (t-1)^2(t+2)\leq 0 \Leftrightarrow (t-1)^2\leq 0 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow x=0$

Bài 13. Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-2x\right)>-1$

A. $\left[\begin{array}{l} -1<x<0 \\ 2<x<3 \end{array}\right.$ B. $-1<x<4$ C. $\left[\begin{array}{l} -1<x<1 \\ 2<x<4 \end{array}\right.$ D. $2<x<4$

Lời giải:

Điều kiện : $x^2-2x>0 \Leftrightarrow x<0\cup x>2$

Bất phương trình $\Leftrightarrow x^2-2x<\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$

$\Leftrightarrow x^2-2x-3<0 \Leftrightarrow -1<x<3$

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow$ đáp số : $\left[\begin{array}{l} -1<x<0 \\ 2<x<3 \end{array}\right.$

Bài 14. Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_{\frac{1}{3}}(x+2)\leq -1$

A. $x<-1\cup x=0$ B. $x\leq -1\cup x\geq 1$ C. $x>1$ D. $x\geq 1$

Lời giải:

Điều kiện : $x>-2$

Bất phương trình $\Leftrightarrow x+2\ge\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3\Leftrightarrow x\ge 1$

Bài 15. Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x-1}{x+1}<0$

A. $x<-1\cup x>2$ B. $x<1\cup x>2$ C. $x<0\cup x>1$ D. $x\ge 2$

Lời giải:

Điều kiện : $\begin{cases}\frac{2x-1}{x+1}>0\\ x\ne -1\end{cases}\Leftrightarrow x<-1\cup x>\frac{1}{2}$

Bất phương trình $\Leftrightarrow\frac{2x-1}{x+1}>1\Leftrightarrow\frac{2x-1}{x+1}-1>0\Leftrightarrow\frac{x-2}{x+1}>0$

$\Leftrightarrow x<-1\cup x>2$

Bài 16. Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_2\left(2^x-1\right).\log_4\left(2^{x+1}-2\right)<3$

A. $\left[\begin{array}{l}x\ge\log_2 5\\ x\le\log_2\frac{9}{8}\end{array}\right.$ B. $\log_2\frac{9}{8}<x<\log_2 5$ C. $\left[\begin{array}{l}x>\log_2 5\\ x<\log_2\frac{9}{8}\end{array}\right.$ D. $\log_2\frac{9}{8}\le x\le\log_2 5$

Lời giải:

Điều kiện : $2^x>1\Leftrightarrow x>0$

Bất phương trình $\Leftrightarrow\frac{1}{2}\log_2(2^x-1).\log_2\left[2(2^x-1)\right]<3$

$\Leftrightarrow\log_2(2^x-1).\left[1+\log_2(2^x-1)\right]<6$

Đặt $\log_2(2^x-1)=t$

Khi đó ta có bất phương trình $t^2+t-6<0\Leftrightarrow -3<t<2$

$\Leftrightarrow -3<\log_2(2^x-1)<2\Leftrightarrow\frac{1}{8}<2^x-1<4$

$\Leftrightarrow\frac{9}{8}<2^x<5\Leftrightarrow\log_2\frac{9}{8}<x<\log_2 5$

Bài 17. Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_{x-1}(x^3-3x+2)+\log_{x+2}(x^2+x-2)>5$

A. $x<-2\cup x=0$ B. $x\le -2\cup x\ge 2$ C. $x>2$ D. $x\ge 2$

Lời giải:

Bất phương trình $\Leftrightarrow\log_{x-1}\left[(x-1)^2(x+2)\right]+\log_{x+2}\left[(x+2)(x-1)\right]>5$

Điều kiện : $1<x\ne 2\Leftrightarrow 1,x<2\cup x>2$

$\Rightarrow\log_{x-1}(x+2)+\log_{x+2}(x-1)-2>0$

Đặt $t=\log_{x-1}(x+2)$, thay vào bất phương trình ta có : $t+\frac{1}{t}-2>0$

$\Leftrightarrow \dfrac{t^2-2t+1}{t}>0 \Leftrightarrow \begin{cases} t\neq 1 \\ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<t<1 \\ t>1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<\log_{x-1}(x+2)<1 \\ \log_{x-1}(x+2)>1 \end{array}\right.$

+ Với $x>2$ thì ta có : $\left[\begin{array}{l} 1<x+2<x-1 \ (1) \\ x+2>x-1 \quad (2) \end{array}\right.$

(1) vô nghiệm ; (2) luôn thỏa mãn.

+ Với $1<x<2$ thì ta có : $\left[\begin{array}{l} x-1<x+2<1 \ (3) \\ x+2<x-1 \ (4) \end{array}\right.$ (vô nghiệm)

Đáp số : $x>2$

Bài 18. Tìm nghiệm của bất phương trình : $\log_{\frac{1}{3}}\log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)>\log_3\log_{\frac{1}{5}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

A. $\left[\begin{array}{l} x\geq 0 \\ x\leq \dfrac{12}{5} \end{array}\right.$ B. $0<x<\dfrac{12}{5}$ C. $\left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<\dfrac{12}{5} \end{array}\right.$ D. $0\leq x\leq \dfrac{12}{5}$

Lời giải:

Điều kiện $x>0$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \log_3\log_{\frac{1}{5}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+\log_3\log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)<0$

$\Leftrightarrow \log_3\left[\log_{\frac{1}{5}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right).\log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right]<0$

$\Leftrightarrow \log_3\left[\log_5^2\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right]<0$

$\Leftrightarrow \log_5^2\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)<1$

$-1<\log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)<1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)>-1 \\ \log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1}+x>\dfrac{1}{5} \\ \sqrt{x^2+1}+x<5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5\sqrt{x^2+1}>1-5x \\ \sqrt{x^2+1}<5-x \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<\dfrac{12}{5}$

Bài 19. Tìm nghiệm của bất phương trình : $\dfrac{\log_3(x+1)^2-\log_4(x+1)^3}{x^2-5x+6}>0$

A. $\left[\begin{array}{l} x\geq 0 \\ x\leq 6 \end{array}\right.$ B. $0<x<6$ C. $\left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<6 \end{array}\right.$ D. $0\leq x\leq 6$

Lời giải:

Điều kiện $\begin{cases}(x+1)^2>0\\(x+1)^3>0\\x^2-5x-6\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -1\\x>-1\\x\neq -1;6\end{cases}\Leftrightarrow -1<x\neq 6$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{2\log_3(x+1)-3.\log_4 3.\log_3(x+1)}{x^2-5x-6}>0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(2-3\log_4 3).\log_3(x+1)}{x^2-5x-6}>0 \Leftrightarrow \dfrac{\log_3(x+1)}{x^2-5x-6}<0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-5x-6>0\\\log_3(x+1)<0\end{cases}\\\begin{cases}x^2-5x-6<0\\\log_3(x+1)>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1,x>6\\x<0\end{cases}\Leftrightarrow x<-1 \quad \text{(loại)}\\\begin{cases}-1<x<6\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x<6\end{array}\right.$

Đáp số : $0<x<6$

Bài 20. Tìm nghiệm của bất phương trình : $\left(4^x-12.2^x+32\right).\log_2(2x-1)\leq 0$

A. $\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}<x\leq 1\\2\leq x\leq 3\end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}<x<1\\2\leq x\leq 3\end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}<x\leq 1\\2<x<3\end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}<x\leq 1\\2<x\leq 3\end{array}\right.$

Lời giải:

Điều kiện : $x>\dfrac{1}{2}$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4^x-12.2^x+32\leq 0\\\log_2(2x-1)\geq 0\end{cases}\\\begin{cases}4^x-12.2^x+32\geq 0\\\log_2(2x-1)\leq 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4\leq 2^x\leq 8\\2x-1\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow 2\leq x\leq 3\\\begin{cases}2^x\leq 4\cup 2^x\geq 8\\0<2x-1\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow \frac{1}{2}<x\leq 1\end{array}\right.$

Đáp số : $\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}<x\leq 1\\2\leq x\leq 3\end{array}\right.$

CHUYÊN ĐỀ SỐ PHỨC

Chuyên đề Số phức cung cấp cho các em kiến thức cơ bản và các dạng bài toán quen thuộc. Đồng thời cung cấp cho các em Skill dùng máy tính CASIO bổ trợ giúp giải trắc nghiệm nhanh hơn. Máy tính chỉ là "cây kiếm sắc" giúp các em giải nhanh khi các em hiểu bản chất của vấn đề☺

1.1 SỐ PHỨC CƠ BẢN

A. Kiến thức cơ bản:

1. Khái niệm chung:

- **Tập hợp** $\mathbb{C}$ là tập hợp các số phức.
- **Số *i*** là nghiệm của phương trình $x^2+1=0$ hay $i^2=-1$.
- Mỗi biểu thức dạng $a+bi$, với $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2=-1$ được gọi là **một số phức**.

  Ví dụ: $2+3i$; $-\sqrt{2}+4i$; $1+(-3)i$ (còn viết là $1-3i$); $1+\sqrt{2}i$ (còn viết là $1+i\sqrt{2}$)
- Với số phức $z=a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$):

  a là **phần thực**

  b là **phần ảo**

  i là **đơn vị ảo**.
- Mỗi số thực a được coi là một số phức với phần ảo bằng 0: $a=a+0i$.

  Mỗi số thực cũng là một số phức. Ta có $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Số phức $0+bi$ được gọi là **số thuần ảo** và viết đơn giản là bi: $bi=0+bi$.
- Đặc biệt: $i=0+1i$

  $0=0+0i$.

2. Hai số phức bằng nhau:

Hai số phức là **bằng nhau** nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.

Cho hai số phức: $z=a+bi$; $z'=a'+b'i$ ($a, b, a', b' \in \mathbb{R}$)

$$z=z' \Leftrightarrow a=a' \text{ và } b=b'$$

3. Biểu diễn hình học số phức:

Điểm M(a ; b) trong một hệ tọa độ vuông góc của mặt phẳng được gọi là **điểm biểu diễn số phức** $z=a+bi$.

- Mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức như vậy gọi là **mặt phẳng phức**.
- Gốc tọa độ O biểu diễn số 0.
- Các điểm trên trục hoành Ox biểu diễn các số thực, nên trục Ox còn gọi là **trục thực**.

- Các điểm trên trục tung Oy biểu diễn các số ảo, nên trục Oy còn gọi là **trục ảo**.

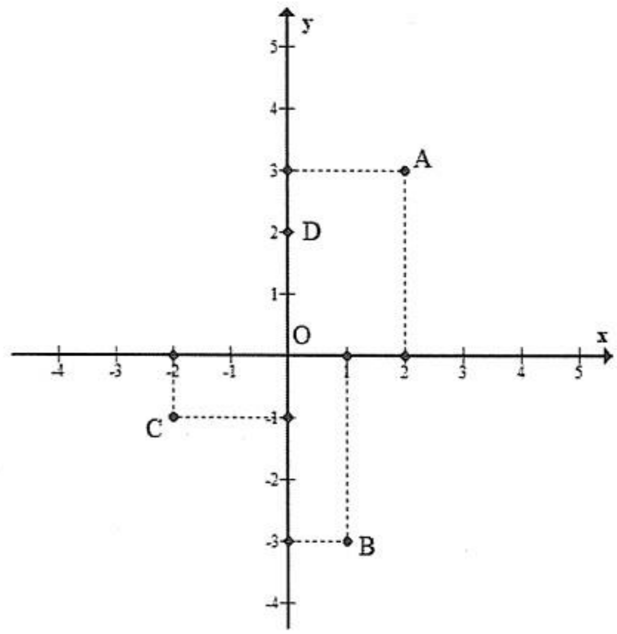
* Ví dụ:

- Điểm A biểu diễn số phức $2 + 3i$.

- Điểm B biểu diễn số phức $1 - 3i$.

- Điểm C biểu diễn số phức $-2 - 1i$.

- Điểm D biểu diễn số phức $2i$.



4. Môđun của số phức:

Môđun của số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ được kí hiệu là $|z|$.

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

5. Số phức liên hợp:

Cho số phức $z = a + bi$. Ta gọi $a - bi$ là **số phức liên hợp** của z.

Kí hiệu: $\bar{z} = a - bi$.

- Trên mặt phẳng tọa độ, các điểm biểu diễn z và $\bar{z}$ đối xứng với nhau qua trục Ox.
- Ta có: $\bar{\bar{z}} = z$; $|\bar{z}| = |z|$.

B. Bài tập ví dụ:

<u>Dạng 1:</u> Các bài toán tìm số phức, Tìm phần thực, phần ảo của số phức ,tính modun, tìm số phức liên hợp và các đại lượng khác:

Ví dụ 1: Xác định phần thực và phần ảo của các số phức sau:

a) $z = 1 + 5i$ b) $z = 2$

c) $z = 3i$ d) $z = 0$

Bình luận: Đây là phần dễ, tuy nhiên không được chủ quan, học sinh khi đi thi thường coi thường phần này mà không chịu để ý kĩ.

- Lỗi sai cơ bản học sinh thường mắc lỗi đó là trả lời "Phần ảo là $5i$". Với số phức $z = a + bi$ thì **phần ảo là b** chứ không phải là bi.
- *Lời giải:*

a) $z = 1 + 5i$ có phần thực là 1, phần ảo là 5.

b) $z = 2$ có phần thực là 2, phần ảo là 0 (đây là một số thực).

c) $z = 3i$ có phần thực là 0, phần ảo là 3 (đây là một số ảo).

d) $z = 0$ có phần thực là 0, phần ảo là 0 (vừa là số thực vừa là số ảo).

Ví dụ 2: Cho số phức: $z = (2x + 4) + (3 - y)i$ (với $x, y \in \mathbb{R}$). Tìm x, y để:

a) z là số thực.

b) z là số ảo.

- *Lời giải:*

a) z là số thực $\Leftrightarrow 3 - y = 0 \Leftrightarrow y = 3$.

b) z là số ảo $\Leftrightarrow 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Ví dụ 3: Tìm môđun của các số phức sau:

a) $z_1 = 3 + 4i$; b) $z_2 = 12 - 5i$.

- *Lời giải:*

a) $|z_1| = |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

b) $|z_2| = |12 - 5i| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{169} = 13$.

Ví dụ 4: Tìm số phức liên hợp của các số phức sau:

a) $z_1 = 2 + 2i$; b) $z_2 = 1 - i$;

c) $z_3 = -3$; d) $z_4 = i$.

- *Lời giải:*

a) $\overline{z_1} = 2 - 2i$; b) $\overline{z_2} = 1 + i$;

c) $\overline{z_3} = -3$; d) $\overline{z_4} = -i$.

Ví dụ 5: Tìm x, y ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn:

a) $2x - y + (5x + 4)i = 3 + (3y + 11)i$ (1)

b) $2x + 3y - 2i = x + (x + y)i$ (2)

- *Lời giải:*

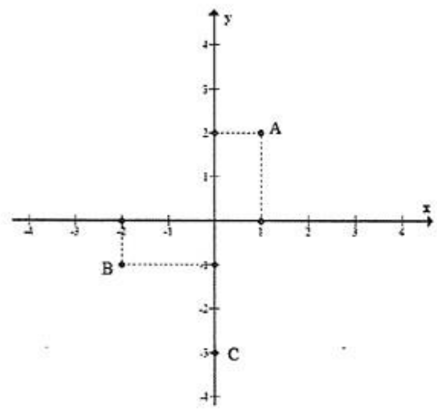
a) $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 5x + 4 = 3y + 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 5x - 3y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$

b) $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = x \\ -2 = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 0 \\ x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}.$

Dạng 2: Biểu diễn hình học số phức:

Ví dụ 1: Cho các số phức $z_1 = 1 + 2i$; $z_2 = -2 - 1i$; $z_3 = -3i$.

Biểu diễn các số phức trên trong mặt phẳng tọa độ.



Bình luận: Đây là dạng dễ kiếm điểm, dễ làm.

Lời giải:

Điểm A(1 ; 2) biểu diễn số phức $z_1 = 1 + 2i$.

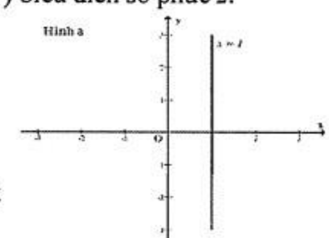
- Điểm B(-2 ; -1) biểu diễn số phức $z_2 = -2 - 1i$.

- Điểm C(0 ; -3) biểu diễn số phức $z_3 = -3i$.

Ví dụ 2: Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện:
a)Phần thực của z bằng 1. b)Phần ảo của z bằng -2.

Giả sử $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), khi đó trên mặt phẳng toạ độ Oxy, điểm M(x ; y) biểu diễn số phức z.

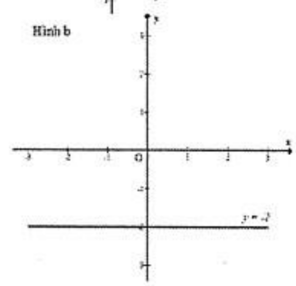
a) Phần thực của z bằng 1.



* *Lời giải:* Phần thực của z bằng 1, tức là $x = 1$, $y \in \mathbb{R}$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $x = 1$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy (hình a).

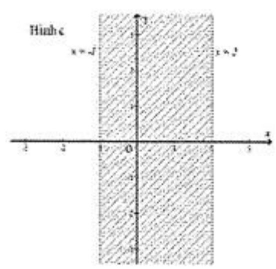
b) Phần ảo của z bằng -2.



* *Lời giải:* Phần ảo của z bằng -2, tức là $y = -2$, $x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $y = -2$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy (hình b).

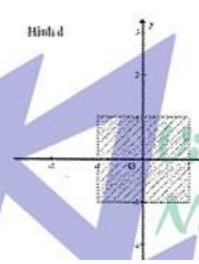
c) Phần thực của z thuộc khoảng (-1 ; 2).



* *Lời giải:* Tức là $x \in (-1 ; 2)$, $y \in \mathbb{R}$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là các điểm nằm giữa hai đường thẳng $x = -1$ và $x = 2$ (phần gạch chéo) trên mặt phẳng tọa độ Oxy (hình c).

d) Phần thực và phần ảo của z đều thuộc đoạn [-1;1].



* *Lời giải:* Tức là $x \in [-1;1]$, $y \in [-1;1]$.

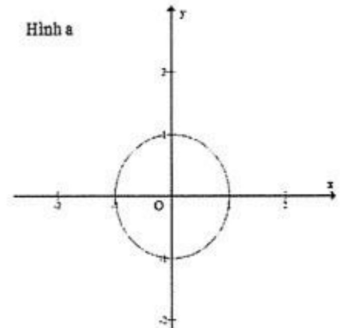
Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là các điểm thuộc hình vuông (kể cả cạnh) được vẽ trên hình d mặt phẳng tọa độ Oxy.

Ví dụ 3: Tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện:

a) $|z| = 1$.

Ta có: $|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$

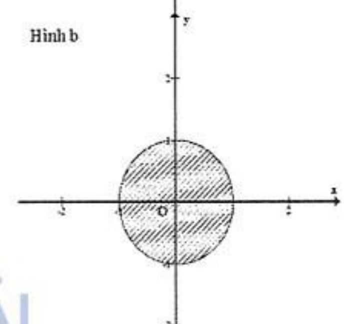
Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm O, bán kính bằng 1 (hình a).


Hình a

b) $|z| \le 1$.

Ta có: $|z| \le 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \le 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \le 1.$

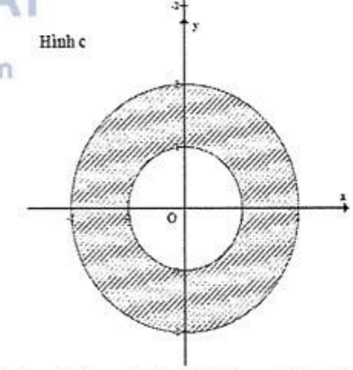
Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là hình tròn tâm O, bán kính bằng 1 (kể cả các điểm trên đường tròn) (hình b).


