Tỉ số kép của hàng điểm và áp dụng

1. Một số khái niệm về tỉ số kép của hàng điểm, hàng đường thẳng

Định nghĩa 1.1.
Cho 4 điểm A, B, C, D nằm trên một đường thẳng. Khi đó tỉ số kép của A, B, C, D (ta chú ý tới tính thứ tự) được định nghĩa là $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}:\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$ và ta kí hiệu

$(ABCD)=\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}:\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$

(Chú ý: Trong trường hợp $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}:\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}=-1$ ta nói A, B, C, D là hàng điểm điều hòa và kí hiệu (ABCD)=-1)

Từ định nghĩa suy ra

i.$(ABCD)=(CDAB)=(BADC)=(DCBA)$

ii.$(ABCD)=\frac{1}{(BACD)}=\frac{1}{(ABDC)}$

iii.$(ABCD)=1-(ACBD)=1-(DBCA)$

iv.$(ABCD)=(A'BCD)\Leftrightarrow A\equiv A'$

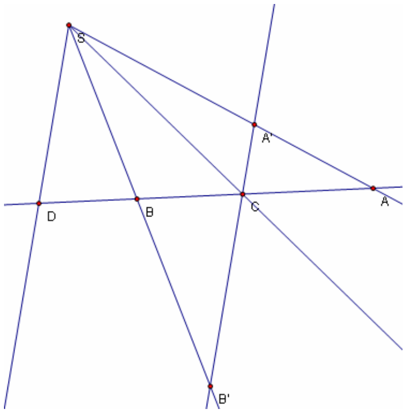
$(ABCD)=(AB'CD)\Leftrightarrow B\equiv B'$

v.$(ABCD)\neq 1$

Định nghĩa 1.2. Phép chiếu xuyên tâm.
Cho (d). S ở ngoài (d). Với mỗi điểm M, SM cắt (d) tại M'(M không thuộc đường thẳng qua S song song (d)). Vậy M→M' là phép chiếu xuyên tâm với tâm chiếu S lên (d)
Tiếp theo ta sẽ phát biểu một định lí quan trọng về phép chiếu xuyên tâm

Định lí 1.3. Phép chiếu xuyên tâm bảo toàn tỉ số kép
Chứng minh.
Trước hết ta cần phát biểu một bổ đề

Bổ đề 1.3.1.
Cho S. A, B, C, D thuộc (d). Từ C kẻ đường thẳng song song SD cắt SA, SB tại A', B'.
Khi đó $(ABCD)=\frac{\overline{CA'}}{\overline{CB'}}$



Thật vậy theo định lí Talet ta có:

$$(ABCD)=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}:\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}:\frac{\overline{DB}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{CA'}}{\overline{DS}}:\frac{\overline{DS}}{\overline{CB'}}=\frac{\overline{CA'}}{\overline{CB'}}$$

Trở lại định lí ta có

$$(ABCD)=\frac{\overline{CA'}}{\overline{CB'}}=\frac{\overline{C_1A''}}{\overline{C_1B''}}=(A_1B_1C_1D_1)\text{ (d.p.c.m)}$$

Nhận xét: A, B, C, D là hàng điểm điều hòa $\Leftrightarrow$ C là trung điểm A'B'

Từ định lí 1.3 ta có các hệ quả:

Hệ quả 1.3.2.

Cho 4 đường thẳng đồng quy và đường thẳng Δ cắt 4 đường thẳng này tại A, B, C, D. khi đó (ABCD) không phụ thuộc vào Δ

Hệ quả 1.3.3.

Cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 cắt nhau tại O. $A,B,C\in\Delta_1$, $A',B',C'\in\Delta_2$. Khi đó:

$(OABC)=(OA'B'C')\Leftrightarrow AA',BB',CC'$ đồng quy hoặc đôi một song song

Chứng minh.

TH1. AA', BB', CC' song song

$$\Rightarrow\frac{\overline{BO}}{\overline{BA}}:\frac{\overline{CO}}{\overline{CA}}=\frac{\overline{B'O}}{\overline{B'A}}:\frac{\overline{C'O}}{\overline{C'A}}$$

$\Rightarrow(OABC)=(OA'B'C')$

TH2. AA', BB',CC' không đôi một song đặt $AA'\cap BB'=S, SC\cap\Delta=C''$.

Ta có:

$(OA'B'C')=(OABC)=(OA'B'C'')$

$\Rightarrow(OA'B'C')=(OA'B'C'')$

$\Rightarrow C'\equiv C''$

Vậy AA', BB', CC'đồng quy

Hệ quả 1.3.4.

Định nghĩa 1.4

Cho bốn đường thẳng a, b, c, d đồng quy tại S. Một đường thẳng (l) cắt a, b, c, d tại A, B, C, D. Khi đó tỉ số kép của chùm a, b, c, d bằng tỉ số kép của hàng A, B, C, D.
Từ đây ta suy ra:

$$(abcd) = (ABCD) = \frac{\sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})}{\sin(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})} : \frac{\sin(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})}{\sin(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD})}$$

Tính chất trên là một tính chất quan trọng, rất có lợi trong việc giải các bài toán
Chú ý: Chùm a, b, c, d là chùm điều hòa ⇔A, B, C, D là hàng điểm điều hòa