Hình b

c) $1 < |z| \le 2$.

Ta có: $1 < |z| \le 2 \Leftrightarrow 1 < x^2 + y^2 \le 4.$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z là phần nằm giữa đường tròn tâm O, bán kính bằng 1 (không kể điểm trên đường tròn này) và đường tròn tâm O, bán kính bằng 2 (kể cả các điểm trên đường tròn này).

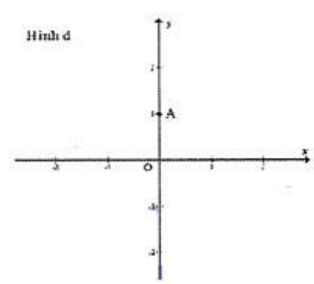

Hình c

d) $|z|$ =1 và phần ảo của z bằng 1.

Phần ảo bằng 1 tức là $y = 1$

$|z| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0.$

Vậy tập hợp các điểm cần tìm là A (0;1) (hình d).


Hình d

1.2 Cộng, trừ, nhân và chia số phức

A. Kiến thức cơ bản:

I. Phép cộng và phép trừ:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i\ ;$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a+c)-(b+d)i\ .$$

II. Phép nhân:

1. Các giá trị lũy thừa của *i*: các em nhớ cho thầy: $i^2=-1$

Ta có: $i^3=i^2.i=-i;$

$i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1.$

Tổng quát: $\boldsymbol{i^{4k}=1}$;

$\boldsymbol{i^{4k+1}=i}$;

$\boldsymbol{i^{4k+2}=-1}$;

$\boldsymbol{i^{4k+3}=-i}$. $(k\in\mathbb{Z})$

2. Phép nhân:

Cách tính: $(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=ac+adi+bci-bd.$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

- **Chú ý:** Ta không nên học thuộc công thức tổng quát trên, sẽ dễ dẫn đến nhớ nhầm lẫn, khuyên dùng nên trình bày như cách tính, vừa không phải nhớ nhiều công thức dễ gây lẫn lộn, vừa chính xác hơn.
- Phép cộng và phép nhân các số phức có tất cả các tính chất của phép cộng và phép nhân các số thực.

III. Phép chia:

1. Số phức nghịch đảo:

Cho số phức $z=a+bi\,(a,\,b\in\mathbb{R})$.

Số phức z' là **số phức nghịch đảo** của z:

$$z'=z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2-(bi)^2}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

2. Phép chia:

Thương $\frac{z'}{z}$ của phép chia số phức z' cho số phức z khác 0 là tích của z' với số phức nghịch đảo của z.

$$\frac{c+di}{a+bi}=\frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+\frac{ad-bc}{a^2+b^2}i\,.$$

- **Chú ý:** Trong thực hành, để tính thương $\frac{c+di}{a+bi}$, ta nhân cả tử và mẫu với số phức liên hợp của $a + bi$.

Bài tập ví dụ:

Dạng 1: Phép cộng, phép trừ:

1. Ví dụ 1: Thực hiện các phép cộng số phức sau:

a) $(2 + 4i) + (1 + 5i)$; b) $(3 - i) + (4 - 2i)$;

c) $(-1 + i) + (-1 - 2i)$; d) $(5 - i) + (-5 + i)$.

- *Lời giải:*

a) $(2 + 4i) + (1 + 5i) = (2 + 1) + (4 + 5)i = 3 + 9i$.

b) $(3 - i) + (4 - 2i) = (3 + 4) + \left[(-1)+(-2)\right]i = 7 - 3i$.

c) $(-1 + i) + (-1 - 2i) = -2 - i$.

d) $(5 - i) + (-5 + i) = 0$.

2. Ví dụ 2: Thực hiện các phép trừ số phức sau:

a) $(12 + 4i) - (6 + 2i)$; b) $(-3 - i) - (3 + 2i)$;

c) $(2 + 5i) - (-2 - 8i)$; d) $(19 - 9i) - (19 - 9i)$.

- *Lời giải:*

a) $(12 + 4i) - (6 + 2i) = (12 - 6) + (4 - 2)i = 6 + 2i$.

b) $(-3 - i) - (3 + 2i) = (-3 - 3) + (-1 - 2)i = -6 - 3i$.

c) $(2 + 5i) - (-2 - 8i) = 4 + 13i$.

d) $(19 - 9i) - (19 - 9i) = 0$.

Dạng 2: Phép nhân:

Ví dụ 1: Thực hiện các phép nhân sau:

a) $(4 + 2i)(2 + 5i)$; b) $(3 - i)(2 - 3i)$;

c) $(-3 + 4i)(1 - i)$; d) $(3 + 2i)(1 + i)(2 - 2i)$.

- *Lời giải:*

a) $(4 + 2i)(2 + 5i) = 8 + 20i + 4i + 10i^2 = (8 - 10) + (20 + 4)i = -2 + 24i$.

b) $(3-i)(2-3i) = 6-9i-2i+3i^2 = (6-3)-(9+2)i = 3-11i.$

c) $(-3+4i)(1-i) = (-3)+3i+4i-4i^2 = 1+7i.$

d) $(3+2i)(1+i)(2-2i) = (3+3i+2i+2i^2)(2-2i)$

$= (1+5i)(2-2i) = 2-2i+10i-10i^2 = 12+8i.$

Ví dụ 2: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $(2+5i)^2$; b) $(3-4i)^2$;

c) $(2+i)^3$; d) $(1-3i)^3$.

- *Lời giải:*

a) $(2+5i)^2 = 2^2 + 2.2.5i + (5i)^2 = 4+20i-25 = -21+20i.$

b) $(3-4i)^2 = -7-24i.$

c) $(2+i)^3 = 2^3 + 3.2^2.i + 3.2.i^2 + i^3$

$= 8+12i-6-i = 2+11i.$

d) $(1-3i)^3 = -26+18i.$

<u>**Dạng 3:**</u> **Phép chia:**

Ví dụ 1: Thực hiện phép chia số phức sau:

a) $\frac{14+22i}{1+4i}$; b) $\frac{16+11i}{3-2i}$.

- *Lời giải:*

a) $\frac{14+22i}{1+4i} = \frac{(14+22i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)} = \frac{14-56i+22i-88i^2}{1^2-(4i)^2} = \frac{102-34i}{17} = 6-2i.$

b) $\frac{16+11i}{3-2i} = \frac{(16+11i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{48+32i+33i+22i^2}{3^2-(2i)^2} = \frac{26+65i}{13} = 2+5i.$

2. Ví dụ 2: Tìm số phức z thỏa mãn:

a) $z.(4+5i) = 17+11i$; b) $5-3i = \frac{43+15i}{z}$.

* *Lời giải:*

a) $z.(4+5i) = 17+11i \Leftrightarrow z = \frac{17+11i}{4+5i} = \frac{(17+11i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)} = \frac{123-41i}{41} = 3-i.$

Vậy $z = 3-i.$

b) Điều kiện: $z \neq 0.$

$5-3i = \frac{43+15i}{z} \Leftrightarrow z = \frac{43+15i}{5-3i} = \frac{(43+15i)(5+3i)}{(5-3i)(5+3i)} = \frac{170+204i}{34} = 5+6i.$

(thỏa mãn điều kiện)

Vậy $z = 5 + 6i$.

1.3 Phương trình bậc hai với hệ số thực

A. Kiến thức cơ bản:

1. Căn bậc hai của số thực âm:

Từ đẳng thức $i^2 = -1$, ta nói i là một căn bậc hai của -1; $-i$ cũng là căn bậc hai của -1, vì $(-i)^2 = -1$.

Tổng quát: **Các căn bậc hai của số thực *a* âm là $\pm i\sqrt{|a|}$.**

Ví dụ: Căn bậc hai của -2 là $\pm i\sqrt{2}$.

Căn bậc hai của -3 là $\pm i\sqrt{3}$.

Căn bậc hai của -4 là $\pm 2i$.

2. Căn bậc hai của số phức:

$z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của số phức $w = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) khi và chỉ khi $z^2 = w$, tức là $(x + yi)^2 = a + bi$.

Do $(x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ nên $\begin{cases} x^2 - y^2 = a\ (1) \\ 2xy = b\ (2) \end{cases}$.

Giải hệ phương trình trên (thay phương trình (2) vào phương trình (1)), hệ phương trình có hai nghiệm $\left(x_0\,; \frac{b}{2x_0}\right)$; $\left(-x_0\,; -\frac{b}{2x_0}\right)$.

Vậy số phức w có đúng hai căn bậc hai (hai số đối nhau).

3. Phương trình bậc hai với hệ số thực:

Cho phương trình bậc hai $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, với $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Xét biệt số $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$ của phương trình. Ta thấy:

- Khi $\Delta = 0$, phương trình có một nghiệm thực $x = -\dfrac{b}{2a}$;
- Khi $\Delta > 0$, có hai căn bậc hai (thực) của Δ là $\pm\sqrt{\Delta}$ và phương trình có hai nghiệm thực phân biệt, được xác định bởi công thức:

  $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a};$$
- Khi $\Delta < 0$, phương trình không có nghiệm thực vì không tồn tại căn bậc hai thực của Δ.

Tuy nhiên, trong trường hợp $\Delta < 0$, nếu xét trong tập hợp số phức, ta vẫn có hai căn bậc hai thuần ảo của Δ là $\pm i\sqrt{|\Delta|}$. Khi đó, phương trình có hai nghiệm phức được xác định bởi công thức:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

* **Nâng cao:** Phương trình bậc hai với hệ số phức:

- Nếu $\Delta = 0$, phương trình có nghiệm kép: $z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$.

- Nếu $\Delta \neq 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$z_1 = \frac{-b+\gamma}{2a};\ z_2 = \frac{-b-\gamma}{2a}.$$

Trong đó γ là một căn bậc hai của Δ.

*** Chú ý:** Trên tập hợp số phức, mọi phương trình bậc hai đều có hai nghiệm (không nhất thiết phân biệt).

Bài tập ví dụ:

<u>Dạng 1:</u> Tìm căn bậc hai trên tập số phức:

Ví dụ 1: Tìm căn bậc hai của các số thực sau: –5; –6; –16; –20.

- *Lời giải:*

Số thực	–5	–6	–16	–20
Căn bậc hai của số thực	$\pm i\sqrt{5}$	$\pm i\sqrt{6}$	$\pm 4i$	$\pm 2i\sqrt{5}$

Ví dụ 2: Tìm căn bậc hai của các số phức sau:

a) $w = 5 + 12i$;   b) $w = 15 - 8i$.

- *Lời giải:*

a) $w = 5 + 12i$

* Cách 1: Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của số phức w.

Ta có $z^2 = w \Leftrightarrow (x+yi)^2 = 5 + 12i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 5 + 12i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5\ (1) \\ y = \frac{6}{x}\ (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1), ta có: $x^2 - \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 - \frac{36}{x^2} - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3 \text{ (thỏa mãn).}$$

- Với $x = 3 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow z_1 = 3 + 2i$.
- Với $x = -3 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow z_2 = -3 - 2i$.

Vậy w có hai căn bậc hai là $3 + 2i$ và $-3 - 2i$.

* Cách 2:

Mẹo: Ta thấy $\begin{cases} 12 = 2.3.2 \\ 5 = 9 - 4 = 3^2 + (2i)^2 \end{cases}$

Bài làm:

Ta có: $w = 5 + 12i = 9 + 12i - 4 = \ 3^2 + 2.3.2i + (2i)^2 = (3 + 2i)^2$

Vậy w có hai căn bậc hai là $3 + 2i$ và $-3 - 2i$.

*** Lưu ý:**

- Khuyến khích làm theo cách 1, tuy dài hơn cách 2 nhưng sẽ có đáp án chính xác. Chỉ áp dụng cách 2 khi đã nhìn ngay thấy mẹo, vì đôi khi chưa nhìn ngay thấy mẹo mà phải thử các trường hợp thì thời gian để thử mẹo của cách 2 có thể còn dài hơn làm cách 1.

- Nên thử lại bằng máy tính bỏ túi (cách dùng máy tính bỏ túi trên tập số phức sẽ hướng dẫn ở cuối chuyên đề).

Ví dụ: Sau khi làm xong ví dụ a, thử lại máy tính bằng cách tính phép tính $(3 + 2i)^2$ và $(-3 - 2i)^2$ thấy hiện kết quả $5 + 12i$ vậy là đáp án đúng.

b) $w = 15 - 8i$ có hai căn bậc hai là $4 - i$ và $-4 + i$.

* Cách 1: Như ví dụ a.

* Cách 2: $w = 15 - 8i = 16 - 8i - 1 = 4^2 - 2.4.i + i^2 = (4 - i)^2$.

<u>Dạng 2:</u> Giải phương trình bậc hai với hệ số thực:

Ví dụ: Giải phương trình sau trên tập số phức: $z^2 - 2z + 5 = 0$

- *Lời giải:*

Ta có: $\Delta = (-2)^2 - 4.1.5 = -16 < 0$

$\Delta = \ -16 = (\pm 4i)^2$ $\quad$ Δ có hai căn bậc hai là $4i$ và $-4i$

Vậy phương trình có hai nghiệm $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i$; $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{2-4i}{2} = 1 - 2i$.

- ***Lưu ý:***
  - Trong bài tập về giải phương trình bậc hai trên tập số thực, ta có biết đến biệt thức $\Delta' = b'^2 - ac$ với $b = 2b'$. Biệt thức này cũng đúng với phương trình bậc hai trên tập số phức.
  - Tuy nhiên, trong SGK không đề cập đến biệt thức Δ'. Theo ý kiến cá nhân của người viết sách và kinh nghiệm từ thầy cô giáo đã tham gia chấm thi Đại học, chúng ta nên tính theo biệt thức Δ. Vì một số thầy cô giáo có thể vẫn chấp nhận biệt thức Δ', số khác có thể trừ điểm bài làm chúng ta.
- ***Chú ý:***
  - Ta có thể kiểm tra lại đáp số bằng máy tính bỏ túi.
  - Cách giải phương trình bậc hai bằng máy tính bỏ túi đề cập ở cuối chuyên đề.

<u>Dạng 3:</u> Giải phương trình bậc hai với hệ số phức:

- ***Lưu ý:*** Dạng toán này là dạng toán nâng cao, không đề cập đến trong SGK, và cũng không có khả năng xuất hiện trong đề thi tuyển sinh Đại học. Nhưng chúng ta vẫn nên biết cách làm để phục vụ cho bài kiểm tra ở lớp và phòng trường hợp xuất hiện trong đề thi Đại học.

Ví dụ 1: Giải phương trình sau trên tập số phức:

$$z^2 + (3-2i)z + 5 - 5i = 0$$

- *Lời giải:*

- Bước 1: Xét $\Delta = (3-2i)^2 - 4.1.(5-5i) = -15 + 8i$.

- Bước 2: Xác định căn bậc hai của Δ:

* Cách 1: Gọi $w = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ là căn bậc hai của Δ.

Ta có: $\begin{cases} a^2 - b^2 = -15 \\ 2ab = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -15 \ (1) \\ b = \frac{4}{a} \ (2) \end{cases}$

Thay (2) vào (1) $\Rightarrow a^2 - \left(\frac{4}{a}\right)^2 = -15 \Leftrightarrow a^4 + 15a^2 - 16 = 0$

$\Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1.$

$\Rightarrow b = \pm 4.$

$\Rightarrow \Delta$ có hai căn bậc hai là $1 + 4i$ và $-1 - 4i$.

* Cách 2: $\Delta = -15 + 8i = 1 + 8i - 16 = 1^2 + 2.1.4i + (4i)^2 = (1+4i)^2$.

$\Rightarrow \Delta$ có hai căn bậc hai là $1 + 4i$ và $-1 - 4i$.

- Bước 3: Kết luận:

Vậy phương trình có hai nghiệm:

$$z_1 = \frac{-b+\gamma}{2a} = \frac{(-3+2i)+(1+4i)}{2} = \frac{-2+6i}{2} = -1 + 3i\,;$$

$$z_2 = \frac{-b-\gamma}{2a} = \frac{(-3+2i)-(1+4i)}{2} = \frac{-4-2i}{2} = -2 - i\,.$$

SKILL ĐẶC BIỆT

CASIO SỐ PHỨC (Phục vụ cho việc giải nhanh – diệt Gọn)

Dạng 1: Tìm số phức, số phức liên hợp, tính argumen, tính độ dài

Để tính được số phức các em phải vào hệ CMPLX bằng cách:

CMPLX ⊡ Math

MODE 2

Gọi thành phần ảo bằng cách bấm:

CMPLX ⊡ Math

i

SHIFT ENG

Ví dụ 1: Tính $(2+i)z + 1 + 3i = \dfrac{1+2i}{1+i}$

Tìm số phức z? Ta làm thao tác sau:

[▭/▭] [1] [+] [2] [SHIFT] [ENG] [▼] [1] [+] [SHIFT] [ENG] [▶] [−] [1] [−] [3] [SHIFT] [ENG] [)] [÷] [(] [2] [+] [SHIFT] [ENG] [)] [=]

CMPLX Math ▲

$\left(\frac{1+2i}{1+i}-1-3i\right)\div(2+\triangleright$

$-\frac{3}{10}-\frac{11}{10}i$

=> Ta dễ dàng tìm ra số phức z

Ví dụ 2: Tính số phức liên hợp của z=1+i

Tìm số phức liên hợp ra sao?

Để tìm số phức liên hợp của z ta dùng hàm Conjg

[SHIFT] [2] [2] [1] [+] [SHIFT] [ENG] [)] [=]

CMPLX Math ▲

Conjg(1+i)

1-i

Ví dụ 2: Tính argument của số phức z=1+i

Tương tự tính Argument (góc) của z

[SHIFT] [2] [1] [1] [+] [SHIFT] [ENG] [)] [=]

CMPLX Math ▲

arg(1+i)

45

Ví dụ 2: Tính module của số phức z=1+i

Tính độ dài ta dùng Abs:

[SHIFT] [hyp] [1] [+] [SHIFT] [ENG] [=]

CMPLX Math ▲

|1+i|

$\sqrt{2}$

Ví dụ đề mẫu 2016: Tìm module của $z=(2+i)(1-i)+1+3i$ các em có thể tính z bằng máy rồi dùng Abs hoặc Abs cả biểu thức đó luôn được:

CMPLX Math ▲

|(2+i)(1-i)+1+3▷

$2\sqrt{5}$

Dạng 2: Tìm tập hợp số phức z

Ví dụ 1: Tìm tập hợp z thỏa mãn đẳng thức $|z+2+i|=|\bar{z}-3i|$

A. $y=x-1$ B. $y=x+1$ C. $y=-x+1$ D. $y=-x-1$

Thầy giải thích 1 chút ví dụ $z=a+bi$ thì ý của họ là mối quan hệ a,b là cái nào trong 4 cái trên đó. Thì ở đây mình sẽ lần lượt đi tính 4 đáp án

Đáp án A. $y=x-1$ tức là : $b=a-1 \Rightarrow$ Chọn $b=100, a=101 \to z=101+100i$

Sau đó nhập :

[−] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [2] [2] [ALPHA] [)] [)] [−] [3] [SHIFT] [ENG]

CMPLX Math ▲ |X+2+i|−|Conjg(▸ CMPLX Math ▲ ◂·|Conjg(X)−3i|

Sau đó tính bằng cách bấm CALC

CMPLX Math ▲
X?