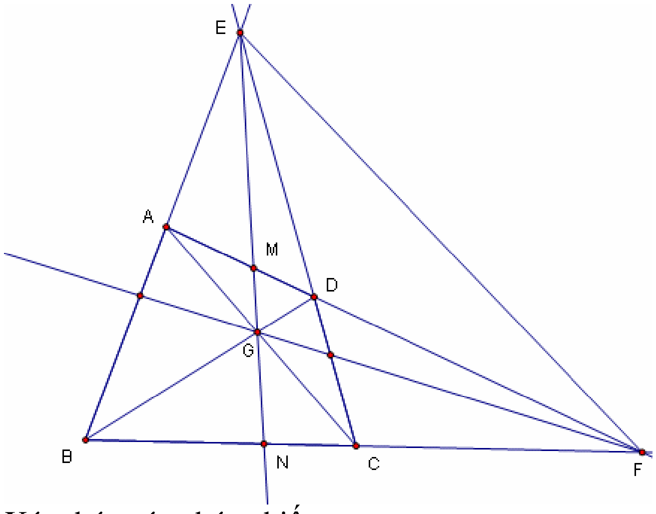
Tính chất 1.5.
Cho chùm điều hòa (abcd)
Nếu b⊥d ⇔ b, d là phân giác các góc tạo bởi a và c
Chứng minh.
- Nếu b, d là phân giác góc tạo bởi a, c suy ra điều phải chứng minh
- Nếu b⊥d. Từ C kẻ đường thẳng song song OD. Do (abcd)=-1 nên MC = MN suy ra b, d là phân giác góc COA

Tính chất 1.6.
Cho O và O' nằm trên d. Các đường thẳng a, b, c đồng quy tại O, a', b', c' đồng quy tại O'. $a' \cap a = A, b \cap b' = B, c \cap c' = C$. Chứng minh rằng A, B, C thẳng hàng ⇔ $\left(abcd\right) = \left(a'b'c'd\right)$
Chứng minh. Xét $AC \cap d = K$

2. Một số ví dụ

Chú ý : Trong một số bài toán có những trường hợp đơn giản như các đường thẳng song song với nhau, chứng minh các trường hợp này tương đối đơn giản, xin bỏ qua

2.1.
Cho tứ giác ABCD. $E = AB \cap CD, F = AD \cap BC, G = AC \cap BD$. $EF \cap AD, AB = M, N$.
Chứng minh rằng $(EMGN) = -1$.
Chứng minh.



Xét phép các phép chiếu:

$A: E \to B, G \to C, M \to F, N \to N \Rightarrow (EGMN) = (BCFN)$

D: $E \to C, G \to B, M \to F, N \to N \Rightarrow (EGMN) = (CBFN)$

$\Rightarrow (BCFN) = (CBFN)$

$\Leftrightarrow (BCFN) = \dfrac{1}{(BCFN)}$

$\Leftrightarrow (BCFN) = -1$ (do $(BCFN) \neq 1$)

Vậy $(EGMN) = -1$ (d.p.c.m)

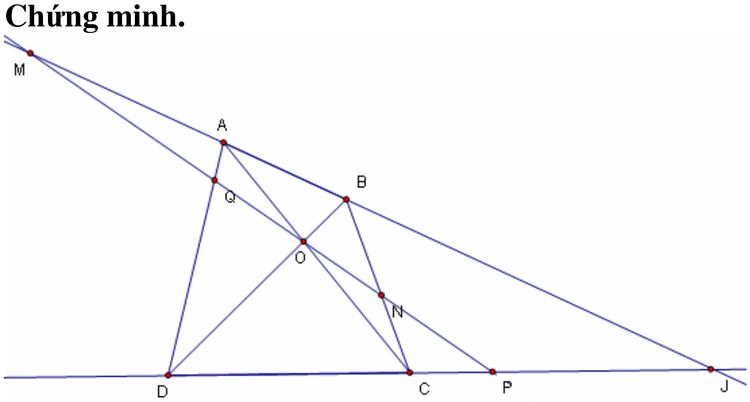
Nhận xét: Từ 2.1 ta suy ra bài toán: Cho tam giác ABC. D, E, F thuộc các cạnh BC, CA, AB. $EF \cap BC = M$. Ta có: AD, BE, CF đồng quy $\Leftrightarrow (ABDM) = -1$

2.2.

Cho tứ giác ABCD. $AC \cap BD = O$. Một đường thẳng (d) đi qua (O).

$(d) \cap A, B, C, D = M, N, P, Q$. Chứng minh rằng: $(MNOP) = (MOQP)$

Chứng minh.



Xét các phép chiếu:

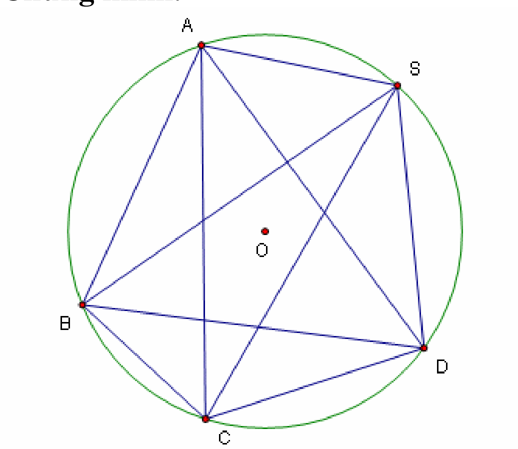
$A: M \to J, O \to C, Q \to D, P \to P \Rightarrow (MOQP) = (JCDP)$

$B: M \to J, N \to C, O \to D, P \to P \Rightarrow (MNOP) = (JCDP)$

Vậy $(MNOP) = (MOQP)$

Nhận xét : Từ 2.2 ta suy ra bài toán sau:
Cho tứ giác ABCD. $AC \cap BD = O$. Một đường thẳng (d) đi qua (O).
$(d) \cap A, B, C, D = M, N, P, Q$. Chứng minh rằng: O là trung điểm QH khi và chỉ khi O là trung điểm MP.
Bài toán trên chính là định lí "con bướm" trong tứ giác.

2.3.
Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). $S \in (O)$. Khi đó S(ABCD) = const (S(ABCD) là tỉ số kép của chùm SA, SB, SC, SD
Chứng minh.

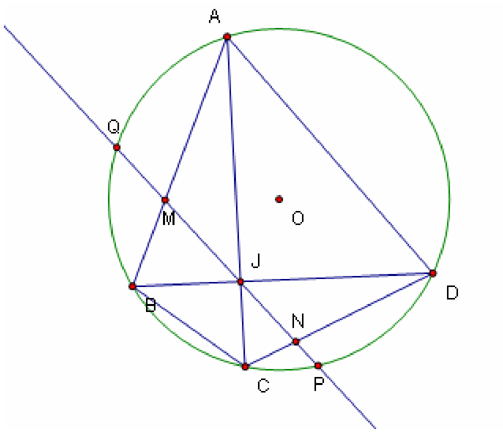


Ta có
S(ABCD)

$$= \frac{\sin(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC})}{\sin(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SD})} : \frac{\sin(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC})}{\sin(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SD})} = \frac{\sin(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})}{\sin(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD})} : \frac{\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})}$$

$$= \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \text{const (d.p.c.m)}$$

2.4.
Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), $AC \cap BD = J$ .Một đường thẳng (d) qua J , $(d) \cap AB, CD, (O) = M, N, P, Q$. Chứng minh rằng: $(QMJP) = (QJNP)$
Chứng minh.



Theo 2.3 ta có:

$A(QBCP) = D(QBCP$

$\Leftrightarrow (QMJP) = (QJNP)$

Nhận xét. Từ 2.4 ta có bài toán sau:

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), $AC \cap BD = J$ .Một đường thẳng (d) qua J , $(d) \cap AB, CD, (O) = M, N, P, Q$. Chứng minh rằng: $JM = JN \Leftrightarrow JP = JQ$

Bài toán trên chính là định lí con bướm trong đường tròn

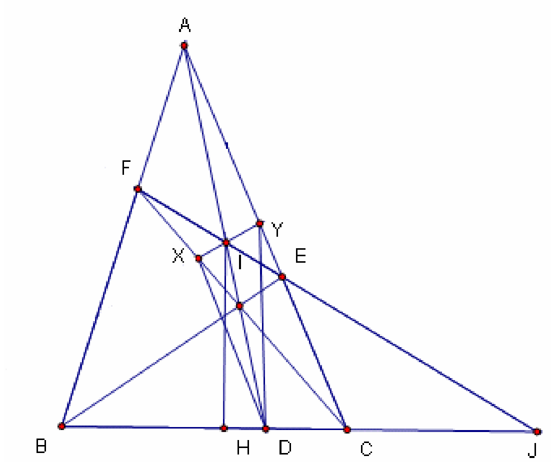
2.5.

Cho tam giác ABC. AD, BE, CF đồng quy, $EF \cap AD = L$. Từ L kẻ đường thẳng vuông góc BC tại H. Chứng minh rằng

a. HL là phân giác $\widehat{FEH}$

b. Đường thẳng qua L cắt CA, CF tại X, Y. Chứng minh rằng LD là phân giác của $\widehat{XDY}$

Chứng minh.



a. $EF \cap BC = J$. Do AD, BE, CF đồng quy nên $(BCDJ) = -1$.

Suy ra H(BCDJ)=-1 mà $HL \perp HJ$ nên HL là phân giác $\widehat{FEH}$

b. $XY \cap BC = K$. Xét phép chiếu:

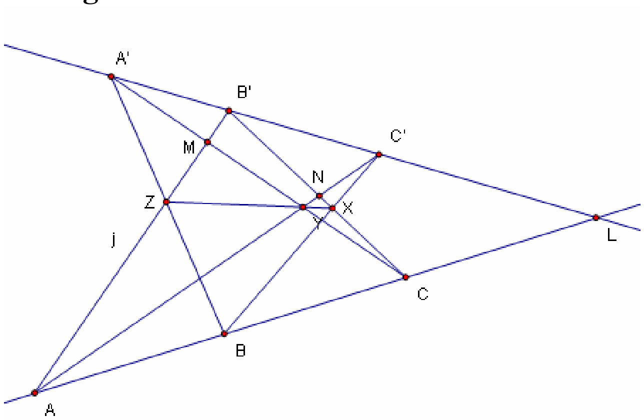
$C: J \to K, F \to X, E \to Y, I \to I$

$\Rightarrow (YXIK) = (EFIJ) = -1$

$\Rightarrow H(YXIK) = -1$

Mà $HI \perp HK$ nên HI là phân giác $\widehat{XHY}$ (đ.p.c.m)

2.6. (Định lí decas)
Cho hai đường thẳng Δ, Δ'. $A, B, C \in \Delta, A', B', C' \in \Delta'$. $BC \cap B'C' = X, AC \cap A'C' = Y$, $AB \cap A'B' = Z$. Chứng minh rằng X, Y, Z thẳng hàng
Chứng minh.