0

Các em nhập là

[CALC] [1] [0] [1] [+] [1] [0] [0] [SHIFT] [ENG] [=]

Được kết quả:

CMPLX Math ▲
|X+2+i|−|Conjg(▸

0

Dạng 3: Tìm căn của số phức

Ví dụ 1: Tìm căn của số phức $\sqrt{-33+56i}$

A. $4+7i$ **B.** $-4-7i$ **C.** $-4+7i$; $-4-7i$ **D.** $4+7i$; $-4-7i$

Cách 1 : Các em thử đáp án : Tính mẹo

M CMPLX Math ▲
(4+7i)²
-33+56i

M CMPLX Math ▲
(-4-7i)²
-33+56i

Cách 2: Tính không dựa vào đáp án

Các em về COMP tính toán thông thường:

Chúng ta sẽ chuyển từ dạng đại số sang dạng lượng giác để tiến hành khai căn

q+p33q)56)=

M Math ▲
Pol(-33,56)

r=65,θ=2.103300▸

Khi đó các giá trị góc và bán kính này được lưu ở X,Y

M Math ▲
X
65

M Math ▲
Y
2.103300425

Sau khi chuyển được sang lượng giác rồi thì các em nhớ tới công khai căn dạng lượng giác là

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \rightarrow \sqrt{z} = \sqrt{r}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2})$

Do đó mình lại chuyển từ lượng giác sang đại số bằng cách bấm

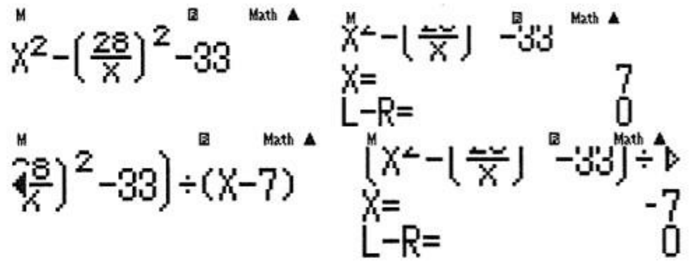
qpsQ)$q)QnP2)=

M Math ▲
Rec(√X,Y÷2)

X=4,Y=7

Cách 3: Theo SGK :

$$z = 33 - 56i = (a + bi)^2 \to \begin{cases} a^2 - b^2 = 33 \\ 2ab = -56 \end{cases} \to a^2 - \left(\frac{-28}{a}\right)^2 = 33$$

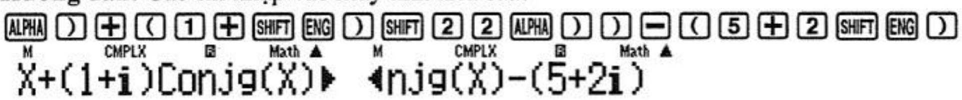


Vậy đáp án là D.

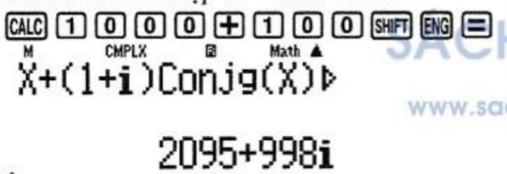
Ví dụ 2: Tìm module của z biết $z + (1+i)\bar{Z} = 5 + 2i$

A. $\sqrt{2}$ **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** $\sqrt{5}$ **D.** $\sqrt{10}$

Hướng dẫn: Các em nhập vào máy tính như sau:



Sau đó các em nhập $X = 1000 + 100i$



Ở đây các em sẽ có:

$$\begin{cases} 2095 = 2.1000 + 100 - 5 = 2a + b - 5 \\ 998 = 1000 - 2 = a - 2 \end{cases}$$

Mặt khác ta đang muốn phương trình nó bằng 0 thay vì kết quả vừa rồi do đó

$\to \begin{cases} 2a + b - 5 = 0 \\ a - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \to |z| = \sqrt{5}$ không tin các em thử lại mà xem !

- Lưu ý: các em phải lấy số đầu gần nhất tức là: $2198 = 2a + 2b - 2$; $2795 = 3a - 2b - 5$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ LUYỆN

CHUYÊN ĐỀ 1: SỐ PHỨC
ĐỀ THI

Câu 1 Nghiệm của phương trình sau trên tập số phức là $x^2 + x + 1 = 0$

A $\dfrac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$ **B** $\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ C $\dfrac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$ D $\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$

Câu 2 Cho số phức $z = 1 - 3i$ Tính mô đun của z^2 là

A $\sqrt{10}$ **B** 10 C 20 D $\sqrt{20}$

Câu 3 Cho $z_1 = 2 - 3i$ và $z_2 = 2 + 3i$ .Mô đun của số nào lớn nhất

A $z_1 + z_2$　　　B $z_1 - z_2$　　　C $z_1.z_2$　　　D $\frac{z_1}{z_2}$

Câu 4 Cho phương trình sau trên tập số thực $x^2 + 3x + 5 = 0$ các nghiệm của phương trình trên có phần thực là

A -1.5　　　B 1.5　　　C $\frac{\sqrt{11}}{2}$　　　D $-\frac{\sqrt{11}}{2}$

Câu 5 Tính $(1+i)^{25}$

A $2^{12}(1+i)$　　　B $-2^{12}(1+i)$　　　C. -2^{25}　　　D. $-2^{25}(1+i)$

Câu 6 Cho số phức z=3+4i thì $\sqrt{z}$ là số phức nào

A. 1-2i　　　B. 1+2i　　　**C.** $2+i$　　　D. 2-i

Câu 7 Chia số phức $5-\sqrt{2}i$ cho số phức $1+\sqrt{2}i$ ta được số phức cố modun là

A 1　　　B 2　　　C 4　　　**D** 3

Câu 8 Cho số phức z=1+i. Tính z^3

A. $z^3 = 2+2i$　　　B. $z^3 = 2+2\sqrt{2}i$　　　C. $z^3 = 2+2i$　　　D. $z^3 = 1-2i$

Câu 9 Cho số phức z thỏa mãn $(1-i)z + (5+2i)\bar{z} = 3+5i$,tính modun số phức z

A. $\sqrt{2}$　　　B. 1　　　C. 2　　　D. 3

Câu 10 Tìm phần thực của số phức z thỏa mãn $(2+i)z + 2\bar{z} = 4$

A. 4　　　B 3　　　C 2　　　**D** -4

Câu 11 Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-(3-4i)| = 2$

A Hình tròn　　　B Hình elip　　　C Hình vuông　　　D Parabol

Câu 12 Số phức z có modun nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện $|z-i| = |\bar{z}-2-3i|$ là

A. $z = -\frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$　　　B. $z = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$　　　C. $z = \frac{4}{5} + \frac{6}{5}i$　　　**D.** $z = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$

Câu 13 Cho số phức $z = a + bi(a, b \in R)$,để điểm biểu diễn của Z trong mặt phẳng tọa độ nằm trong đường tròn tâm O bán kính R =2 thì điều kiện của a,b là

A $a^2+b^2=4$　　　B $a^2+b^2=2$　　　C $a^2+b^2<4$　　　D $a^2+b^2>4$

Câu 14 Môdun của số phức $z = (1-i)(3\sqrt{2}-\sqrt{7}i)$ là

A $5\sqrt{2}$　　　B. $3\sqrt{2}+\sqrt{7}$　　　C. $5\sqrt{7}$　　　D. $4\sqrt{7}$

Câu 15 Gọi z và z' là 2 nghiệm của phương trình $x^2+x+1=0$, điều nào đúng

A. $z^2 + z'^2 = 1$　　　**B.** $z^2 + z'^2 = -1$　　　C. $z^2 + z'^2 = \frac{7}{2}$　　　D. $z^2 + z'^2 = -\frac{7}{2}$

Câu 16 Cho $P = (1+i)^{2010}(1-i)^{2008}$ kết quả nào sau đây đúng

A. $P = 2^{2008}$　　　B. $P = 2^{2008}$　　　C. $P = 2^{2009}$　　　**D.** $P = i.2^{2009}$

Câu 17 Nghiệm của phương trình $z^{2=}$-9 là

A. z=3i　　　B. z=-3i　　　**C.** z=3i và z=-3i　　　D. z=1+3i và z=1-3i

Câu 18 cho M và M' lần lượt là các điểm biểu diễn số phức Z và Z' ,mệnh đề sai là

A $|Z'| - |Z| = MM'$　　　B $|Z'| + |Z| = MM'$　　　C $|Z| = 0M$　　　D $|Z' - Z| = MM'$

Câu 18 Tìm bình phương modun của số phức $z = (2+4i)(3-5i) + 7(4-3i)$

A. 3277　　　B. 277　　　C. 77　　　D. 177

Câu 19 Cho $z = a + bi$ biết $\left[(5+2i)\bar{z} - 3 + 7i\right]$ là số thuần ảo. $z+\bar{z}=2$,khi đó a+b=?

A. 0 B. 3 C.2 D.1

Câu 20: Cho số phức Z có phần ảo âm và thỏa mãn $z^2 - 3z + 5 = 0$,tìm modun của số phức $w = 2z - 3 + \sqrt{14}$

A $\sqrt{13}$ B $\sqrt{18}$ C 14 **D** 5

Câu 21: Tập hợp điểm biểu diễn số phức $z = (1+i)z + 2$ biết $|1+iz| = |z-2i|$ là

A. Điểm B. Đường tròn C. Elip **D.** Đường thẳng

Câu 22: Tập hợp các điểm biểu diễn số phức w ,biết w và z thỏa mãn $\begin{cases} w = \bar{z} + 2 - i \\ |z-2-i| = 1 \end{cases}$ là đường tròn có tâm:

A $(4,-2)$ B $(3,-2)$ C $(2,-2)$ D $(5,-2)$

Câu 23: Cho số phức z thỏa mãn $z - \dfrac{\bar{z}}{1+3i} = \dfrac{6+7i}{5}$,modun của z là

A 5 B $\sqrt{17}$ C $\sqrt{2}$ D $\sqrt{13}$

Câu 24: Cho số phức z thỏa mãn $\dfrac{z}{1-2i} + \bar{z} = 2$,số phức $w = z^2 - z$ có phần thực là

A 0 **B** 1 C 2 D 3

Câu 25: Số phức z thỏa mãn $|z+1-2i| = 5$ và $z.\bar{z} = 34$ có phần ảo là

A. 5 **B.** 3 C. 4 D. 8

Câu 26: Số vừa thực vừa ảo?

A. 0 B. 1 C. i D. 1-i

Câu 27: Cho số phức: $z = (2x + 4) + (3 - y)i$ (với $x, y \in \mathbb{R}$). Tìm x, y để z là số thực

A. y=3 B. x=-2 C. x=y=3 D. x=y=-2

Câu 28: Tính tổng $|z_1|+|z_2|$ biết $z_1 = 3 + 4i$ và $z_2 = 12 - 5i$.

A. 17 **B.** 18 C. 19 D. 20

Câu 29 Tìm số phức liên hợp của các số phức $z_3 = -3$

A. –3 B. –3+i C. -3-i D. -3-i

Câu 30: Tìm x, y ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn: $2x - y + (5x + 4)i = 3 + (3y + 11)i$

A. x=-2;y=1 **B.** x=2;y=1 C. - x=2;y=-1 D. x=-2;y=-1

Câu 31: Tìm x, y ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn: $2x + 3y - 2i = x + (x + y)i$

A. x=-3;y=1 B. x=3;y=1 C. x=3;y=-1 D. x=-3;y=-1

Câu 32: Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện: Phần thực của z bằng 1

A. Là đường thẳng x=1 B. Là đường thẳng y=1

C. là đường thẳng x+y=1 D. là đường thẳng x-y=1

Câu 33: Tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z| = 1$.

A. đường tròn tâm O, bán kính bằng 1

B. đường tròn tâm O, bán kính bằng 2

C. đường thẳng x=1

D. đường thẳng y=1

Câu 34: Tính i^{2017}

A. i B. –i C. 1 D. –1

Câu 35: Tính i^{2018}

A. i B. –i C. 1 **D.** –1

Câu 36: Tính $(3 + 2i)(1 + i)(2 - 2i)$.

A. $12 + 8i$. B. 12 -8i. C. 12 -6i. D. 12 +6i.

Câu 37: Tính $(1 - 3i)^3$.

A. $-26 - 18i$. **B.** $-26 + 18i$. C. $26 + 18i$. D. $-26 + 8i$..

Câu 38: Tìm z biết $5 - 3i = \frac{43+15i}{z}$.

A. 5 - 6i B. -5 + 6i **C.** 5 + 6i D. -5- 6i

Câu 39: Tìm căn bậc hai của –3 là

A. $\pm i\sqrt{3}$. B. $-i\sqrt{3}$. C. $+i\sqrt{3}$. D. $\pm 2i\sqrt{3}$.

Câu 40: Tìm căn bậc hai của các số phức sau: $w = 15 - 8i$.

A. $3 + 2i$ và $-3 - 2i$. B.$3 + i$ và $-3 - i$

C. $3 + 3i$ và $-3 - 3i$ D. $3 \pm i$

Câu 41: Tìm z biết $z^2 - 2z + 5 = 0$

A. $1 + i$ và $1 - i$. **B.** $1 + 2i$ và $1 - 2i$.

C. $3 + 2i$ và $3 - 2i$. D. $2 + 2i$ và $2 - 2i$

Câu 42: Tìm z biết $z^2 + (3 - 2i)z + 5 - 5i = 0$

A. $-1 + 3i$ và $1 - i$. B. $1 + 2i$ và $1 - 2i$.

C. $3 + 2i$ và $-2 - i$. **D.** $-1 + 3i$ và $-2 - i$

Câu 43. Cho số phức z thỏa mãn: (3+2i)z+ $(2-i)^2$ =4+i. Hiệu phần thực và phần ảo của số phức z là:

A.1 B.3 **C.4** D.6

Câu 44. Cho z_1, z_2 lần lượt là nghiệm của phương trình $z^2+3(1+i)z+5i=0$ Tổng phần thực của 2 số z_1, z_2 là?

A. -2 **B.**-3 C.-4 D.-5

Câu 45: Cho số phức $z=1-3i$ mô đun của z^2 là

A $\sqrt{10}$ **B** 10 C 20 D $\sqrt{20}$

Câu 46: cho $z_1=2-3i$ và $z_2=2+3i$. Mô đun của số nào lớn nhất

A z_1+z_2 B z_1-z_2 **C** $z_1.z_2$ D $\frac{z_1}{z_2}$

Câu 47: Tìm môđun của số phức z, biết $\overline{z}=\frac{z^2+2z+3}{z+1}$

A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{6}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $\sqrt{5}$

Câu 48: Cho số phức z thỏa $1+i\ \overline{z}-\frac{z}{1-i}=-5+7i$. Tìm phần ảo của z

A. 3 B. 4 C. -4 D. -3

Câu 49: Cho số phức $z=3-2i$. Tìm phần thực của số phức $w=iz-\overline{z}$

A. 1 B. -1 C. -2 D. 2

Câu 50: Tìm phần thực của các số phức z, biết: $\begin{cases} z+\overline{z}=10. \\ |z|=13. \end{cases}$

A. 5 B. -12 C. 12 D.-5

1. B	2.B	3. C	4.A	5.A	6.C	7.D	8.A	9.A	10.D
11.A	12.D	13.A	14. A	15.B	16. D	17.C	18.A	19.A	20.D
21.D	22.A	23.C	24. B	25. A	26 A	27.A	28.B	29.A	30.B
31.A	32.A	33.A	34.A	35.D	36.A	37.B	38.C	39.A	40.A
41.B	42. D	43.C	44.B	45.B	46.C	47.A	48.C	49.B	50.A

CHUYÊN ĐỀ : TÍCH PHÂN

1. Kiến thức cơ bản

1.1. Công thức nguyên hàm cơ bản

Nguyên hàm của hàm số cơ bản	Nguyên hàm mở rộng
$\int dx = x + C$	$\int a.dx = ax + C,\ a \in \mathbb{R}$
$\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$	$\int (ax+b)^\alpha dx = \dfrac{1}{a}.\dfrac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C,\ x \neq 0$	$\int \dfrac{dx}{ax+b} = \dfrac{1}{a}.\ln\lvert ax+b\rvert + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b} dx = \dfrac{1}{a}.e^{ax+b} + C$
$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{\alpha x+\beta} dx = \dfrac{1}{\alpha}.\dfrac{a^{\alpha x+\beta}}{\ln a} + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \dfrac{1}{a}.\sin(ax+b) + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\dfrac{1}{a}.\cos(ax+b) + C$
$\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \dfrac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \dfrac{1}{a}\tan(ax+b) + C$
$\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \dfrac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\dfrac{1}{a}\cot(ax+b) + C$

1.2. Công thức tích phân

F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên đoạn [a;b] thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

1.3. Phương pháp đổi biến số

1.3.1. Dạng 1 : Tính I = $\int_a^b f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)dx$

+ Đặt t = $\varphi(x) \Rightarrow dt = \varphi'(x).dx$

+ Đổi cận :

x	a	b
t	$\varphi(a)$	$\varphi(b)$

$$\Rightarrow \mathrm{I} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t).dt = F(t)\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}$$

1.3.2. Dạng 2 : Tính I = $\int_a^b f(x)dx$ ***bằng cách đặt x =*** $\varphi(t)$

Dạng chứa $\sqrt{a^2 - x^2}$ *: Đặt x = asint,* $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ (a>0)

1.4. Phương pháp tích phân từng phần

* ***Công thức tính*** : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

✦ **Đặt** $\begin{cases} u = ... \\ dv = ... \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = ...dx & (lay\ dao\ ham) \\ v = ... & (lay\ nguyen\ ham) \end{cases}$

Ta thường gặp hai loại tích phân như sau:

* Loai 1:

$$\begin{cases} \int_a^b P(x).\sin f(x).dx \\ \int_a^b P(x).\cos f(x).dx \\ \int_a^b P(x).e^{f(x)}.dx \end{cases} \Rightarrow u = P(x)$$

, trong đó $P(x)$ là đa thức bậc n.

*Loai 2: $\int_a^b P(x).\ln f(x).dx \quad \Rightarrow u = \ln f(x)$

1.5. Tính chất tích phân

Tính chất 1: $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, *k: hằng số*

Tính chất 2: $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

Tính chất 3: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (a < c < b)$

1.6. Diện tích hình phẳng

1.6.1. Dạng 1: Cho hàm số y = f(x) liên tục trên [a; b]. khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số y = f(x), trục Ox và hai đường thẳng x = a và x = b là:

$$S = \int_a^b |f(x)|dx \quad (*)$$

Lưu ý:

✓ $f(x) = 0$ vô nghiệm trên (a;b) thì

$$S = \int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

✓ $f(x) = 0$ có 1 nghiệm $c \in (a;b)$ thì

$$S = \int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^c f(x)dx\right| + \left|\int_c^b f(x)dx\right|$$

1.6.2. Dạng 2: Cho hai hàm số $y = f_1(x)$ và $y = f_2(x)$ liên tục trên [a; b]. Khi đó diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $f_1(x)$, $f_2(x)$ và hai đường thẳng x = a, x = b là:

$$S = \int_a^b \left|f_1(x) - f_2(x)\right| dx \quad (**)$$

Lưu ý: Khử dấu giá trị tuyệt đối của công thức (**) thực hiện tương tự đối với công thức (*).

1.7. Thể tích vật thể tròn xoay

Thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường y = f(x), trục Ox và hai đường thẳng x = a, x = b quay xung quanh trục Ox là:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

Lưu ý: Diện tích, thể tích đều là những giá trị dương.

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Tính các tích phân sau

$1/A = \int_0^1 (2x+e^x)dx$ $\quad 2/B = \int_0^1 2^x\left(e^x+3\right)dx$ $\quad 3/C = \int_0^\pi \left(\sin x+\cos x\right)dx$

$4/D = \int_1^4 \left(\frac{x^2+2\sqrt{x}+3}{x^3}\right)dx$ $\quad 5/E = \int_0^\pi \left(x-\sin 2x\right)dx$

Lời giải

$$1/A = \int_0^1 \left(2x+e^x\right)dx = \int_0^1 2xdx + \int_0^1 e^x dx = x^2\Big|_0^1 + e^x\Big|_0^1 = 1-0+e-1 = e$$

$$2/B = \int_0^1 2^x\left(e^x+3\right)dx = \int_0^1 (2e)^x dx + 3\int_0^1 2^x dx = \frac{(2e)^x}{\ln 2e}\Bigg|_0^1 + 3\frac{2^x}{\ln 2}\Bigg|_0^1 = \left(\frac{2e-1}{\ln 2e}\right) + \frac{3}{\ln 2}$$

$$3/C = \int_0^\pi \left(\sin x+\cos x\right)dx = \int_0^\pi \sin x dx + \int_0^\pi \cos x dx = -\cos x\Big|_0^\pi + \sin x\Big|_0^\pi = 2$$

$$4/D = \int_1^4 \left(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x^3}+\frac{3}{x^3}\right)dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{x}+x^{-\frac{5}{2}}+3x^{-3}\right)dx = \ln|x|\Big|_1^4 - \frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}\Bigg|_1^4 + \frac{3}{-2}x^{-2}\Big|_1^4 =$$

$$5/E = \int_0^\pi \left(x-\sin 2x\right)dx = \int_0^\pi xdx - \int_0^\pi \sin 2xdx = \frac{1}{2}x^2\Bigg|_0^\pi + \frac{1}{2}\cos 2x\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$$

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau

$1/I = \int_1^6 x\sqrt{x+3}dx$ $\quad 2/J = \int_0^1 \frac{2x+1}{1+\sqrt{3x+1}}dx$

$3/K = \int_1^e \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2\ln x+1}{x(\ln x+1)}\right)dx$ $\quad 4/L = \int_0^{\ln 2}\left(x+\frac{1}{2e^x+1}\right)dx$

Lời giải

$1/I = \int_1^6 x\sqrt{x+3}dx$

- Đặt $\sqrt{x+3} = t$ ta được $x+3 = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$
- Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 2; x = 6 \Rightarrow t = 3$
- Khi đó $I = \int_2^3 \left(2t^4 - 6t^2\right)dt = \left(\frac{2}{5}t^5 - 2t^3\right)\Big|_2^3 = \frac{232}{5}$

$2/J = \int_0^1 \frac{2x+1}{1+\sqrt{3x+1}}dx$

- Đặt $\sqrt{3x+1} = t$ ta được $x = \frac{t^2-1}{3} \Rightarrow dx = \frac{2}{3}tdt$
- Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = 2$
- Khi đó $J = \frac{2}{9}\int_1^2 \frac{2t^3+t}{1+t}dt = \frac{2}{9}\int_1^2 \left(2t^2 - 2t + 3 - \frac{3}{t+1}\right)dt = \frac{28}{27} - \frac{2}{3}\ln\frac{3}{2}$

$3/K = \int_1^e \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2\ln x + 1}{x(\ln x + 1)}\right)dx$

- Tính $K_1 = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ ta được kết quả $K_1 = 2\left(\sqrt{e} - 1\right)$
- Đặt $\ln x = t$ ta được $dt = \frac{dx}{x}$
- Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = 0; x = e \Rightarrow t = 1$
- Khi đó $K_2 = \int_0^1 \frac{2t+1}{t+1}dt = \left(2t - \ln(t+1)\right)\Big|_0^1 = 2 - \ln 2$

- Vậy ta được $K = K_1 + K_2 = 2\sqrt{e} - \ln 2$

$4/L = \int_0^{\ln 2} \left(x + \frac{1}{2e^x + 1}\right)dx$

- Tính $L_1 = \int_0^{\ln 2} xdx$ ta được kết quả $I = \frac{1}{2}\ln^2 2$
- Tính $L_2 = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{2e^x + 1}dx$
- Đặt $e^x = t$ ta được $e^x dx = dt$
- Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \ln 2 \Rightarrow t = 2$
- Khi đó $L_2 = \int_1^2 \frac{dt}{t(2t+1)} = \left(\ln t - \ln(2t+1)\right)\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln\frac{5}{3} = \ln\frac{6}{5}$
- Vậy ta được $L = L_1 + L_2 = \frac{1}{2}\ln^2 2 + \ln\frac{6}{5}$

Ví dụ 3. Tính các tích phân sau

$1/I=\int\limits_0^{\pi}\left(1-\sin^3 x\right)\cos x dx \qquad 2/J=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin^2 x\cos^4 x}dx \qquad 3/K=\int\limits_0^{\pi}\left(\sin x+x\right)\sin x dx$

Lời giải

$$1/I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^3 x\right)\cos x dx$$

- Đặt $\sin x=t\Rightarrow dt=\cos x dx$
- Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0; x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$
- Khi đó $I=\int\limits_0^1\left(1-t^3\right)dt=\left(t-\dfrac{t^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\dfrac{3}{4}$

$$2/J=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin^2 x\cos^4 x}dx$$

- Đặt $\cot x=t\Rightarrow dt=\dfrac{-1}{\sin^2 x}dx$
- Đổi cận $x=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow t=\sqrt{3}; x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=1$
- Khi đó $J=\int\limits_1^{\sqrt{3}}\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)^2 dt=\int\limits_1^{\sqrt{3}}\left(1+\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{1}{t^4}\right)dt=\left(t-\dfrac{2}{t}-\dfrac{1}{3t^3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{3}}=\dfrac{8\sqrt{3}}{27}+\dfrac{4}{3}$

$$3/K=\int\limits_0^{\pi}\left(\sin x+x\right)\sin x dx=\int\limits_0^{\pi}\sin^2 x dx+\int\limits_0^{\pi}x\sin x dx$$

- Đặt $K_1=\int\limits_0^{\pi}\sin^2 x dx=\int\limits_0^{\pi}\dfrac{1-\cos 2x}{2}dx=\dfrac{1}{2}\pi$
- $K_2=\int\limits_0^{\pi}x\sin x dx$
- $\begin{cases}u=x\\dv=\sin x dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=-\cos x\end{cases}$
- $K_2=-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int\limits_0^{\pi}\cos x dx=\pi+\sin x\Big|_0^{\pi}=\pi$

**** Chú ý: Ta thường đặt t là căn, mũ, mẫu.***

- Nếu hàm có chứa dấu ngoặc kèm theo luỹ thừa thì đặt t là phần bên trong dấu ngoặc nào có luỹ thừa cao nhất.

- Nếu hàm chứa mẫu số thì đặt t là mẫu số.

- Nếu hàm số chứa căn thức thì đặt t = căn thức.

- Nếu tích phân chứa $\frac{dx}{x}$ thì đặt $t = \ln x$.

- Nếu tích phân chứa e^x thì đặt $t = e^x$.

- Nếu tích phân chứa $\frac{dx}{\sqrt{x}}$ thì đặt $t = \sqrt{x}$.

- Nếu tích phân chứa $\frac{dx}{x^2}$ thì đặt $t = \frac{1}{x}$.

- Nếu tích phân chứa $\cos xdx$ thì đặt $t = \sin x$.

- Nếu tích phân chứa $\sin xdx$ thì đặt $t = \cos x$.

- Nếu tích phân chứa $\frac{dx}{\cos^2 x}$ thì đặt $t = \tan x$.

- Nếu tích phân chứa $\frac{dx}{\sin^2 x}$ thì đặt $t = \cot x$.

Ví dụ 3. Tính các tích phân

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin xdx$ b) $J = \int_1^e x \ln xdx$ c) $K = \int_0^1 xe^x dx$

Lời giải

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin xdx$

✓ $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

✓ $I = -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx = 0 - 0 + \mathrm{sinx}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

b) $J = \int_1^e x \ln xdx$

✓ $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

✓ $J = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2+1}{4}$

c) $K = \int_0^1 xe^x dx$

✓ $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

✓ $K = xe^x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = 1$

Ví dụ 4. Tính các tích phân sau

$1/I = \int\limits_1^2 \left(x^2 + \frac{1-x^2}{x+x^3} \right) dx \quad 2/J = \int\limits_0^{\ln 4} \left(e^x + \frac{1}{\sqrt{e^x}+2} \right) dx \quad 3/K = \int\limits_1^2 \frac{x^2-1}{x^2} \ln x dx$

Lời giải

$1/I = \int\limits_1^2 \left(x^2 + \frac{1-x^2}{x+x^3} \right) dx = \int\limits_1^2 x^2 dx + \int\limits_1^2 \frac{1-x^2}{x+x^2} dx$

Tính $I_1 = \int\limits_1^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^2 = \frac{7}{3}$

$$I_2 = \int\limits_1^2 \frac{1-x^2}{x+x^3} dx = \int\limits_1^2 \frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x}+x} dx = -\int\limits_1^2 \frac{d\left(\frac{1}{x}+x\right)}{\frac{1}{x}+x} dx = -\ln\left(\frac{1}{x}+x\right)\Bigg|_1^2 = \ln\frac{4}{5}$$

Vậy $I = I_1 + I_2 = \frac{7}{3} + \ln\frac{4}{5}$

$2/J = \int\limits_0^{\ln 4} \left(e^x + \frac{1}{\sqrt{e^x}+2} \right) dx = \int\limits_0^{\ln 4} e^x dx + \int\limits_0^{\ln 4} \frac{1}{\sqrt{e^x}+2} dx$

$J_1 = \int\limits_0^{\ln 4} e^x dx = e^x\Big|_0^{\ln 4} = 3$

$J_2 = \int\limits_0^{\ln 4} \frac{1}{\sqrt{e^x}+2} dx;\ t = \sqrt{e^x} \Rightarrow t^2 = e^x \Rightarrow 2tdt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{2}{t} dt$

$\Rightarrow J_2 = \int\limits_1^2 \frac{2}{t(t+2)} dt = \ln\left(\frac{t}{t+2}\right)\Bigg|_1^2 = \ln\frac{3}{2}$

Vậy $J = J_1 + J_2 = 3 + \ln\frac{3}{2}$

$3/K = \int\limits_1^2 \frac{x^2-1}{x^2} \ln x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{x^2-1}{x^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x + \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow K = \left(x + \frac{1}{x}\right)\ln x\Bigg|_1^2 - \int\limits_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x} dx$

$$\Rightarrow K=\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x\Bigg|_1^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^2=\frac{5}{2}\ln 2-\frac{3}{2}$$

Ví dụ 5. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau

a) $y=x^2$, trục hoành và hai đường thẳng x=0, x=2.

b) $y=x^2$, $y=-2x+3$ và hai đường thẳng x =0, x=2.

c) $y=x^2,\ y=x+2$

Lời giải

a) $y=x^2$, trục hoành và hai đường thẳng x= 0, x=2.

- ✓ Trên [0; 2] ta có $x^2=0\Leftrightarrow x=0\in[0;2]$
- ✓ Diện tích của hình phẳng đã cho:

$$S=\int_0^2\left|x^2\right|dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2=\frac{8}{3}$$

b) Đặt $f_1(x)=x^2,\ f_2(x)=-2x+3$

Ta có: $f_1(x)-f_2(x)=0\Leftrightarrow x^2-(-2x+3)=0\Leftrightarrow x^2+2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in[0;2]\\x=-3\notin[0;2]\end{array}\right.$

- ✓ Diện tích hình phẳng đã cho

$$S=\int_0^2|x^2+2x-3|\,dx$$
$$=\left|\int_0^1(x^2+2x-3)dx\right|+\left|\int_1^2(x^2+2x-3)dx\right|$$
$$=\left|\left(\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right)\Bigg|_0^1\right|+\left|\left(\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right)\Bigg|_1^2\right|$$
$$=\left|\frac{1}{3}-2\right|+\left|\frac{8}{3}+4-6-\frac{1}{3}-1+3\right|=\frac{5}{3}+\frac{7}{3}=4$$

c) Ta có: $x^2-(x+2)=0\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng

$$S=\int_{-1}^2|x^2-x-2|\,dx=\left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right)\Bigg|_{-1}^2\right|=\left|\frac{8}{3}-2-4+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right|=\frac{9}{2}$$

Ví dụ 6. Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi quay hình (D) quanh trục Ox biết (D) giới hạn bởi $y=1-x^2,\ y=0$

Lời giải

- ✓ Ta có: $1-x^2=0\Leftrightarrow x=\pm 1$

✓ Áp dụng công thức: $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$

✓ Ta có: $V=\pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)^2\,dx=\pi\int_{-1}^{1}\left(1-2x^2+x^4\right)dx=\pi\left(x-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1}$

$$=\pi\left[\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)-\left(-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)\right]=\pi\left(2-\frac{4}{3}+\frac{2}{5}\right)=\frac{16\pi}{15}$$

CASIO XỬ GỌN NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

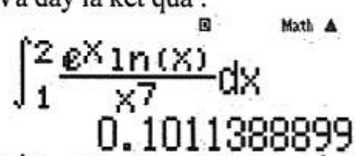
Tính nguyên hàm – tích phân

a. Tích phân xác định: Dạng này khá đơn giản các em chỉ cần nhập trực tiếp tích phân cần tính và bấm = để ra KQ

Ví dụ 1: Tính tích phân sau: $\int_1^2 e^x\frac{\ln x}{x^7}dx$

Các em nhập như sau:

Và đây là kết quả :



Để lưu lại giá trị tích phân để tiện cho việc so sánh các em lưu vào A bằng cách:

Ví dụ áp dụng

Trích đề mẫu 2016:

1.Tính tích phân: $I=\int_0^2\frac{5x+7}{x^2+3x+2}dx$

A. $2\ln3+3\ln2$ B. $2\ln2+3\ln3$ C. $2\ln2+\ln3$ D. $2\ln3+\ln4$

2. Tích phân: $I=\int_1^2 x^2\ln x dx$ có giá trị bằng :

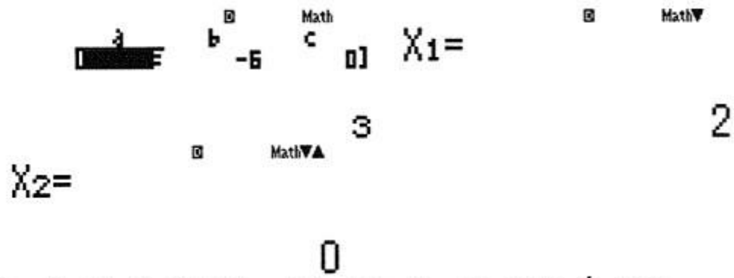
A. $\frac{8}{3}\ln2-\frac{7}{3}$ B. $8\ln2-\frac{7}{3}$ C. $\frac{8}{3}\ln2-\frac{7}{9}$ D. $24\ln2-7$

Ví dụ 2: Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số có phương trình: $y=-x^2+2x+1, y=2x^2-4x+1$

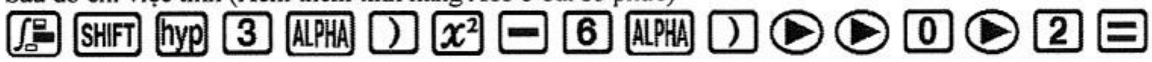
Trước hết ta tìm hoành độ giao điểm để biết cận đã:

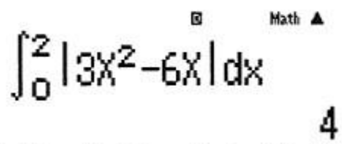
Giải : $(2x^2-4x+1)-(-x^2+2x+1)=0$

(Các loại khác không phải bậc 2 hay 3 thì các em giải như phần ở HD ở phía dưới tài liệu về PT-BPT)



Sau đó chỉ việc tính (Xem thêm tính năng Abs ở bài số phức)



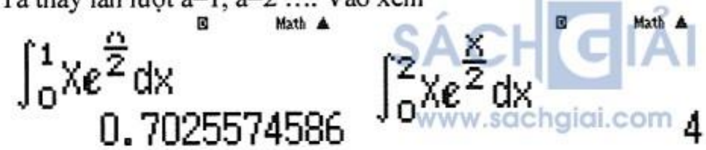


b. Nguyên hàm : tích phân không có cận, do đó ta phải cho nó giá trị của cận tùy ý

Ví dụ 1: Tìm a>0 sao cho : $I = \int_0^a x e^{\frac{x}{2}} dx = 4$ rồi điền vào chỗ trống

Thông thường họ sẽ cho a nguyên vì là họ chấm bằng máy nên để số đẹp thì máy dễ chấm hơn là số xấu.

Ta thay lần lượt a=1, a=2 …. Vào xem

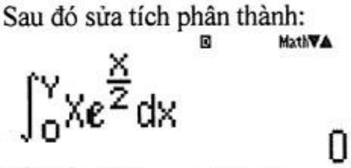


Vậy ta được a =2

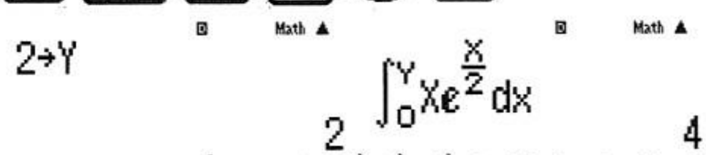
Để đỡ phải edit nhiều lần thì các em sửa thành:

Đầu tiên gán 1 vào Y bằng cách:

Sau đó sửa tích phân thành:



Rồi bấm "=" xem KQ là bao nhiêu, sau đó các em lại gán 2 rồi 3… cho ddến khi đúng kết quả như yêu cầu:



Như vậy đỡ phải đẩy con trỏ nhiều lần để sửa lại cận của tích phân.

Ví dụ 2: Tìm nguyên hàm của hàm số: $y = xe^{2x}$

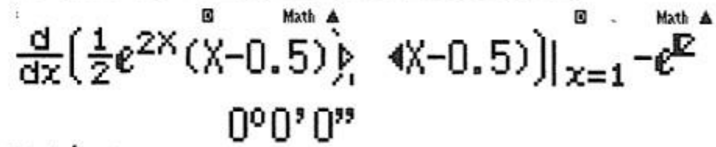
A. $\frac{1}{2}e^{2x}(x-\frac{1}{2})+C$ B. $2e^{2x}(x-2)+C$ C. $2e^{2x}(x-\frac{1}{2})+C$ D. $\frac{1}{2}e^{2x}(x-2)+C$

Ở đây ta có 2 cách tính 1 là sử dụng đạo hàm kết quả (đáp án) rồi so sánh với đề bài, cách 2 là tính xuôi

Rõ ràng ở đây, cách 1 là đơn giản nhất vì máy tính đã có sẵn tính năng tính đạo hàm tại 1 điểm xác định cho các em.

Cách 1: Các em xét đạo hàm tại x=1 của 4 đáp án xem có biểu thức nào bằng: $y(1)=1.e^2$ không?

SHIFT ∫ ▭ 1 ▼ 2 ▶ SHIFT ln 2 ALPHA) ▶ (ALPHA) − 0 . 5) ▶ 1 ▶ − SHIFT ln 2 = °'''

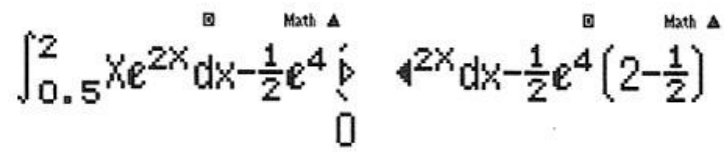


Thì thấy đáp án A đúng

*Cách 2:*Ta có: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$

Các em xét tích phân từ $\frac{1}{2}$ tới 2 để có 1 cái F(…) = 0

Các em xét đáp án A trước nhé:



Vậy các em chọn A nhé.