Gọi $A'C \cap AB' = M, C'B \cap B'C = N, AB \cap A'B' = L$. Xét các phép chiếu:

$A': B' \to L, M \to C, Z \to B, A \to A \Rightarrow (B'MZA) = (LCBA)$

$C': B' \to L, C \to C, X \to B, N \to A \Rightarrow (B'CXN) = (LCBA)$

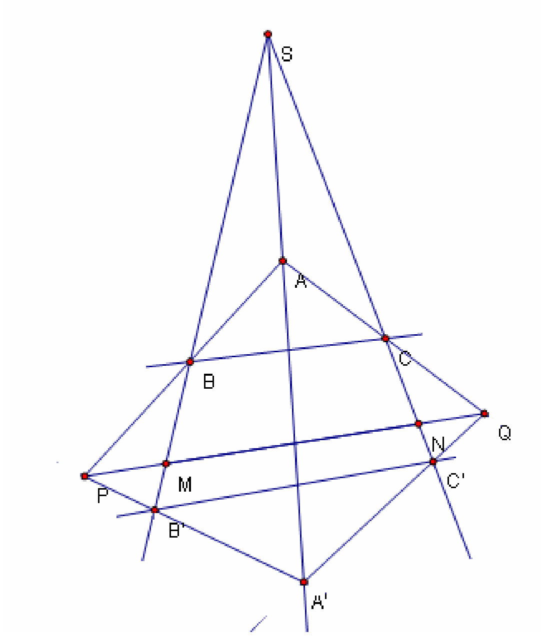
$\Rightarrow (B'MZA) = (B'CXN)$

$\Rightarrow$ MC, AN, XZ đồng quy

$\Rightarrow$ X, Y, Z thẳng hàng

Nhận xét: bài toán trên cho ta một phương pháp mạnh để chứng minh các điểm thẳng hàng

2.7.
Cho hai tam giác ABC và A'B'C'. $R = BC \cap B'C', Q = CA \cap C'A', P = AB \cap A'B'$.
Chứng minh rằng $\overline{P, Q, R} \Leftrightarrow AA', BB', CC'$ đồng quy hoặc đôi một song song
Chứng minh.



Đặt $S = BB' \cap CC', Q = AC \cap A'C', P = AB \cap A'B', M, N = PQ \cap BB', CC'$. Ta có:

AA', BB', CC' đồng quy hoặc đôi một song song

$\Leftrightarrow \overline{S, A, A'}$

$\Leftrightarrow P(A'NAS) = Q(A'MAS)$

$\Leftrightarrow P(B'MBS) = Q(C'NCS)$

$\Leftrightarrow BC, B'C', MN$ đồng quy

$\Leftrightarrow \overline{P, Q, R}$

2.8. Trên trục số cho bốn điểm A, B, C, D; I là trung điểm của AB, K là trung điểm của CD. Chứng minh rằng các điều kiện sau tương đương:

a. $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ (1)

b. $\dfrac{2}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}}$

c. $\overline{IA}^2 = \overline{IC}.\overline{ID}$

d. $\overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AB}.\overline{AK}$

Chứng minh.

Chọn một điểm O bất kì trên trục làm gốc. Đặt $\overline{OA} = 1, \overline{OB} = b, \overline{OC} = c, \overline{OD} = d$. Khi đó:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \Leftrightarrow \frac{a-c}{b-c} = \frac{a-d}{b-d} \Leftrightarrow 2(ab+cd) = (a+b)(c+d) \quad (2)$$

- Chọn $O \equiv A (a = 0)$, ta có $(2) \Leftrightarrow 2cd = bc + bd \Leftrightarrow \dfrac{2}{b} = \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d} \Leftrightarrow \dfrac{2}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}}$

vậy a. $\Leftrightarrow$ b.

- Chọn $O \equiv I$, ta có $a = -b$ và do đó

$(2) \Leftrightarrow a^2 = cd \Leftrightarrow \overline{IA}^2 = \overline{IC}.\overline{ID}$

Vậy a. $\Leftrightarrow$ c.

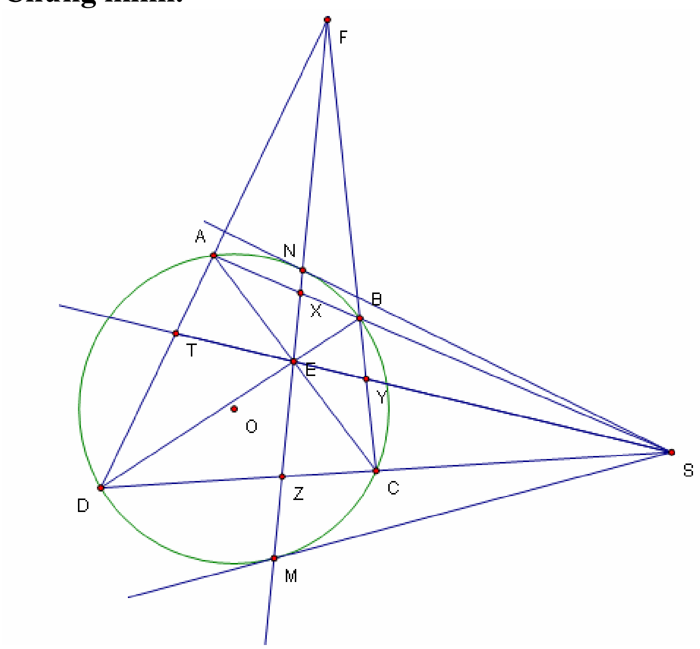
- Lại có $\dfrac{2}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AB}.\dfrac{\overline{AC}+\overline{AD}}{2} = \overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AB}.\overline{AK}$

Vậy b. $\Leftrightarrow$ d.