Tổng kết: Vậy là các em sẽ biến yêu cầu tổng quát của bài toán thành 1 bài tính thông thường bằng cách tự thay số vào cho phù hợp.

Hãy nhớ một bài toán có hai cách làm: Cách làm kiểu tự luận và cách làm kiểu trắc nghiệm dù làm kiểu nào thì cũng phải dùng cách thức Tư duy toán học. Máy tính CASIO nó chỉ là một công cụ hỗ trợ thôi.

Skill CASIO giống như "con dao sắc" mà thầy giao cho các em. Các em dùng nó như thế nào là do các em: Các em có thể dùng nó để gọt hoa quả hoặc thái rau… đừng dùng nó để "giết người''. ☺

ĐỀ THI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tìm I= $\int_1^2 x^2 \ln x dx$ có giá trị bằng:

A. 24ln2 -7 B. $\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}$ C. $8\ln 2-\frac{7}{3}$ D. $\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{3}$

Câu 2: Tính tích phân $I=\int_0^2 \frac{5x+7}{x^2+3x+2}dx$

A. $2\ln 2+3\ln 3$ B. $2\ln 3+3\ln 2$ C. $2\ln 2+\ln 3$ D. $2\ln 3+\ln 4$

Câu 3: Tìm a>0 sao cho $I=\int_0^a xe^{\frac{x}{2}}dx=4$

A. 1 B. 2 C.3 D.4

Câu 4: Tính $A=\int_0^1 \left(2x+e^x\right)dx$

A.e B. e^2 C. e^3 D. e^5

Câu 5: Tính $\int_0^1 2^x\left(e^x+3\right)dx$

A. $\left(\frac{2e-1}{\ln 2e}\right)+\frac{3}{\ln 2}$ B. $\left(\frac{2e-1}{\ln 2e}\right)-\frac{3}{\ln 2}$ C. $\left(\frac{2e}{\ln 2e}\right)+\frac{3}{\ln 2}$ D. $\left(\frac{2e+1}{\ln 2e}\right)+\frac{3}{\ln 2}$

Câu 6: Tính tích phân sau: $I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\left(\sqrt{3}\cos x+\sin x\right)^2}dx$

A. $\frac{1}{4}\ln 6$ B. $\frac{1}{4}\ln 3$ C. $\ln 3$ D. $\frac{1}{4}\ln 2$

Câu 7: Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{3+2\cos x}dx$

A. $\frac{1}{3}\ln\frac{8}{5}$ B. $\frac{1}{3}\ln 5$ C. $\frac{1}{3}\ln\frac{7}{5}$ D. $\frac{1}{3}\ln\frac{6}{5}$

Câu 8: Tính tích phân $I=\int_1^e \left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x dx$

A. $\frac{3}{4}+\frac{e^2}{4}$ B. $\frac{e^2}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{3}{4}-\frac{e^2}{4}$

Câu 9: Tính các nguyên hàm: $I=\int \sin 2x.\sin^3 x.dx$

A. $\frac{2\sin^3 x}{5}+C$ B. $\frac{2\sin^5 x}{5}+C$ C. $\frac{2\sin^2 x}{5}+C$ D. $\frac{2\sin^6 x}{5}+C$

Câu 10: Tìm nguyên hàm $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(x+\sin^2 2x\right)\cos 2x dx$.

A. $\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{6}\sin^3 2x+C$

B. $\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{6}\sin^3 2x+C$

C. $\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{6}\sin^3 2x+C$

D. $\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{6}\sin^3 2x+C$

Câu 11: Tính tích phân $I=\int_1^e \frac{(x^3+1)\ln x+2x^2+1}{2+x\ln x}dx$

A. $\frac{e^3-1}{3}-\ln\frac{e+2}{2}$ B. $\frac{e^3-1}{3}+\ln\frac{e+2}{2}$ C. $\frac{e^3-1}{3}+\ln\frac{e-2}{2}$ D. $\frac{e^3+1}{3}+\ln\frac{e-2}{2}$

Câu 12: Tính tích phân: $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$

A. $\frac{59}{3}+2\ln 2$ B. $\frac{59}{4}-2\ln 2$ C. $\frac{59}{3}-2\ln 2$ D. $\frac{59}{3}+3\ln 2$

Câu 13: Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^3+1}}$.

A. $\frac{1}{3}\ln\frac{3+2\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{1}{3}\ln\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1}{3}\ln\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{4}\ln\frac{3+3\sqrt{2}}{2}$

Câu 14: Tính tích phân : $I=\int_1^e \frac{\ln x-1}{x^2-\ln^2 x}dx$

A. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{e-1}{e+1}\right|$ B. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e+1}{e-1}\right|$ C. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e-1}{e+1}\right|$ D. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{e-1}{e-2}\right|$

Câu 15: Tính tích phân $I=\int_{-1}^{3} \frac{x-3}{3\sqrt{x+1}+x+3}dx$

A. $I=6\ln 3+8$ B. $I=6\ln 3-8$ C. $I=6\ln 3-6$ D. $I=6\ln 3-5$

Câu 16: Tính tích phân $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)-\ln(\sin x+\cos x)}{1+\sin 2x}dx$

A. $\frac{\ln 2-1}{2}$ B. $\frac{\ln 2+1}{2}$ C. $\frac{\ln 3-1}{2}$ D. $\frac{\ln 5-1}{2}$

Câu 17: Tính tích phân: $I=\int_0^{\pi}(2x-1)\sin x\,dx$

A. $2\pi+2$ B. $2\pi-2$ C. 2π D. không có đáp án

Câu 18: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan x}{\cos 2x}dx$

A. $\frac{1}{2}\ln 3$ B. $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$ C. $\frac{1}{2}\ln 2$ D. $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}$

Câu 19: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C): $y=\sqrt{x}\sin x$, các trục Ox, Oy và đường thẳng $x=\frac{\pi}{4}$. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh Ox.

A. $\frac{\pi}{64}(\pi^2-4\pi+8)$ B. $\frac{\pi}{64}(\pi^2+4\pi+8)$ C. $\frac{\pi}{64}(\pi^2-4\pi-8)$ D. $\frac{\pi}{64}(\pi^2-4\pi)$

Câu 20: Tính tích phân $I=\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$

A. $\frac{4}{15}$ B. $\frac{1}{15}$ C. $\frac{4}{25}$ D. $\frac{4}{35}$

Câu 21: Tính tích phân $I=\int_0^1 x(x+e^x)dx$

A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{4}{7}$ D. $\frac{4}{15}$

Câu 22: Tính tích phân : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos^2 x dx$

A. $\frac{\pi^2}{6}$ B. $\frac{\pi^2}{8}$ C. $\frac{\pi^2}{7}$ D. $\frac{\pi^2}{9}$

Câu 23: Tính tích phân $\mathrm{I}=\int_1^e \frac{x^3+\ln x}{x^2}dx$.

A. $\frac{e^2}{2}+\frac{2}{e}+\frac{1}{2}$ B. $\frac{e^2}{2}-\frac{2}{e}+\frac{1}{2}$ C. $\frac{e^2}{2}-\frac{2}{e}-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{e^2}{2}-\frac{2}{e}+\frac{1}{2}$

Câu 24: Tính $I=\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$

A. $-\frac{1}{2}\ln 3\left(3-2\sqrt{2}\right)$ B. $-\frac{1}{2}\ln 3\left(3+2\sqrt{2}\right)$ C. $-\frac{1}{2}\ln 3\left(4-2\sqrt{2}\right)$ D. $-\frac{1}{2}\ln 2\left(3-2\sqrt{2}\right)$

Câu 25: Tính tích phân $I=\int_0^1 x\left(\frac{2}{1+x^2}+e^x\right)dx$

A. $1+3\ln 2$ B. $1+2\ln 2$ C. $1-\ln 2$ D. $1+\ln 2$

Câu 26: Tính tích phân $I=\int_1^5 \frac{1}{x\sqrt{3x+1}}dx$.

A. $2\ln 3-\ln 5$ B. $2\ln 3+\ln 5$ C. $2\ln 3-2\ln 5$ D. $\ln 3-\ln 5$

Câu 27: Tính tích phân: $\mathrm{I}=\int_0^1 \frac{6x+7}{3x+2}dx$.

A. $4+\ln\frac{5}{2}$ B. $3+\ln\frac{5}{2}$ C. $2-\ln\frac{5}{2}$ D. $2+\ln\frac{5}{2}$

Câu 28: Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+\sin^2 x)\cos x dx$.

A. $\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}$ B. $\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$ D. $\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}$

Câu 29: Tính tích phân $I=\int_1^e\left(\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}+3x^2\ln x\right)dx$

A. $\frac{5+2\sqrt{2}+2e^3}{3}$ B. $\frac{5-2\sqrt{2}+2e^3}{3}$ C. $\frac{5-2\sqrt{2}-2e^3}{3}$ D. $\frac{5-2\sqrt{2}+e^3}{3}$

Câu 30: Tính tích phân: $I=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{-2\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{-\sqrt{2}}{3}$

Câu 31: Tính tích phân $I=\int_0^1(1+x)e^x dx$

A. e B. $2e$ C. $4e$ D. $6e$

Câu 32: Tính tích phân $J=\int_1^{\sqrt{6}}x\sqrt{x^2+3}dx$

A. $\frac{19}{3}$ B. $\frac{16}{3}$ C. $\frac{13}{3}$ D. $\frac{10}{3}$

Câu 33: Tính tích phân $I=\int_1^2\frac{x^3-2\ln x}{x^2}dx$.

A. $I=\frac{-1}{2}-\ln 2$ B. $I=\frac{-1}{2}+\ln 2$ C. $I=\frac{1}{2}-\ln 2$ D. $I=\frac{1}{2}+\ln 2$

Câu 34: Tính tích phân $I=\int_0^1(1-x)\left(2+e^{2x}\right)dx$

A. $\frac{e^2+1}{3}$ B. $\frac{e^2-1}{4}$ C. $\frac{e^2+1}{5}$ D. $\frac{e^2+1}{4}$

Câu 35: Tính tích phân: $I=\int_1^e 2x(1-\ln x)\,dx$

A. $\frac{e^2-1}{3}$ B. $\frac{e^2-3}{3}$ C. $\frac{e^2-3}{2}$ D. $\frac{e^2+3}{2}$

Câu 36: Tính $I=\int_1^2\frac{1+x\ln x}{x^2}dx$

A. $I=\frac{1+\ln^2 2}{3}$ B. $I=\frac{1-\ln^2 2}{2}$ C. $I=\frac{1+\ln^2 2}{2}$ D. $I=\frac{1+\ln^2 3}{3}$

Câu 37: Tính tích phân: $I=\int_1^2 x(\sqrt{x+1}-\ln x)dx$

A. $\frac{8}{5}\sqrt{3}-\frac{4}{15}\sqrt{2}+2\ln 2-\frac{3}{4}$ B. $\frac{8}{5}\sqrt{3}+\frac{4}{15}\sqrt{2}+2\ln 2-\frac{3}{4}$

C. $\frac{8}{5}\sqrt{3}-\frac{4}{15}\sqrt{2}-2\ln 2-\frac{3}{4}$ D. $\frac{8}{5}\sqrt{3}+\frac{4}{15}\sqrt{2}+2\ln 2+\frac{3}{4}$

Câu 38: Tính tích phân: $I=\int_0^{\pi}(1+\cos x)x\,dx$

A. $\frac{\pi^2}{4}-2$ B. $\frac{\pi^2}{3}-2$ C. $\frac{\pi^2}{2}+2$ D. $\frac{\pi^2}{2}-2$

Câu 39: Tính tích phân: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\tan x+2}}{\cos^2 x}dx$.

A. e^3-3e^2 B. e^3+e^2 C. e^3-e^2 D. e^3-2e^2

Câu 40: Tính tích phân : $I=\int_1^2\frac{x^2-1}{\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+3x+1\right)}dx$.

A. $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{15}{11}\right)$ B. $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{13}{11}\right)$ C. $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{16}{11}\right)$ D. $\frac{1}{4}\ln\left(\frac{17}{11}\right)$

Câu 41: Tính tích phân $I=\int_1^e\frac{\ln x+1}{x\ln x+1}dx$.

A. $\ln(e+1)$ B. $\ln(e-1)$ C. $\ln(2e+1)$ D. $\ln(e-2)$

Câu 42: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-3x+2$ và $y=x-1$

A. $\frac{4}{7}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{4}{5}$

Câu 43: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{e^x+1}$,trục hoành, x = ln3 và x = ln8.

A. $2+\ln\left(\frac{5}{2}\right)$ B. $2-\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ C. $2+\ln\left(\frac{3}{2}\right)$ D. $2+\ln\left(\frac{7}{2}\right)$

Câu 44: Tính $I=\int_1^2\frac{1+x\ln x}{x^2}dx$

A. $I=\frac{1+\ln^2 2}{2}$ B. $I=\frac{1-\ln^2 2}{2}$ C. $I=\frac{1+\ln 2}{2}$ D. $I=\frac{1-\ln 2}{2}$

Câu 45: Tìm hệ số của e^2 khi tính tích phân : $I=\int_1^e 2x(1-\ln x)\,dx$

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$

Câu 46: Tìm hệ số của π^2 khi tính tích phân: $I=\int_0^{\pi}(1+\cos x)x\,dx$

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$

Câu 47: Tìm hệ số của e^2 khi tính tích phân: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\tan x+2}}{\cos^2 x}dx$.

A. 1 B. 2 C. 3 D. -1

Câu 48: Cho $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{3\sin x+1}\,dx$. Tính I – 5/9

A.1 B.2 C. 3 D. -1

Câu 49: Tính nguyên hàm sau: $I=\int x\sqrt{x^2+3}dx$

A. $\frac{(\sqrt{x^2+3})^3}{3}+C$ B. $\frac{(\sqrt{x^2-3})^3}{3}+C$ C. $\frac{(\sqrt{x^2-1})^3}{3}+C$ D. $\frac{(\sqrt{x^2+2})^3}{3}+C$

Câu 50: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=x^2-2x, x=0, x=3$ và trục hoành.

A. $\frac{8}{3}$ B $\frac{7}{3}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\frac{4}{3}$

ĐÁP ÁN TÍCH PHÂN, NGUYÊN HÀM VÀ ỨNG DỤNG

1B	2B	3B	4A	5A	6B	7A	8A	9B	10A
11B	12A	13B	14C	15B	16A	17D	18B	19A	20A
21A	22B	23B	24A	25D	26A	27D	28A	29B	30A
31A	32A	33D	34D	35C	36C	37A	38D	39C	40A
41A	42B	43C	44A	45A	46B	47D	48A	49A	50A

Chuyên Đề Lượng Giác

1. Hệ thức lượng giác

$+\quad \sin^2 a+\cos^2 a=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin^2 a=1-\cos^2 a\\ \cos^2 a=1-\sin^2 a\end{array}\right.$

$+\ \tan a=\dfrac{\sin a}{\cos a};\ \cot a=\dfrac{\cos a}{\sin a};\ \tan a.\cot a=1$

$+\ 1+\tan^2 a=\dfrac{1}{\cos^2 a};\ 1+\cot^2 a=\dfrac{1}{\sin^2 a}.$

2. Công thức cộng

$+\ \sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$

$+\ \sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$

$+\ \cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

$+\ \cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$

$+\ \tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}$

$+\ \tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b}$

3. Công thức biến đổi tổng thành tích

$\sin a+\sin b=2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2};\quad \sin a-\sin b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$

$\cos a+\cos b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2};\quad \cos a-\cos b=-2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$

$\tan a+\tan b=\dfrac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b};\ \tan a-\tan b=\dfrac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}$

Trường hợp đặc biệt:

$\sin a+\cos a=\sqrt{2}\sin\left(a+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(a-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\sin a-\cos a=\sqrt{2}\sin\left(a-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos\left(a+\dfrac{\pi}{4}\right)$

4. Công thức biến đổi tích thành tổng

$\sin a\sin b=\dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right];\ \cos a.\cos b=\dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]$

$\sin a\cos b=\dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right];\ \cos a\sin b=\dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b)-\sin(a-b)\right]$

5. Công thức nhân đôi, nhân ba.

$\begin{cases}\sin 2a=2\sin a\cos a\\ \sin 2a=(\sin a+\cos a)^2-1\\ \sin 2a=1-(\sin a-\cos a)^2\end{cases}\qquad \begin{cases}\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a\\ \cos 2a=2\cos^2 a-1\\ \cos 2a=1-2\sin^2 a\end{cases}$

$$\begin{cases} \tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a} \\ \cot 2a = \dfrac{\cot^2 a - 1}{2\cot a} \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \tan\dfrac{a}{2}, \sin a = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \tan a = \dfrac{2t}{1-t^2}, \cos a = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$; $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

6. Công thức hạ bậc

$\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$; $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$; $\sin a\cos a = \dfrac{1}{2}\sin 2a$; $\tan^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$;

$\sin^3 a = \dfrac{-\sin 3a + 3\sin a}{4}$; $\cos^3 a = \dfrac{\cos 3a + 3\cos a}{4}$; $\tan^3 a = \dfrac{-\sin 3a + 3\sin a}{\cos 3a + 3\cos a}$

Chú ý: * Công thức góc liên quan đặc biệt

$+\ \sin(-a) = -\sin a$ $\qquad$ $+\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$

$\cos(-a) = \cos a$ $\qquad$ $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$

* Công thức mũ

$+\sin^6 a + \cos^6 a = 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2a$

$\sin^4 a + \cos^4 a = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2a$

II. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

1. $\sin x = a$, điều kiện $-1 \le a \le 1$

Đặt $a = \sin\alpha \Rightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right.$; $k \in Z$

Trường hợp đặc biệt:

$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$; $k \in Z$

$\sin x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$; $k \in Z$

$\sin x = -1 \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$; $k \in Z$

2. $\cos x = a$, điều kiện $-1 \le a \le 1$

Đặt $a = \cos\alpha \Rightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right.$; $k \in Z$

Trường hợp đặc biệt:

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in Z$

$\cos x = 1 \Rightarrow x = k2\pi$; $k \in Z$

$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + k2\pi$; $k \in Z$

3. $\tan x = a;\ a \in R\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in Z$

Đặt $a = \tan\alpha \Rightarrow \tan x = \tan\alpha \Rightarrow x = \alpha + k\pi;\ \ k \in Z$

Trường hợp đặc biệt:

$\tan x = 0 \Rightarrow x = k\pi\ ;\ k \in Z$

$\tan x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\ ;\ k \in Z$

$\tan x = -1 \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\ ;\ k \in Z$

4. $\cot x = a;\ a \in R,\quad x \neq k\pi;\ k \in Z$

Đặt $a = \cot\alpha \Rightarrow \cot x = \cot\alpha \Rightarrow x = \alpha + k\pi;\ \ k \in Z$

Trường hợp đặc biệt:

$\cot x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ ;\ k \in Z$

$\cot x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\ ;\ k \in Z$

$\cot x = -1 \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\ ;\ k \in Z$

III. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ SỞ

a) Phương trình cổ điển

$$a\sin x + b\cos x = c;\ a^2 + b^2 \geq c^2\ \ (1)$$

__Cách giải.__ $(1) \Leftrightarrow \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \cos(x-\alpha)$

Với $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha;\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha;\ \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta \Rightarrow x = \alpha \pm \beta + 2k\pi$

__Chú ý__: (1) có nghiệm $\Leftrightarrow c^2 \leq a^2 + b^2$

b. Phương trình đối xứng:

$$a(\sin x + \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0$$
$$a(\sin x - \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0$$

Bước 1. Đặt

$$\left[\begin{array}{l} t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right] \Rightarrow \sin x\cos x = \dfrac{1}{2}(t^2-1) \\ t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right] \Rightarrow \sin x\cos x = \dfrac{1}{2}(1-t^2) \end{array}\right.$$

Biến đổi đưa về phương trình bậc 2 ẩn t.

Bước 2. Giải phương trình bậc 2 ẩn t. Từ đó suy ra nghiệm x.

Ví dụ minh họa

__**Ví dụ 1:**__ Tìm nghiệm của phương trình: $4\sin^3 x\cos 3x + 4\cos^3 x\sin 3x + 3\sqrt{3}\cos 4x = 3$

A. $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2} \\ x=-\dfrac{\pi}{24}+k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2} \\ x=\dfrac{\pi}{24}+k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2} \\ x=-\dfrac{\pi}{24}+k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2} \\ x=-\dfrac{\pi}{24}+k\pi \end{array}\right.$

<u>Giải:</u>

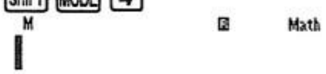
$\Leftrightarrow \sin 4x+\sqrt{3}\cos 4x=1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin 4x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 4x=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(4x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow 4x-\dfrac{\pi}{6}=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,\ k\in Z$

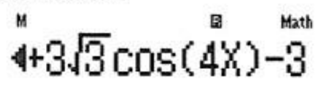
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2} \\ x=-\dfrac{\pi}{24}+k\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.;\ k\in Z$

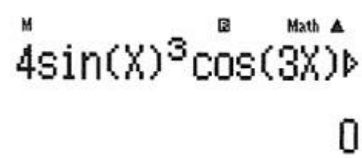
Trắc nghiệm:

Các em nhớ là trước khi dùng CALC thì điều đầu tiên là phải đổi sang đơn vị đo là radian :

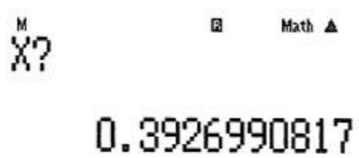


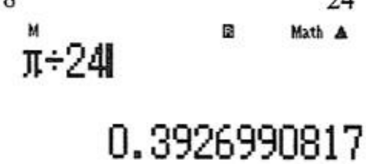
Sau đó chúng ta dùng CALC để thử lần lượt từng đáp án, chú ý tới sự khác nhau giữa các đáp án nhé các em:

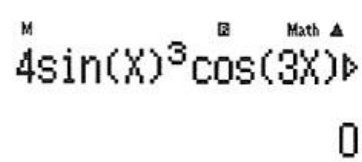




Vậy là phương trình có nghiệm $\dfrac{\pi}{8}$ tiếp theo mình thử với $-\dfrac{\pi}{24}$

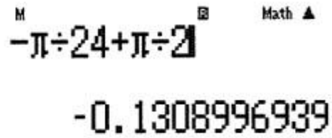


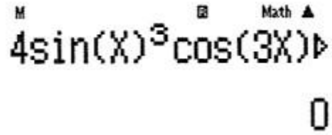




Vậy $-\dfrac{\pi}{24}$ cũng là nghiệm nên chỉ có thể A hoặc D đúng nhưng các em lên chú ý:

Một đáp án là $x=-\dfrac{\pi}{24}+k\dfrac{\pi}{2}$, một đáp án lại là $x=-\dfrac{\pi}{24}+k\pi$ từ đó chúng ta sẽ chọn k=1 xem $x=-\dfrac{\pi}{24}+k\dfrac{\pi}{2}$ có thỏa mãn hay không:





Vậy là có thỏa mãn nên ta sẽ chọn A

Ví dụ 2: Nghiệm của phương trình: $4\sin^3 x - 1 = 3\sin x - \sqrt{3}\cos 3x$

A. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{18} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \end{array}\right.$

Giải:

$\sqrt{3}\cos 3x - (3\sin x - 4\sin^3 x) = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 3x - \sin 3x = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x - \frac{1}{2}\sin 3x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi;\ k \in Z$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.;\ k \in Z$

Ví dụ 3: Tìm m để phương trình sau có nghiệm $2m(\cos x + \sin x) = 2m^2 + \cos x - \sin x + \frac{3}{2}$

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{-1}{2}$ C. $\pm\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

Giải:

PT $\Leftrightarrow (2m+1)\sin x + (2m-1)\cos x = 2m^2 + \frac{3}{2}$

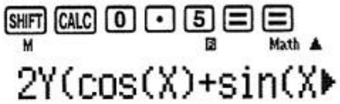
Để phương trình đã cho có nghiệm, ta phải có: $(2m+1)^2 + (2m-1)^2 \geq \left(2m^2 + \frac{3}{2}\right)^2$

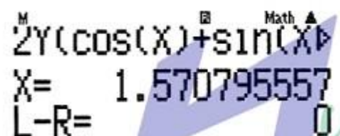
$\Leftrightarrow (4m^2 - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (4m^2 - 1)2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\frac{1}{2}$

Với hình thức trắc nghiệm để xử lí được bài này các em làm như sau : **SOLVE**

Các em cho $m = \frac{1}{2}$ rồi tiến hành Solve xem có nghiệm không

SHIFT CALC 0 • 5 = =





Vậy là $m = \frac{1}{2}$ thỏa mãn do đó các em xét lần lượt $m = -\frac{1}{2}$ và cuối cùng chọn C

Ví dụ 4: Cho $\tan\alpha = 3$. Tính giá trị biểu thức $M = \dfrac{3\sin\alpha - 2\cos\alpha}{5\sin^3\alpha + 4\cos^3\alpha}$

A. $\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{139}{70}$ C. $\dfrac{70}{139}$ D. $\dfrac{54}{139}$

Hướng dẫn:

Tự luận:

$$M = \frac{3\sin\alpha\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) - 2\cos\alpha\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)}{5\sin^3\alpha + 4\cos^3\alpha}$$

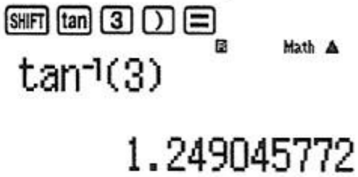
$$= \frac{3\sin^3\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha + 3\sin\alpha\cos^2\alpha - 2\cos^3\alpha}{5\sin^3\alpha + 4\cos^3\alpha}$$ (chia tử và mẫu cho $\cos^3\alpha$)

$$= \frac{3\tan^3\alpha - 2\tan^2\alpha + 3\tan\alpha - 2}{5\tan^3\alpha + 4}$$

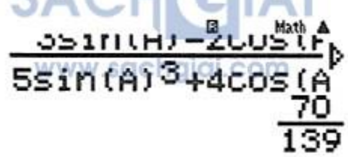
Trắc nghiệm

Các em sử dụng máy tính để tính ra góc α

SHIFT tan 3) =



SHIFT RCL (−)



Bài tập rèn luyện

Bài 1: Giải phương trình: $(\sin x + \cos x)^3 - \sqrt{2}(\sin 2x + 1) + \sin x + \cos x - \sqrt{2} = 0$

A. $x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ B. $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ C. $x = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$ D. $x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi$

Giải:

PT $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^3 - \sqrt{2}(\sin x + \cos x)^2 + \sin x + \cos x - \sqrt{2} = 0$

Đặt: $\sin x + \cos x = t, -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$

Phương trình $\Leftrightarrow t^3 - \sqrt{2}t^2 + t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow (t - \sqrt{2})(t^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

$\Leftrightarrow x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi;\ k \in Z$.

Bài 2: Giải phương trình: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos 9x$

A. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{32}+k\frac{\pi}{4} \\ x=\frac{\pi}{40}+k\frac{\pi}{5} \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{32}+k\frac{\pi}{4} \\ x=-\frac{\pi}{40}+k\frac{\pi}{5} \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{32}+k\frac{\pi}{4} \\ x=\frac{\pi}{40}+k\frac{\pi}{5} \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{32}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{40}+k\pi \end{array}\right.$

Giải:

$$PT \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos 9x$$

$$\Leftrightarrow \cos 9x=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow 9x=\pm\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{32}+k\frac{\pi}{4} \\ x=\frac{\pi}{40}+k\frac{\pi}{5} \end{array}\right. \quad k\in Z$$

Bài 3: Giải phương trình: $2\sin 4x=\sin x+\sqrt{3}\cos x$

A. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3} \\ x=-\frac{4\pi}{15}+k\frac{2\pi}{5} \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{9}+k2\pi \\ x=\frac{4\pi}{15}+k2\pi \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3} \\ x=\frac{4\pi}{15}+k\frac{2\pi}{5} \end{array}\right.$

D. $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3} \\ x=-\frac{4\pi}{15}+k\frac{2\pi}{5} \end{array}\right.$

Giải:

$$PT \Leftrightarrow \sin 4x=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x=x+\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 4x=\pi-\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+k2\pi \end{array}\right. \quad k\in Z$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3} \\ x=\frac{4\pi}{15}+k\frac{2\pi}{5} \end{array}\right. ;\ k\in Z$$

Bài 4: Giải phương trình: $\frac{\sqrt{3}}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=8\cos x$

A. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2} \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.$ D. $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2} \\ x=-\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$

$PT \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x+\sin x=8\cos^2 x.\sin x=8(1-\sin^2 x)\sin x=8\sin x-8\sin^3 x$

$PT \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x-\sin x=6\sin x-8\sin^3 x=2(3\sin x-4\sin^3 x)=2\sin 3x$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x=\sin 3x$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\sin 3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=\frac{\pi}{3}-x+k2\pi \\ 3x=\pi-\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+k2\pi \end{array}\right.; k\in Z$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.$; $k\in Z$ (thỏa mãn điều kiện)

Bài 5: Giải phương trình: $\frac{\cos 2x-\cos x}{\sin 2x+\sin x}=\sqrt{3}$

A. $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi \\ x=k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$ B. $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi \\ x=k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$ C. $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi \\ x=k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$

D. $\left[\begin{array}{l} x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi \\ x=k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$

Giải:

Điều kiện: $\sin 2x+\sin x=\sin x(2\cos x+1)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x\neq 0 \\ \cos x\neq -\frac{1}{2} \end{cases}$

$PT \Leftrightarrow \cos 2x - \cos x = \sqrt{3}\left(\sin 2x + \sin x\right)$

$\Leftrightarrow \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = \cos x + \sqrt{3}\sin x \quad \Leftrightarrow 2x + \dfrac{\pi}{3} = \pm\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + k2\pi;\ k \in Z$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right. ;\ k \in Z$$

Bài 6. Cho góc α thỏa mãn: $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ và $\cos\alpha = \dfrac{-\sqrt{10}}{5}$. Tính $A = \dfrac{\cot\alpha}{1 + \cot^2\alpha}$

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{5}$ B. $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$ C. $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$ D. $\dfrac{6}{25}$

Hướng dẫn

Các em phải lấy giá trị sau do $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$

```
-cos⁻¹(-√10/5)+2π
4.027669777
```


Sau đó thay vào tính A

```
1÷tan(A) / (1+(1÷tan(A))²)
0.4898979486
```


Bài 7. Cho $\sin\alpha = \dfrac{3}{7},\ \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của biểu thức $M = \sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha$.

A. $\dfrac{62 - 12\sqrt{10}}{7}$ B. $\dfrac{60 - 12\sqrt{10}}{49}$ C. $\dfrac{61 - 12\sqrt{10}}{49}$ D. $\dfrac{62 - 12\sqrt{10}}{49}$

Hướng dẫn:

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\dfrac{3}{7}\right)^2 = \dfrac{40}{49}$. Do $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos\alpha < 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{2\sqrt{10}}{7}$

$M = 2\sin\alpha\cos\alpha + 2(2\cos^2\alpha - 1) = 2\cdot\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{-2\sqrt{10}}{7} + 2\left(2\cdot\dfrac{40}{49} - 1\right) = \dfrac{62 - 12\sqrt{10}}{49}$

Bài 8. Cho $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}\ (\alpha \in (0; \dfrac{\pi}{2}))$. Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{2\sin\dfrac{\alpha}{2} + 3\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2} + 2\cos\dfrac{\alpha}{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Hướng dẫn

Vì $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ $(\alpha \in (0;\frac{\pi}{2}))$ nên $\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \tan^2\frac{\alpha}{2} + 4\tan\frac{\alpha}{2} - 1 = 0$

Suy ra $\tan\frac{\alpha}{2} = -2+\sqrt{5}$ hoặc $\tan\frac{\alpha}{2} = -2-\sqrt{5}\,(l)$. Do $\tan\frac{\alpha}{2} > 0$.

Thay vào ta có $P = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}+3}{\tan\frac{\alpha}{2}+2} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = 2$

Bài 9. Cho $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của biểu thức: $P = (1+\tan\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$

A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

Hướng dẫn

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\sin\alpha > 0, \cos\alpha < 0$. Ta có:

$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$,

$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = \frac{9}{10} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -3$

Khi đó: $P = (1+\tan\alpha).\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha+\sin\alpha) = (1-3).\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Bài 10. Cho $\tan\alpha = -\frac{1}{2}$ với $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Tính giá trị của biểu thức: $A = \sqrt{5}\cos\alpha - 5\sin 2\alpha$.

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

Hướng dẫn

Do $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \Rightarrow \sin\alpha < 0,\ \cos\alpha > 0$.

Ta có: $1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{4} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \tan\alpha.\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Do đó: $A = \sqrt{5}\cos\alpha - 10\sin\alpha\cos\alpha = \sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + 10\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = 2+4 = 6.$

Bài 11. Cho góc lượng giác α, biết $\tan\alpha = 2$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{\cos 2\alpha - 3}{\sin^2\alpha}$.

A. $\frac{9}{2}$ B. $-\frac{9}{2}$ C. $-\frac{2}{9}$ D. $\frac{2}{9}$

Hướng dẫn

$P=\dfrac{\cos 2\alpha\text{-}3}{\sin^2\alpha}=\dfrac{2\cos^2\alpha-4}{1-\cos^2\alpha}$ $\quad 1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{1}{5}$. Suy ra $\boxed{P=-\dfrac{9}{2}}$

Bài 12. Cho $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$. Hãy tính giá trị biểu thức : $A=\cos 2\alpha-2\sin^2(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2})$

A. $\dfrac{12}{25}$ B. $-\dfrac{12}{25}$ C. $-\dfrac{1}{2}$ D. $\dfrac{1}{2}$

Hướng dẫn

$A=\cos 2\alpha-2\sin^2(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2})=1-2\sin^2\alpha-\left[1-\cos(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)\right]=-2\sin^2\alpha+\sin\alpha$

$A=-2.\dfrac{16}{25}+\dfrac{4}{5}=-\dfrac{12}{25}$

Bài 13. Cho góc α thỏa mãn $5\sin 2\alpha-6\cos\alpha=0$ (1) và $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. Tính giá trị của biểu thức:

$A=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(2015\pi-\alpha)-\cot(2016\pi+\alpha)$

A. $-\dfrac{3}{15}$ B. $\dfrac{2}{15}$ C. $-\dfrac{2}{15}$ D. $\dfrac{3}{15}$

Hướng dẫn

$A=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(2015\pi-\alpha)-\cot(2016\pi+\alpha)$.

Vì $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ nên $\cos\alpha>0$, $\cot\alpha>0$.

(1) $\Leftrightarrow 10\sin\alpha.\cos\alpha-6\cos\alpha=0\Leftrightarrow\cos\alpha.(5\sin\alpha-3)=0\Leftrightarrow\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ (vì $\cos\alpha>0$)

$\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}-1=\dfrac{25}{9}-1=\dfrac{16}{9}\Rightarrow\cot\alpha=\dfrac{4}{3}$ (vì $\cot\alpha>0$)

$A=\sin\alpha+\sin\alpha-\cot\alpha=2\sin\alpha-\cot\alpha=2.\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{3}=-\dfrac{2}{15}$

Bài 14. Tính giá trị của biểu thức $A=\sin 3\alpha+\sin^2 2\alpha$, biết $2\cos 2\alpha+7\sin\alpha=0$.

A. $\dfrac{29}{63}$ B. $-\dfrac{29}{63}$ C. $\dfrac{29}{64}$ D. $-\dfrac{29}{64}$

Hướng dẫn

$2\cos 2\alpha+7\sin\alpha=0\Leftrightarrow 2(1-2\sin^2\alpha)+7\sin\alpha=0\Leftrightarrow\sin\alpha=-\dfrac{1}{4},\sin\alpha=2$ (loại).

$A=\sin 3\alpha+\sin^2 2\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha+4\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)$

$=3\left(-\dfrac{1}{4}\right)-4\left(-\dfrac{1}{4}\right)^3+4\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2\left[1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2\right]=-\dfrac{29}{64}$. Vậy $A=-\dfrac{29}{64}$.

Bài 15. Cho góc α thỏa mãn $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ và $\cos\alpha=-\dfrac{2}{3}$. Tính giá trị biểu thức $A=\sin 2\alpha+\cos 2\alpha$

A. $-\frac{1-4\sqrt{5}}{9}$ B. $-\frac{1+4\sqrt{5}}{9}$ C. $\frac{1-4\sqrt{5}}{9}$ D. $\frac{1+4\sqrt{5}}{9}$

Hướng dẫn

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\sin\alpha > 0$. Do đó $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-\frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Vậy $P = 2\sin\alpha.\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = 2.\frac{\sqrt{5}}{3}.(-\frac{2}{3}) + 2(-\frac{2}{3})^2 - 1 = -\frac{1+4\sqrt{5}}{9}$

Bài 16. Cho α là góc thỏa mãn $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tính $P = \sin 2\alpha$.

A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

Hướng dẫn

Từ giả thiết $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + 2\sin\alpha.\cos\alpha = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2\sin\alpha.\cos\alpha = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2\alpha = -\frac{1}{2}$

Vậy $P = \sin 2\alpha = -\frac{1}{2}$

Bài 17. Cho góc α thỏa $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}, \tan\alpha = 2$. Tính $A = \sin 2\alpha + \cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$.

A. $-\frac{4-2\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{4-2\sqrt{5}}{5}$ C. $-\frac{4+2\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{4+2\sqrt{5}}{5}$

Hướng dẫn

$\tan\alpha = 2 \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$

$A = 2\sin\alpha.\cos\alpha - \sin\alpha = \frac{4+2\sqrt{5}}{5}$

Bài 18. Biết $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ và $0^0 < \alpha < 90^0$. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{\cot\alpha + \tan\alpha}{\cot\alpha - \tan\alpha}$

A. $-\frac{25}{7}$ B. $\frac{24}{7}$ C. $\frac{25}{7}$ D. $-\frac{24}{7}$

Hướng dẫn

Biến đổi được $A = \frac{1}{2\cos^2\alpha - 1}$ Thay $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, ta được $A = \frac{25}{7}$

Bài 19. Cho góc α thoả mãn $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ và $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. Tính giá trị biểu thức $A = \frac{\tan\alpha - 1}{2 - \cos 2\alpha}$.

A. $\frac{175}{172}$ B. $-\frac{175}{172}$ C. $-\frac{175}{171}$ D. $\frac{175}{171}$

Hướng dẫn

Ta có: $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{3}{5}$

Vì $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$

$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{3}{4}$ và $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{32}{25} - 1 = \frac{7}{25}$

Vậy $A = \dfrac{-\frac{3}{4} - 1}{2 - \frac{7}{25}} = -\frac{175}{172}$

Bài 20. *Cho* $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \sin\alpha = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \sin 2\alpha + \cos 2\alpha$.