2.9.

Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O). $AB \cap CD = S, AD \cap BC = F, AC \cap BD = E.$ Tiếp tuyến SM, SN với đường tròn. Chứng minh rằng $\overline{E, F, M, N}$

Chứng minh.



$SE \cap AD, BC = Y, T. MN \cap AB, CD = X, Z$. Ta có:

$(SXAB) = -1 = (SZCD) \Rightarrow$ AD, BC, XZ đồng quy $\Rightarrow \overline{F, X, Z} \Rightarrow \overline{F, M, N}$

$(SXAB) = -1 = (SEYT) \Rightarrow$ AT, BY, EX đồng quy $\Rightarrow \overline{F, X, E}$

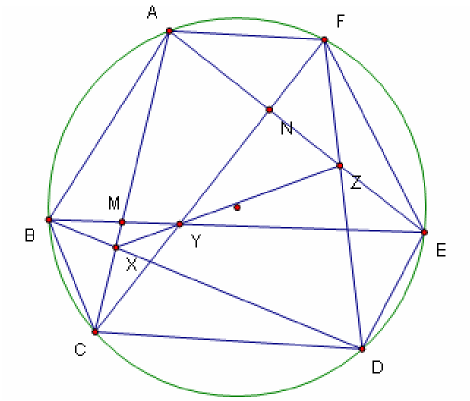
$(SZCD) = -1 = (SEYT) \Rightarrow$ DT, ZE, CY đồng quy $\Rightarrow \overline{F, Z, E}$

Từ trên suy ra $\overline{E, F, M, N}$

2.10.

Cho lục giác ABCDEF nội tiếp (O). $X = AC \cap BD, Y = BE \cap CF, Z = AE \cap DF$. Chứng minh rằng $\overline{X, Y, Z}$

Chứng minh.



Do $A, B, C, D, E, F \in (O)$ nên:

$B(ACDE) = F(ACDE)$

$\Rightarrow (ACXM) = (ANZE)$

$\Rightarrow$ EM, CN, XZ đồng quy

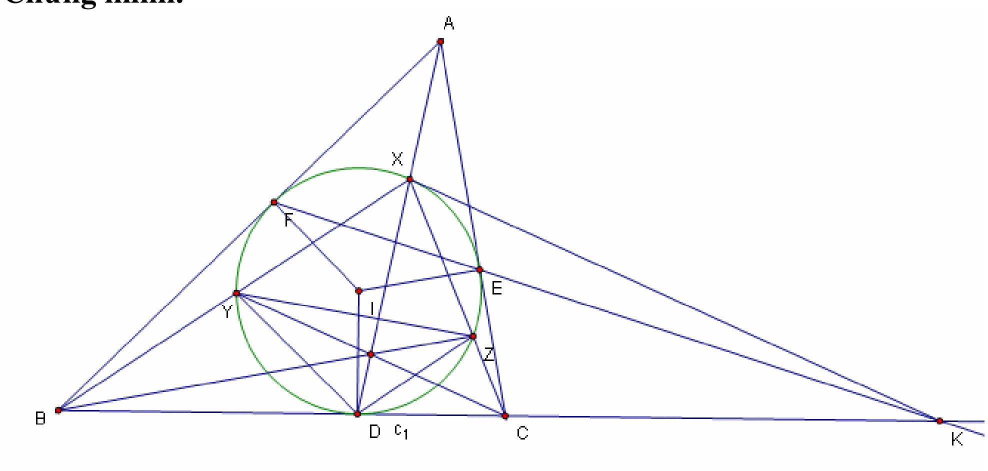
$\Rightarrow \overline{X, Y, Z}$ (d.p.c.m)

Chú ý. Định lí trên mang tên Pascal, nó có hơn 200 hệ quả

2.11.

Cho tam giác ABC ngoại tiếp (I). D, E, F là tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB.
$AD \cap (I) = X, BX \cap (I) = Y, CX \cap (I) = Z$. Chứng minh rằng BZ, CY, AX đồng quy

Chứng minh.



Kẻ tiếp tuyến tại X của (I) cắt BC tại K.