A. $\frac{16-10\sqrt{2}}{13}$ B. $-\frac{16-10\sqrt{2}}{13}$ C. $\frac{16+10\sqrt{2}}{13}$ D. $\frac{7-4\sqrt{2}}{9}$

Hướng dẫn

Ta có $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \frac{8}{9}$

Vì $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ nên $\cos\alpha < 0$, do đó $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Khi đó, $P = \sin 2\alpha + \cos 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha + 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{7-4\sqrt{2}}{9}$

Bài 21. Cho *tan a = 2*. Tính giá trị biểu thức: $E = \dfrac{8\cos^3 a - 2\sin^3 a + \cos a}{2\cos a - \sin^3 a}$

A. $-\frac{32+8\sqrt{2}}{29}$ B. $\frac{32+8\sqrt{2}}{29}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

Hướng dẫn

Chia cả tử và mẫu cho $\cos^3 x \neq 0$ ta được:

$$E = \dfrac{8 - 2\tan^3 a + \dfrac{1}{\cos^2 a}}{\dfrac{2}{\cos^2 a} - \tan^3 a} = \dfrac{8 - 2\tan^3 a + 1 + \tan^2 a}{2\left(1 + \tan^2 a\right) - \tan^3 a}$$

Thay *tan a* = 2 ta được: $E = -\frac{3}{2}$

CHUYÊN ĐỀ XÁC SUẤT –TỔ HỢP - NEWTON

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Xét thí nghiệm gieo quân xúc sắc 6 mặt (có thể gieo một con, hai con hoặc nhiều quân xúc sắc) và xét số chấm xuất hiện, ta có các khái niệm sau đây:

1. Phép thử ngẫu nhiên

Phép thử ngẫu nhiên là một thí nghiệm có kết quả mang tính chất ngẫu nhiên mà ta không thể biết chắc được kết quả sẽ xảy ra nhưng có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử.

Ví dụ: Việc gieo quân xúc sắc là một phép thử ngẫu nhiên.

2. Không gian mẫu

Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử ngẫu nhiên gọi là không gian mẫu. Không gian mẫu thường được kí hiệu là E hoặc Ω.

Ví dụ: Nếu gieo một quân xúc sắc thì không gian mẫu E là {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Nếu gieo lần lượt hai quân xúc sắc thì không gian mẫu E là:

{(1; 1), (1;2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (2; 6), (3; 1), (3;2), (3; 3), (3; 4), (3; 5), (3; 6), (4; 1), (4;2), (4; 3), (4; 4), (4; 5), (4; 6), (5; 1), (5;2), (5; 3), (5; 4), (5; 5), (5; 6), (6; 1), (6;2), (6; 3), (6; 4), (6; 5); (6; 6)}

3. Biến cố

Mỗi tập hợp con của không gian mẫu là một biến cố. Mỗi phần tử của biến cố A gọi là một kết quả thuận lợi cho A.

Ví dụ: Biến cố để gieo lần lượt 2 quân xúc sắc có tổng 5 là: {(1; 4), (4; 1), (2; 3), (3; 2)}.

4. Các loại biến cố

4.1. Biến cố sơ cấp

Mỗi phần tử của không gian mẫu là một biến cố sơ cấp.

Ví dụ (1; 2) là biến cố sơ cấp

4.2. Biến cố chắc chắn

Không gian mẫu E còn gọi là biến cố chắc chắn, tức là biến cố luôn luôn xảy ra khi thực hiện phép thử ngẫu nhiên.

Ví dụ: Biến cố để gieo 2 quân xúc sắc có tổng lớn hơn hoặc bằng 2 và nhỏ hơn hoặc bằng 12 là biến cố chắc chắn.

4.3. Biến cố không thể

Biến cố không thể là biến cố không bao giờ xảy ra khi thực hiện phép thử ngẫu nhiên. Biến cố không thể kí hiệu là $\varnothing$.

Ví dụ: Biến cố để gieo 2 quân xúc sắc có tổng lớn hơn 12 là biến cố không thể.

4.4. Biến cố hợp

Biến cố $A \cup B$ là biến cố "ít nhất có A hoặc B xảy ra" gọi là hợp của hai biến cố A và B.

Biến cố $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$ gọi là hợp của k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$

Ví dụ: Gọi A là biến cố để gieo lần lượt 2 quân xúc sắc có tổng lớn hơn 10 và B là biến cố để gieo 2 quân xúc sắc có tổng nhỏ hơn 4.

Khi đó biến cố $A \cup B$ là { (6; 5), (5; 6), (6; 6), (1; 1), (1; 2), (2; 1)}

4.5. Biến cố giao

Biến cố $A \cap B$ là biến cố " cả A và B cùng xảy ra".

Biến cố $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k$ là biến cố "$A_1, A_2, ..., A_k$ cùng xảy ra" gọi là giao của biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$.

Ví dụ: Gọi A là biến cố để gieo 2 quân xúc sắc có tổng lớn hơn 7 và B là biến cố để gieo 2 quân xúc sắc có tổng nhỏ hơn 10.

Khi đó biến cố $A \cap B$ là {(2; 6), (6; 2), (3; 5), (5; 3), (4; 4), (4; 5), (5; 4); (3; 6), (6; 3)}

4.6. Biến cố xung khắc

Hai biến cố A và B gọi là xung khắc nếu khi biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra, tức là $A \cap B \neq 0$

Ví dụ: Biến cố A gieo 2 quân xúc sắc có tổng lớn hơn 10 và biến cố B gieo 2 quân xúc sắc có tổng nhỏ hơn 4 là hai biến cố xung khắc.

4.7. Biến cố đối

Biến cố đối của biến cố A trong không gian mẫu E, kí hiệu $\overline{A}$ là biến cố gieo 2 quân xúc sắc có tổng là một số lẻ.

4.8. Biến cố độc lập

Hai biến cố A và B của một phép thử ngẫu nhiên gọi là độc lập với nhau nếu sự xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng tới sự xảy ra hay không xảy ra của biến cố kia.

Ví dụ: Khi gieo 2 quân xúc sắc, gọi A, B là biến cố tương ứng để quân xúc sắc đầu tiên và thứ hai nhận được mặt 3. Khi đó A, B độc lập với nhau.

5. Tần số của một biến cố

Số m lần xuất hiện của biến cố A trong n lần thực hiện phép thử ngẫu nhiên gọi là tần số của biến cố A $(0 \leq m \leq n)$

Ví dụ: Khi gieo 16 lần một quân xúc sắc ta thấy có 2 lần xuất hiện mặt lục thì tần số của biến cố quân xúc sắc xuất hiện mặt lục là 2 trong 16 phép thử.

6. Tần số của một biến cố

Tỉ số giữa tần số m của biến cố A và số n lần thực hiện phép thử ngẫu nhiên gọi là tần suất của biến cố A. Kí hiệu $f = \dfrac{m}{n}$.

Ví dụ: Khi gieo 16 lần một quân xúc sắc ta thấy có 2 lần xuất hiện mặt lục thì tần suất của biến cố quân xúc sắc xuất hiện mặt lục là: $f = \dfrac{2}{16} = 0{,}125$.

7. Định nghĩa xác suất

Xác suất của biến cố A là tỉ số giữa số trường hợp thuận lợi cho A và tổng số trường hợp có thể xảy ra trong phép thử ngẫu nhiên:

$$P(A) = \frac{\text{Số trường hợp thuận lợi cho A}}{\text{Tổng số trường hợp có thể xảy ra}}$$

Nếu biến cố A có m phần tử trong không gian mẫu E có n phần tử $(0 \le m \le n)$ thì xác suất của biến cố A là:

$P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{|A|}{|E|}$ (|A| là số phần tử của A,|E| là số phần tử của E).

8. Tính chất

Cho một thí nghiệm ngẫu nhiên có không gian mẫu E và A, B là hai biến cố.

Khi đó $0 \le P(A) \le 1$; $P(E) = 1$; $P(\varnothing) = 0$, A và B xung khắc $\Leftrightarrow A \cap B = 0$

9. Quy tắc tính xác suất

9.1.1. Biến cố xung khắc

Cho A và B là hai biến cố xung khắc. Ta có: $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

Cho k biến cố xung khắc $A_1, A_2, ..., A_k$. Ta có:

$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k)$

9.1.2. Biến cố đối

Cho $\overline{A}$ là biến cố đối của biến cố A. Ta có: $P(\overline{A}) + P(A) = 1 \Leftrightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

9.2. Quy tắc nhân xác suất

9.2.1. Biến cố độc lập

Cho A và B là hai biến cố độc lập với nhau. Ta có: $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Cho k biến cố độc lập $A_1, A_2, ..., A_k$. Ta có:

$P(A_1 \cap A_2 \bigcap ... \cap A_k) = P(A_1).P(A_2)....P(A_k)$

9.2.2. Biến cố xung khắc

Cho A và B là hai biến cố xung khắc.

Ta có: $(A \cap B)$ luôn không xảy ra, nên: $P(A \cap B) = 0$

Ta có A và B xung khắc thì A và B không độc lập nên:

$P(A \cap B) \ne P(A).P(B)$ với P(A) > 0 và P(B) > 0.

9.3. Liên hệ giữa quy tắc cộng xác suất và quy tắc nhân xác suất

Cho A và B là hai biến cố bất kì. Ta có:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Chú ý: Có sách kí hiệu giao của hai biến cố A và B là A.B thay cho $A\cap B$.

Giao của k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ là $A_1.A_2....A_k$.

9.4.Sử dụng CASIO để tính nhanh: hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp

Ở đây để tính nhanh trên máy tính các em làm như sau:

Để tính $C_n^k \to nCk$, Ví dụ C_{10}^3 thì các em nhập:

[1] [0] [SHIFT] [÷] [3] [=]

Math ▲

10C3

120

Để tính giai thừa thì các em bấm như sau: 10!

[1] [0] [SHIFT] [x^{-1}]

Math ▲

10!

Để tính chỉnh hợp A_{10}^3 thì các em bấm như sau :

[1] [0] [SHIFT] [×] [3] [=]

Math ▲

10P3

720

Ví dụ mẫu

__Ví dụ 1:__ Hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 3 quả đỏ và 2 quả xanh, hộp thứ hai chứa 4 quả đỏ và 6 xanh. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp một quả. Tính xác suất sao cho:

a. Cả hai quả đều đỏ

A. 0,24 B. 0,42 C. 0,26 D. 0,62

b .Hai quả cùng màu.

A. 0,28 B. 0,48 C. 0,84 D. 0,82

c.Hai quả khác màu.

A. 0,25 B. 0,26 C. 0,62 D. 0,52

Hướng dẫn

Gọi A: " Quả lấy từ hộp thứ nhất màu đỏ";

B: " Quả lấy từ hộp thứ hai màu đỏ".

Ta thấy A và B độc lập.

a) Cần tính $P(A\cap B)$. Ta có $P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{3}{5}.\frac{4}{10}=0,24$.

b) Cần tính xác suất của: $C=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$

Do tính xung khắc và độc lập của các biến cố, ta có:

$$P(C)=P(A)P(B)+P(\overline{A})P(\overline{B})$$

$$=\frac{3}{5}.\frac{4}{10}+\frac{2}{5}.\frac{6}{10}=0,48$$

c) Cần tính $P(\overline{C})$. Ta có: $P(\overline{C})=1-P(C)=1-0,48=0,52$.

Ví dụ 2: Một hộp đựng 12 viên bi, trong đó có 7 viên màu đỏ và 5 viên màu xanh. Lấy ngẫu nhiên mỗi lần 3 viên bi. Tính xác suất trong 2 trường hợp sau:

a. Lấy được 3 viên bi đỏ.

A. $\frac{7}{44}$ B. $\frac{7}{11}$ C. $\frac{7}{12}$ D. $\frac{7}{33}$

b. Lấy được ít nhất 2 viên bi đỏ.

A. $\frac{7}{44}$ B. $\frac{7}{11}$ C. $\frac{7}{12}$ D. $\frac{7}{33}$

Hướng dẫn

a) $P=\frac{C_7^3}{C_{12}^3}=\frac{7}{44}$

b) $P=\frac{C_7^3}{C_{12}^3}+\frac{C_5^1.C_7^2}{C_{12}^3}=\frac{7}{11}$

Ví dụ 3: Cho 8 quả cân có trọng lượng lần lượt là: 1kg, 2kg,…, 8kg. Chọn ngẫu nhiên 3 quả cân. Tính xác suất để trọng lượng 3 quả cân được chọn không quá 9 kg.

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{2}{8}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{5}{8}$

Hướng dẫn

Gọi A là biến cố chọn được 3 quả cân có tổng trọng lượng không vượt quá 9 kg.

$A=\{(1,2,3);(1,2,4);(1,2,5);(1,2,6);(1,3,4);(1,3,5);(2,3,4)\}$

$\Rightarrow P=\frac{7}{C_8^3}=\frac{1}{8}$

Ví dụ 4: Cho tập hợp $E=\{0,1,2,...,9\}$. Lấy ngẫu nhiên ra 2 phần tử của E. Tìm xác suất để 2 số lấy ra đều chẵn và tổng của chúng nhỏ hơn 7.

A. $\frac{6}{45}$ B. $\frac{4}{45}$ C. $\frac{8}{45}$ D. $\frac{10}{45}$

Hướng dẫn

Gọi A là biến cố để 2 số lấy ra đều chẵn và có tổng nhỏ hơn 7.

$A=\{(0,2);(0,4);(0,6);(0,8)\}$

$\Rightarrow P=\frac{4}{C_{10}^2}=\frac{4}{45}$

Ví dụ 5: Một khách sạn có 6 phòng đơn. Có 10 khách đến thuê phòng, trong đó có 6 nam và 4 nữ. Người quản lý chọn ngẫu nhiên 6 người. Tính xác suất để:

a.Cả 6 người là nam.

A. $\frac{3}{210}$ B. $\frac{1}{210}$ C. $\frac{7}{210}$ D. $\frac{13}{210}$

b.Có 4 nam và 2 nữ.

A. $\frac{3}{7}$ B. $\frac{4}{7}$ C. $\frac{5}{7}$ D. $\frac{6}{7}$

c.Có ít nhất 2 nữ.

A. $\frac{33}{42}$ B. $\frac{25}{42}$ C. $\frac{3}{42}$ D. $\frac{37}{42}$

Hướng dẫn

Có tất cả C_{10}^6 cách chọn ngẫu nhiên.

a) $P = \frac{1}{C_{10}^6} = \frac{1}{210}$

b) $P = \frac{C_6^4.C_4^2}{C_{10}^6} = \frac{3}{7}$

c) $P = \frac{C_6^4.C_4^2 + C_6^3.C_4^3 + C_6^2.C_4^4}{C_{10}^6} = \frac{37}{42}$

Bài tập rèn luyện

Bài 1: Một đoàn tàu có 3 toa đỗ ở một sân ga, có 5 khách lên tàu. Mỗi hành khách độc lập với nhau chọn ngẫu nhiên 1 toa. Tính xác suất để mỗi toa có ít nhất 1 hành khách lên tàu.

A. $\frac{50}{81}$ B. $\frac{40}{81}$ C. $\frac{33}{81}$ D. $\frac{52}{81}$

Hướng dẫn

Có tất cả: 3^5 khả năng xảy ra. Vì chỉ xảy ra 2 trường hợp: $(1;2;2)$ và $(1;1;3)$.

$\Rightarrow P = \frac{3C_5^1.C_4^2 + 3C_5^1.C_4^1.C_3^3}{3^5}$

Bài 2: Một người bỏ ngẫu nhiên 4 lá thư vào 4 bì thư đã đề sẵn địa chỉ. Tính xác suất để ít nhất có 1 lá thư bỏ đúng địa chỉ.

A. $\frac{5}{8}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{7}{8}$

Hướng dẫn

Có tất cả: $4! = 24$ cách bỏ thư vào bì thư.

Có 4 khả năng xảy ra là:

- Cả 4 lá đúng địa chỉ.
- 3 lá đúng địa chỉ.
- 2 lá đúng địa chỉ.
- 1 lá đúng địa chỉ.

$\Rightarrow$ Có: $1 + C_4^3 + C_4^2 + C_4^1 = 1 + 4 + 6 + 4 = 15 \Rightarrow P = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$

Bài 3: Có 30 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Tính xác suất để:

a.Tất cả 10 thẻ đều mang số chẵn.

A. $\frac{1}{10005}$ B. $\frac{1}{10006}$ C. $\frac{2}{10005}$ D. $\frac{1}{10007}$

b.Có đúng 5 thẻ mang số chia hết cho 3.

A. $0,13$ B. $0,26$ C. $0,14$ D. $0,28$

c.Có 5 thẻ mang số lẻ, 5 thẻ mang số chẵn trong đó có 1 số chia hết cho 10.

A. $\frac{108}{8671}$ B. $\frac{108}{8670}$ C. $\frac{110}{8671}$ D. $\frac{100}{8671}$

Hướng dẫn

a. $P=\frac{C_{15}^{10}}{C_{30}^{10}}$; b. $P=\frac{C_{10}^{5}.C_{20}^{5}}{C_{30}^{10}}$; c. $P=\frac{C_{10}^{5}.C_{3}^{1}.C_{12}^{4}}{C_{30}^{10}}$

__Bài 4:__ Một máy bay có 3 bộ phận A, B, C có tầm quan trọng khác nhau. Giả sử các bộ phận A, B, C tương ứng chiếm 15%; 30%; 55% diện tích máy bay. Máy bay bị rơi nếu có 1 viên đạn trúng vào A, hoặc 2 viên trúng vào B hoặc 3 viên trúng vào C. Tính xác suất máy bay bị rơi nếu:

a.Máy bay bị trúng 2 viên đạn.

A. $0,35$ B. $0,36$ C. $0,3675$ D. $0,3$

b.Máy bay bị trúng 3 viên đạn.

A. $0,5$ B. $0,6$ C. $0,7$ D. $0,72775$

Hướng dẫn

a) Gọi A là biến cố: " Có ít nhất 1 viên trúng A"

B là biến cố: " Cả 2 viên trúng B"

$\Rightarrow P(A)=1-(0,3+0,55)^2 \Rightarrow P(A)=1-(0,3+0,55)^2$

$P(B)=(0,3)^2$

$\Rightarrow$ Xác suất máy bay rơi: P = P(A) + P(B) = 0,3675

b) Máy bay không bị rơi khi có: 1 viên vào B và 2 viên vào C. Xác suất của biến cố này là: $3.(0,3)^2.(0,55)^2$

$\Rightarrow P(A)=1-(0,55)^2$; $P(B)=3.(0,3)^2.(0,55)^2$

$\Rightarrow P$ { máy bay rơi} $=1-3.(0,3)^2.(0,55)^2=0,72775$

__Bài 5:__ Hai cầu thủ bóng đá sút phạt đền, mỗi người được sút 1 quả với xác suất bàn tương ứng là: 0,8 và 0,7. Tính xác suất để có ít nhất 1 cầu thủ làm bàn.

A. $0,8$ B. $0,9$ C. $0,94$ D. $0,49$

Hướng dẫn

P{ cả 2 đá trượt} = 0,2.0,3 = 0,06 $\Rightarrow$P=1- 0,06 = 0,94

__Bài 6:__ Trong tuần lễ vừa qua Thành phố có 7 vụ tai nạn giao thông. Tính xác suất để mỗi ngày có 1 tai nạn xảy ra.

A. $0,006$ B. $0,005$ C. $0,004$ D. $0,003$

Hướng dẫn

Có tất cả: 7^7 khả năng xảy ra $\Rightarrow P=\frac{7!}{7^7}$

Bài 7: Gieo đồng thời 3 con xúc sắc. Bạn là người thắng cuộc nếu xuất hiện ít nhất " 2 mặt lục". Tìm xác xuất để trong 5 ván chơi, bạn thắng ít nhất 3 ván.