Trong tứ giác XEDF ta có tiếp tuyến tại F, E và XD đồng quy tại A nên tứ giác XEDF là tứ giác điều hòa

Mà KX, KD là tiếp tuyến của (I) tại X, D nên $\overline{K, E, F}$

Mặt khác AD, BE, CF đồng quy nên $(KCBC) = -1$

Suy ra:

$X(KDBC) = -1$

$\Rightarrow \frac{\sin(\overrightarrow{XK}, \overrightarrow{XB})}{\sin(\overrightarrow{XK}, \overrightarrow{XC})} : \frac{\sin(\overrightarrow{XD}, \overrightarrow{XB})}{\sin(\overrightarrow{XD}, \overrightarrow{XC})} = -1$

$\Rightarrow \frac{\sin\left(\widehat{XDY}\right)}{\sin\left(\widehat{XDZ}\right)} : \frac{\sin\left(-\widehat{YXD}\right)}{\sin\left(\widehat{DXZ}\right)} = -1$

$\Rightarrow \frac{\sin\left(\widehat{XDY}\right)}{\sin\left(\widehat{XDZ}\right)} : \frac{\sin\left(\widehat{YXD}\right)}{\sin\left(\widehat{DXZ}\right)} = 1$

$\Rightarrow \frac{XY}{XZ} : \frac{YD}{DZ} = 1 \Rightarrow \frac{XY}{XZ} . \frac{DZ}{DY} = 1$ (1)

Theo định lí Céva thì

BZ, CY, AX đồng quy

$\Leftrightarrow \frac{\overline{YB}}{\overline{YX}} . \frac{\overline{ZX}}{\overline{ZC}} . \frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} = -1$

$\Leftrightarrow \frac{YB}{YX} . \frac{ZX}{ZC} . \frac{DC}{DB} = 1$ (do $D \in BC, Y \in BX, Z \in XC$)

$\Leftrightarrow \frac{YB}{YX} . \frac{ZX}{ZC} . \frac{DC}{DB} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{YB}{BD} . \frac{DC}{ZC} . \frac{ZX}{XY} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{YD}{XD} . \frac{XD}{DZ} . \frac{ZX}{XY} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{YD}{DZ} . \frac{ZX}{XY} = 1$ (luôn đúng theo (1))

Vậy BZ, CY, AX đồng quy (d.p.c.m)

2.12.

Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O). Tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau tại P. M là trung điểm BC. Chứng minh rằng $\widehat{BAM} = \widehat{PAC}$

Chứng minh.

Đặt $PM \cap (O) = E, D$.

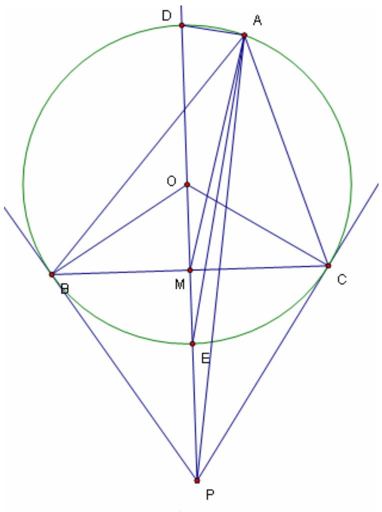
Do P là giao điểm hai tiếp tuyến tại B, C của (O), $PM \cap (O), BC = E, D, M$ nên

$(PMED) = -1 \Rightarrow A(PMED) = -1$. (1)

Mặt khác DE là đường kính của (O) nên $AD \perp AE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra AE là phân giác của $\widehat{MEP}$

Mà AE là phân giác của $\widehat{BAC}$ suy ra $\widehat{BAM} = \widehat{PAC}$ (d.p.c.m)



2.13.

Cho các đường thẳng a, b, c, d và a’, b’, c’, d’ đồng quy thỏa mãn $a \perp a', b \perp b', c \perp c', d \perp d'$. Chứng minh rằng $(abcd) = (a'b'c'd')$

Chứng minh.

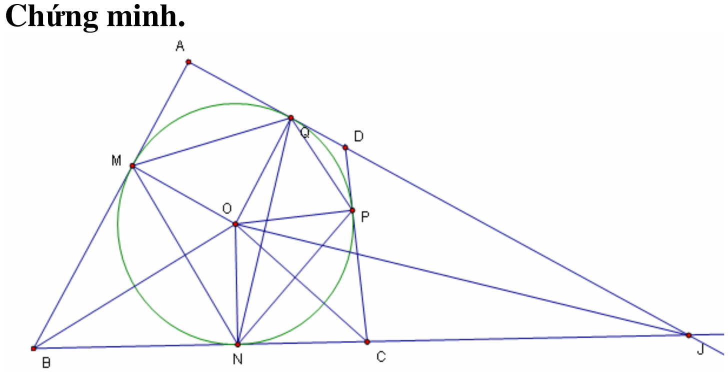
Do $a \perp a', b \perp b', c \perp c', d \perp d'$ nên $(a,c) = (a',c'), (a,d) = (a',d')$, $(b,c) = (b',c'), (b,d) = (b',d')$. Ta có

$$(abcd) = \frac{(a,c)}{(a,d)} : \frac{(b,d)}{(b,d)} = \frac{(a',c')}{(a',d')} : \frac{(b',d')}{(b',d')} = (a'b'c'd') \text{ (d.p.c.m)}$$

2.14.

Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp (O). M, N, P, Q là tiếp điểm của (O) với AB, BC, CA, AD.
Chứng minh rằng AC, BD, MN, PQ đồng quy

Chứng minh.



Gọi $AD \cap BC = J$

Ta có $NP \perp OC, NM \perp OB, NN \perp ON, NJ \perp OJ$ nên theo 2.13 ta có

$(JCNB) = O(JCNB) = N(QPNM)$

Tương tự ta có:

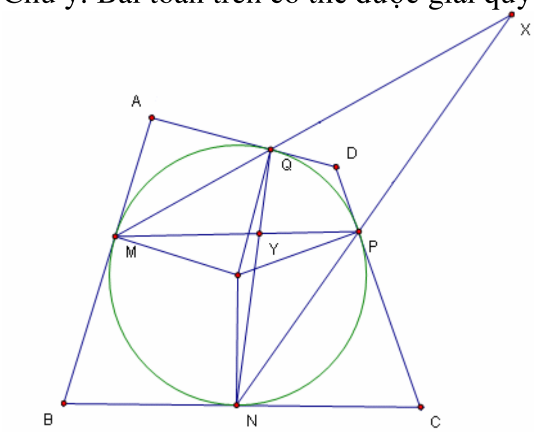
$(JAQD) = O(JAQD) = Q(QPNM)$

Mặt khác $M, N, Q, P \in (O)$ nên $Q(QPNM) = N(QPNM) \Rightarrow (JCNB) = (JAQD)$

$\Rightarrow$ AC, BD, NQ đồng quy

Chứng minh tương tự ta có AC, BD, NQ. MP đồng quy.

Chú ý: Bài toán trên có thể được giải quyết đơn giản nhờ định lí Pascal



Xét lục giác MQQPPN. Ta có:

$X = NP \cap MQ, Y = MP \cap NQ, D = QQ \cap PP \Rightarrow \overline{X, Y, D}$ (1)

Xét lục giác MMNNPQ. Ta có

$B = MM \cap NN, Y = MP \cap NQ, X = MQ \cap NP \Rightarrow \overline{B, X, Y}$ (2)

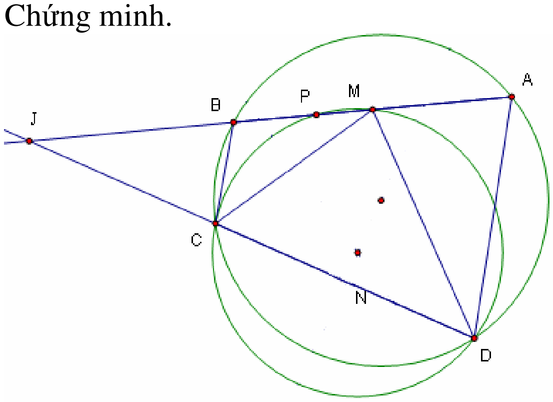
Từ (1) và (2) suy ra $\overline{B, D, Y}$. Chứng minh tương tự ta có $\overline{A, C, Y}$. Vậy AC, BD, MN, PQ đồng quy

2.15.

Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O). M, N là trung điểm AB, CD.

$(ANB) \cap CD = Q, (DMC) \cap AB = P$. Chứng minh rằng AC, BD, PQ đồng quy

Chứng minh.



Ta có:

$P_{J/(ABCD)} = \overline{JC}.\overline{JD} = \overline{JA}.\overline{JB}$

$P_{J/(CDM)} = \overline{JC}.\overline{JD} = \overline{JP}.\overline{JM}$

$\Rightarrow \overline{JP}.\overline{JM} = \overline{JA}.\overline{JB}$

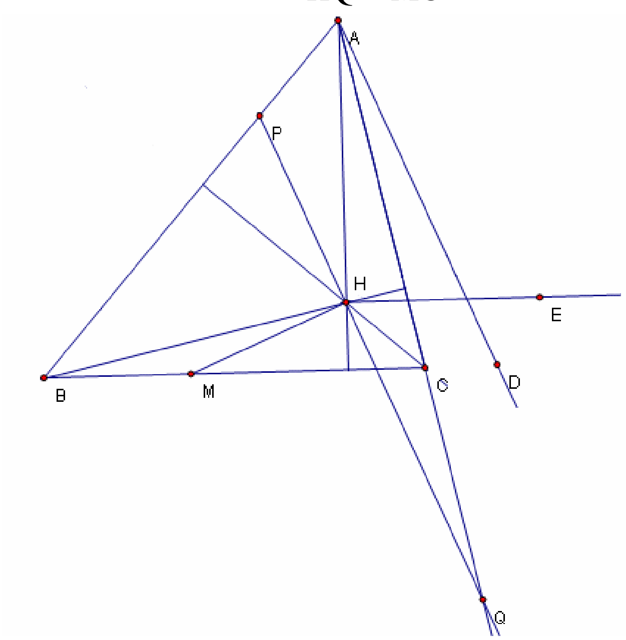
Mà M là trung điểm AB nên theo hệ thức Maclawrin thì $(JPBA) = -1$

Tương tự ta có $(JQDC) = -1$

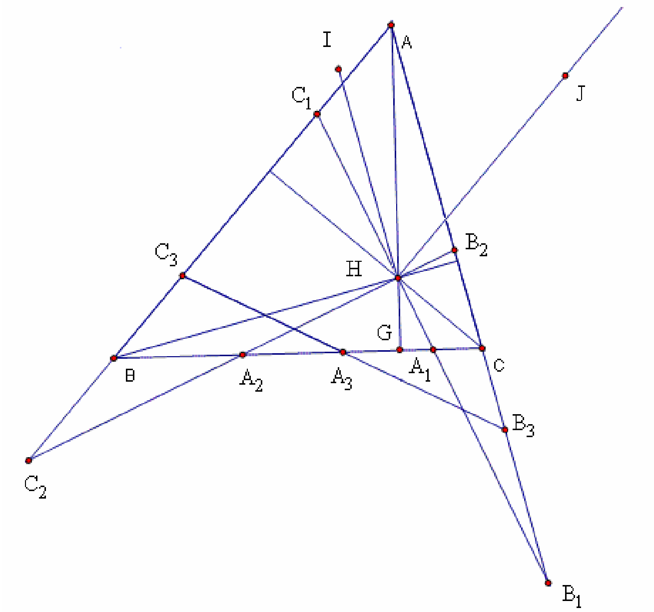
Suy ra $(JQDC) = (JPBA) = -1$

Vậy PQ, AC, BD đồng quy(d.p.c.m)