A. 0,0068 B. 0,0054 C. 0,0042 D. 0,0036

Hướng dẫn

Xác suất thắng trong 1 ván là: $C_3^2.\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{2}{27}$

Xác suất để thắng ít nhất 3 ván là: $C_5^3.\left(\frac{2}{27}\right)^3\left(\frac{25}{27}\right)^2+C_5^4.\left(\frac{2}{27}\right)^4\left(\frac{25}{27}\right)+\left(\frac{2}{27}\right)^5=\frac{52032}{27^5}$

Bài 8: Ở một nước có 50 tỉnh, mỗi tỉnh có 2 Đại biểu Quốc hội. Người ta chọn ngẫu nhiên 50 Đại biểu từ 100 Đại biểu để thành lập 1 Ủy ban. Tính xác suất để trong ủy ban có ít nhất 1 Đại biểu của thủ đô.

A. 0,7423 B. 0,7 C. 0,7324 D. 0,7243

Hướng dẫn

$P=1-\frac{C_{98}^{50}}{C_{100}^{50}}=0,7423$

Bài 9. Đội văn nghệ của nhà trường gồm 4 học sinh lớp 12*A*, 3 học sinh lớp 12*B* và 2 học sinh lớp 12*C*. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh từ đội văn nghệ để biểu diễn trong lễ bế giảng năm học. Tính xác suất sao cho lớp nào cũng có học sinh được chọn và có ít nhất 2 học sinh lớp 12*A*.

A. $\frac{11}{21}$ B. $\frac{12}{21}$ C. $\frac{13}{21}$ D. $\frac{14}{21}$

Hướng dẫn

Gọi không gian mẫu của phép chọn ngẫu nhiên là Ω

Số phần tử của không gian mẫu là: $C_9^5=126$

Gọi A là biến cố "Chọn 5 học sinh từ đội văn nghệ sao cho có học sinh ở cả ba lớp và có ít nhất 2 học sinh lớp 12A".

Chỉ có 3 khả năng xảy ra thuận lợi cho biến cố A là :

+ 2 học sinh lớp 12A, 1 học sinh lớp 12B, 2 học sinh lớp 12C
+ 2 học sinh lớp 12A, 1 học sinh lớp 12B, 2 học sinh lớp 12C
+ 3 học sinh lớp 12A, 1 học sinh lớp 12B, 1 học sinh lớp 12C

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $C_4^2.C_3^1.C_2^2+C_4^2.C_3^2.C_2^1+C_4^3.C_3^1.C_2^1=78$.

Xác suất cần tìm là $P=\frac{78}{126}=\frac{13}{21}$.

Bài 10. Một hộp chứa 20 quả cầu giống nhau gồm 12 quả đỏ và 8 quả xanh. Lấy ngẫu nhiên (đồng thời) 3 quả. Tính xác suất để có ít nhất một quả cầu màu xanh.

A. $\frac{46}{57}$ B. $\frac{47}{57}$ C. $\frac{48}{57}$ D. $\frac{49}{57}$

Hướng dẫn

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=C_{20}^3$

Gọi A là biến cố "Chọn được ba quả cầu trong đó có ít nhất một quả cầu màu xanh"

Thì $\overline{A}$ là biến cố "Chọn được ba quả cầu màu đỏ" $\Rightarrow n\left(\overline{A}\right) = C_{12}^3 \Rightarrow P\left(\overline{A}\right) = \dfrac{C_{12}^3}{C_{20}^3}$

Vậy xác suất của biến cố A là $P\left(A\right) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \dfrac{C_{12}^3}{C_{20}^3} = \dfrac{46}{57}$

Phần Bài toán về Tổ Hợp và Nhị thức Newton

Ví dụ 1. Tìm hệ số của x^4 trong khai triển của $\left(x^3 - \dfrac{2}{x^2}\right)^n$ $(x > 0)$ biết rằng n là số tự nhiên thỏa mãn $A_n^2 + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 92$.

A. 820 B.1120 C. 560 D. 1792

Hướng dẫn:

$$A_n^2 + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 92 \Leftrightarrow n(n-1) + n + \frac{n(n-1)}{2} = 92 \Leftrightarrow 3n^2 - n - 184 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 8 \\ n = -23/3(loai) \end{array}\right.$$

Số hạng tổng quát của khai triển: $T_{k+1} = C_8^k (x^3)^{8-k}\left(\dfrac{-2}{x^2}\right)^k = C_8^k(-2)^k x^{24-5k}$

Số hạng chứa x^4 ứng với k thỏa mãn $24 - 5k = 4 \Leftrightarrow k = 4$

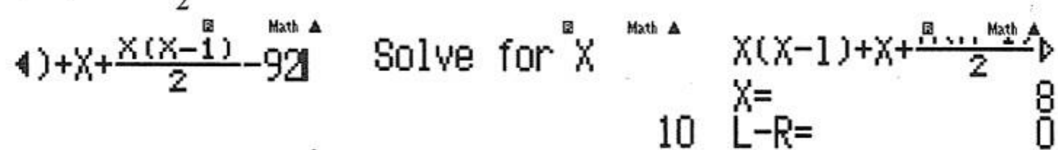
Vậy hệ số của x^4 trong khai triển đã cho là $C_8^4(-2)^4 = 1120$

Trắc nghiệm các em làm như sau:

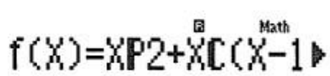
Bước 1: Tìm n $A_n^2 + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 92$ có 2 cách sau:

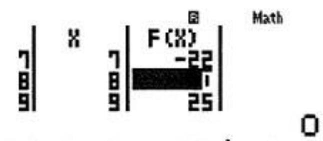
Cách 1: Solve , các em cho giá trị khởi đầu của X là 10 nhé

$n(n-1) + n + \dfrac{n(n-1)}{2} = 92$



Cách 2: Table : Hiệu quả nhất





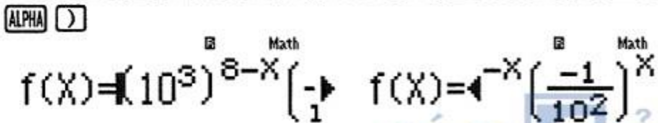
Cách này các em chỉ cần nhập cho đúng đỡ mất công khai triển.
Bước 2: Tìm hệ số của x^4

Theo công thức khai triển $C_8^k(x^3)^{8-k}\left(\frac{-2}{x^2}\right)^k$ khai triển này có 2 phần : phần hệ số $C_8^k(-2)^k$ và phần số mũ $(x^3)^{8-k}\left(\frac{-1}{x^2}\right)^k$

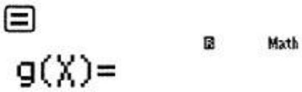
Rất may mắn cho các em thì máy tính 570 vn plus và vinacal đều có 2 bảng là F(x) và G(x) do đó ta sẽ để phần số mũ ở F(x) và phần hệ số ở G(x)
Các em thay $X=10, k=x$ để thay đổi giá trị của k nhé

MODE 7

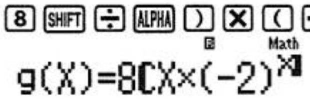
(1 0 $x^■$ 3 ▶) $x^■$ 8 − ALPHA) ▶ ($\frac{■}{■}$ − 1 ▼ 1 0 $x^■$ 2 ▶ ▶) $x^■$ ALPHA)



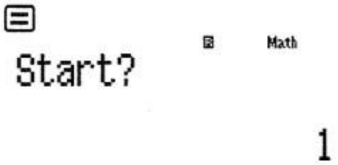
=



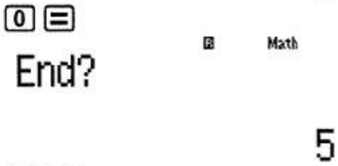
8 SHIFT ÷ ALPHA) × (− 2) $x^■$ ALPHA)



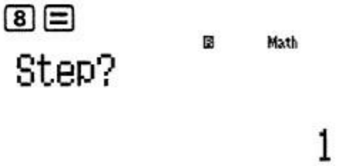
=



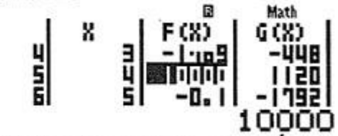
0 =



8 =



1 =



Chúng ta vừa nhìn được số mũ vừa thấy được hệ số của nó.

Ví dụ 2. Tìm số hạng chứa x^{40} trong khai triển Niu-tơn: $\left(x^3-\dfrac{2}{x^2}\right)^{15}$, với $x\neq 0$.

A. -30 B. $-30x^{40}$ C. -60 D. $-60x^{40}$

Hướng dẫn

Viết được CT của số hạng tổng quát : $C_{15}^k\left(x^3\right)^{15-k}\left(\dfrac{-2}{x^2}\right)^k$, $0\le k\le 15, k\in \mathrm{N}$

Viết được CT của số hạng tổng quát : $C_{15}^k(-2)^k.x^{45-5k}$

Tìm được k=1 $\Rightarrow$ số hạng cần tìm $-30x^{40}$

Ví dụ 3. Cho $P(x)=(1+x+x^2+x^3)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_{15}x^{15}$. Tìm hệ số a_{10}.

A. 100 B.101 C. 102 D. 103

Hướng dẫn

$P(x)=\left(1+x+x^2+x^3\right)^5=\left(1+x\right)^5.\left(1+x^2\right)^5$

Hệ số a_{10} là hệ số của x^{10}

+ Ta có: $\left(1+x\right)^5=C_5^0+C_5^1x+C_5^2x^2+C_5^3x^3+C_5^4x^4+C_5^5x^5$

+ Ta có: $\left(1+x^2\right)^5=C_5^0+C_5^1x^2+C_5^2x^4+C_5^3x^6+C_5^4x^8+C_5^5x^{10}$

Suy ra hệ số của số hạng x^{10} của f(x) là:

$C_5^0C_5^5+C_5^2C_5^4+C_5^3C_5^4=1.1+50+50=101$

(do $x^{10}=x^{10}x^0=x^8x^2=x^6x^4$)

Ví dụ 4. Tìm số hạng chứa x^3 trong khai triển nhị thức Niu - tơn của biểu thức $\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{x}\right)^n$, $x>0$.

Trong đó n là số tự nhiên thỏa mãn $A_n^2-2C_n^1=180$.

A. $3640x^3$ B. $3460x^3$ C. $-3640x^3$ D. $-3460x^3$

Hướng dẫn

ĐK: $n\in\mathbb{N}, n\ge 2$

Khi đó: $A_n^2-2C_n^1=180\Leftrightarrow n^2-3n-180=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=15\\n=-12\end{array}\right.\xrightarrow{DK}n=15$

Khi n = 15 ta có: $\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x}\right)^{15}=\sum_{k=0}^{15}C_{15}^{k}\left(-1\right)^{k}2^{k}x^{\frac{15-3k}{2}}$

Mà theo bài ra ta có: $\frac{15-3k}{2}=3\Leftrightarrow k=3$

Do đó số hạng chứa x^3 trong khai triển trên là: $C_{15}^{3}\left(-1\right)^{3}2^{3}x^{3}=-3640x^{3}$

Bài tập rèn luyện

Bài 1: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của: $x(1-2x)^5+x^2(1+3x)^{10}$

A. 3310 B. 3320 C. –3310 D. –3320

$$P=x\sum_{0}^{5}C_5^k(-2)^kx^k+x^2\sum_{0}^{10}C_{10}^{m}3^mx^m$$

Tìm k,m sao cho $0\le k\le 5, 0\le m\le 10, k,m\in N$ sao cho:

$$\begin{cases}k+1=5\\m+2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=4\\m=3\end{cases}$$

Tổng hệ số của x^5 trong khai triển là : $C_5^4.(-2)^4+C_{10}^3.3^3=3320$

Bài 2: Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển nhị thức Newton của $(2+x)^n$, biết:

$$3^nC_n^0-3^{n-1}C_n^1+3^{n-2}C_n^2-3^{n-3}C_n^3+...+(-1)^nC_n^n=2048 \qquad (*)$$

(n là số nguyên dương, C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử) .

A. 11 B. –11 C. –22 D. 22

Giải:

Xét khai triển:

$$(3-x)^n=\sum_{0}^{n}C_n^k.3^{n-k}.(-1)^k.x^k$$
$$=3^nC_n^0x^0-3^{n-1}C_n^1x+3^{n-2}C_n^2x^2+...+(-1)^nC_n^nx^n$$

Thay x=1 ta được:

$$3^nC_n^0-3^{n-1}C_n^1+3^{n-2}C_n^2-3^{n-3}C_n^3+...+(-1)^nC_n^n=2^n$$
$$\Leftrightarrow 2048=2^n$$
$$\Leftrightarrow n=11$$

Xét khai triển: $P=(2+x)^{11}=\sum_{0}^{11}C_{11}^k2^{11-k}x^k$

Hệ số của x^{10} trong khai triển là: $C_{11}^{10}.2=22$

Bài 3: Tìm số nguyên dương thỏa mãn hệ thức: $C_{2n}^1+C_{2n}^3+...+C_{2n}^{2n-1}=2048$

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

Giải:

$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$

$-(1-1)^n = -C_n^0 + C_n^1 - C_n^2 + ... + C_{2n}^{2n-1} - C_{2n}^{2n}$

$\Rightarrow 2^{2n} = 2(C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + ... + C_{2n}^{2n-1}) = 2.2048$

$\Leftrightarrow n = 6$

Vậy n=6

Bài 4: Cho khai triển $(1+2x)^n = a_o + a_1x + ... + a_nx^n$ trong đó $n \in N^*$ và các hệ số $a_o, a_1, \dots, a_n$ thỏa mãn hệ thức: $a_o + \frac{1}{2}a_1 + ... + \frac{1}{2^n}a_n = 4096$. Tìm số lớn nhất trong các số $a_o, a_1, ..., a_n$.

A. $2^9C_{12}^9$ B. $2^6C_{12}^6$ C. $2^7C_{12}^7$ D. $2^8C_{12}^8$

Giải: Thay $x = \frac{1}{2}$ ta được: $2^n = a_o + \frac{1}{2}a_1 + ... + \frac{1}{2^n}a_n = 4096 \Leftrightarrow n = 12$

$(1+2x)^n = \sum_0^n C_n^k 2^k.x^k$

*Xét $a_{k+1} \ge a_k$

$C_n^{k+1}2^{k+1} \ge C_n^k 2^k$

$\Leftrightarrow \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}.2 \ge \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{k+1} \ge \frac{1}{n-k}$

$\Leftrightarrow k \ge 8$

*Xét: $a_{k-1} \ge a_k$

Tương tự:

$\Rightarrow \frac{1}{n-(k-1)} \ge \frac{2}{k}$

$\Leftrightarrow k \le 8$

Vậy $max\{a_0, a_1, ..., a_{12}\} = a_8 = 2^8C_{12}^8$

Bài 5: Kết quả của tổng: $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2 = ?$

A. C_{2n+1}^n B. C_{2n+1}^{n+1} C. C_{2n}^{n+1} D. C_{2n}^n

Giải: $(1+x)^{2n} = \sum_0^{2n} C_{2n}^k x^k = C_{2n}^0 + C_{2n}^1x + ... + C_{2n}^{2n}x^{2n}$

Hệ số của x^n là C_{2n}^n (1)

Mặt khác

$(1+x)^n(1+x)^n = \sum_0^n C_n^k x^k . \sum_0^n C_n^m x^m = (C_n^0 + C_n^1x + ... + C_n^nx^n)^2$

Hệ số của x^n:

$$\begin{cases} k+m=n \\ 0 \le k, m \le n; k, m \in N \end{cases}$$

Vậy hệ số x^n là : $\sum C_n^k . C_n^m$

Do $k+m=n$ nên $C_n^k = C_n^m$

Hệ số của x^n là : $\sum_0^n (C_n^k)^2 = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ... + (C_n^n)^2$ (2)

Mà $(1+x)^{2n} = (1+x)^n (1+x)^n$ (3)

Từ (1) và (2),(3) suy ra $C_{2n}^n = \left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + ... + \left(C_n^n\right)^2$ (đpcm)

Bài 6: Chứng minh rằng: $nC_n^0 - (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 - (n-3)C_n^3 + ... + (-1)^{n-1}C_n^{n-1} = 0$.

Giải:

Xét khai triển: $(x-1)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} - C_n^3 x^{n-3} + ... + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} x + C_n^n$

Lấy đạo hàm 2 vế ta được:

$n(x-1)^{n-1} = nC_n^0 x^{n-1} - (n-1)C_n^1 x^{n-2} + (n-2)C_n^2 x^{n-3} - (n-3)C_n^3 x^{n-4} + ... + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}$

Thay x=1 ta được: $nC_n^0 - (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 - (n-3)C_n^3 + ... + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} = 0$ (đpcm)

Bài 7: Khai triển đa thức: $P(x) = (x+1)^{10} + (x+1)^{11} + (x+1)^{12} + (x+1)^{13} + (x+1)^{14}$ ra dạng : $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{14}x^{14}$. Hãy xác định hệ số a_{10}.

A. 1356 B.1365 C.1256 D. 1526

Đáp số:

Hướng dẫn: $a_{10} = C_{10}^0 + C_{11}^1 + C_{12}^2 + C_{13}^3 + C_{14}^4 = 1365$

Bài 8:

1. Tính tích phân: $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

2. Chứng minh rằng: $1 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{5}C_n^2 - \frac{1}{7}C_n^3 + ... + \frac{(-1)^n}{2n+1}C_n^n = \frac{2.4.6...(2n-2)2n}{3.5.7...(2n-1)(2n+1)}$.

Đáp số: 1) $I_n = \frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots(2n+1)}$

1. $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$ $\quad I_{n-1} = \int_0^1 (1-x^2)^{n-1} dx$

Ta sẽ chứng minh: $I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$; Đặt: $\begin{cases} u = (1-x^2)^n dx \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2x.n(1-x^2)^{n-1} dx \\ v = x \end{cases}$

$$\Rightarrow I_n = x(1-x^2)^n \Big|_0^1 + n\int_0^1 2x^2(1-x^2)^{n-1}dx$$

$$= 0 - 2n\int_0^1 (1-x^2)(1-x^2)^{n-1}d(1-x^2) + 2n\int_0^1 (1-x^2)^{n-1}dx$$

$$\Leftrightarrow I_n = 2nI_n + 2nI_{n-1}$$

$$\Leftrightarrow I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1}$$

Ta có: $I_n = \frac{2n}{2n+1}.\frac{2(n-1)}{2(n-1)+1}...\frac{2}{3}I_0$

Với $I_0 = \int_0^1 (1-x^2)^0 dx = 1 \quad \Rightarrow I_n = \frac{2.4.6...2n}{3.5.7...(2n+1)}$

2.

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^1 (C_n^0 - C_n^1x^2 + C_n^2x^4 - C_n^3x^6 + ... + C_n^n x^{2n})dx$$

$$= (C_n^0 x - \frac{x^3}{3}C_n^1 + \frac{x^5}{5}C_n^2 - \frac{x^7}{7}C_n^3 + ... + \frac{(-x)^n}{2n+1}C_n^n\Big|_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{3}C_n^1 + \frac{1}{5}C_n^2 - \frac{1}{7}C_n^3 + ... + \frac{(-1)^n}{2n+1}C_n^n$$

$$= \frac{2.4.6...(2n-2)2n}{3.5.7...(2n-1)(2n+1)}$$

Bài 9: Cho n là số nguyên dương. Tính $S = 1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n$.

Đáp số: $S = \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1)$

Giải: $f(x) = (1+x)^n = \sum_0^n C_n^k x^k = C_n^0 + C_n^1 x + ... + C_n^n x^n$

Lấy tích phân 2 vế ta được:

$$\int_0^1 (1+x)^n dx = \int_0^1 (C_n^0 + C_n^1 x + ... + C_n^n x^n)dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = (C_n^0 x + \frac{C_n^1}{2}x^2 + ... + \frac{C_n^n}{n}x^{n+1})\Big|_0^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{n+1}-1}{n+1} = 1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n \text{ (đpcm)}$$