2.16.
Cho tam giác ABC trực tâm H. Một đường thẳng bất kì qua H cắt AB, AC tại P, Q.
Đường thẳng qua H vuông góc PQ cắt BC tại M. Chứng minh rằng:
$$\frac{\overline{HP}}{\overline{HQ}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$$
Chứng minh.
Kẻ AD song song PQ, HE song song BC.
Ta có :
$$\frac{\overline{HP}}{\overline{HQ}} = A(PQHD) \qquad (1)$$
$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = H(BCEM) \qquad (2)$$
$$AQ \perp HB, AP \perp HC, AH \perp HE, AD \perp HM \Rightarrow A(QPHD) = H(BCEM) \qquad (3)$$
Từ (1), (2) và (3) ta có $\frac{\overline{HP}}{\overline{HQ}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$ (d.p.c.m)



2.17.
Cho tam giác ABC, trực tâm H. Hai đường thẳng $(d_1) \perp (d_2)$ đi qua H.
$(d_1) \cap BC, CA, AB = A_1, B_1, C_1$ và $(d_2) \cap BC, CA, AB = A_2, B_2, C_2$.
a. Chứng minh rằng $\frac{\overline{BC_1}}{\overline{BC_2}} = \frac{\overline{CB_1}}{\overline{CB_2}}$
b. A_3, B_3, C_3 lần lượt là trung điểm B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2. Chứng minh rằng $\overline{A_3, B_3, C_3}$
Chứng minh.



Kẻ HJ song song AB, HI song song AC.

Ta có:

$$\frac{BC_1}{BC_2} = H(C_1C_2BJ) \qquad (1)$$

$$\frac{CB_1}{CB_2} = H(B_1B_2CH) \qquad (2)$$

$HJ \perp HC, HC_1 \perp HB_2, HB \perp HI, HC_2 \perp HB_1$

$$\Rightarrow H(JC_1BC_2) = H(CB_2IB_1) \qquad (3)$$

b. Trước hết ta chứng minh một bổ đề

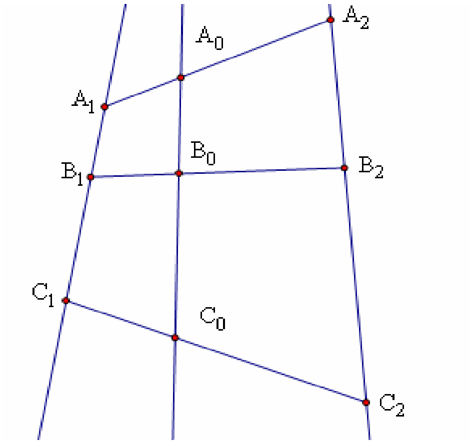
Bổ đề 2.17.1.

Cho 3 đường thẳng Δ_1, Δ_2, $A_1, B_1, C_1 \in \Delta_1, A_2, B_2, C_2 \in \Delta_2, A_o \in A_1A_2$, $B_o \in B_1B_2, C_o \in C_1C_2$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1C_1}} = \dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_2C_2}} \\ \dfrac{\overline{A_oA_1}}{\overline{A_oA_2}} = \dfrac{\overline{B_oB_1}}{\overline{B_oB_2}} = \dfrac{\overline{C_oC_1}}{\overline{C_oC_2}} \end{cases}$$

Chứng minh rằng $\overline{A_0, B_0, C_0}$

Chứng minh.



Do $\dfrac{\overline{A_oA_1}}{\overline{A_oA_2}} = \dfrac{\overline{B_oB_1}}{\overline{B_oB_2}}$ nên

$$\overrightarrow{A_0B_0} = \frac{\overline{A_0A_2}}{\overline{A_0A_1} + \overline{A_0A_2}}.\overrightarrow{A_1B_1} + \frac{\overline{A_0A_1}}{\overline{A_0A_1} + \overline{A_0A_2}}.\overrightarrow{A_2B_2}$$

Tương tự ta có:

$$\overrightarrow{A_0C_0}$$

$$= \frac{\overline{A_0A_2}}{\overline{A_0A_1} + \overline{A_0A_2}}.\overrightarrow{A_1C_1} + \frac{\overline{A_0A_1}}{\overline{A_0A_1} + \overline{A_0A_2}}.\overrightarrow{A_2C_2}$$

$$= \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{A_1B_1}}.\left(\frac{\overline{A_0A_2}}{\overline{A_0A_1} + \overline{A_0A_2}}.\overrightarrow{A_1B_1} + \frac{\overline{A_0A_1}}{\overline{A_0A_1} + \overline{A_0A_2}}.\overrightarrow{A_2B_2}\right)$$

$$= \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{A_1B_1}}\overrightarrow{A_0B_0}$$

Vậy $\overline{A_0, B_0, C_0}$

Trở lại bài toán

Theo bổ đề 2.17.1 ta có:

$$\overline{A_3, B_3, C_3}$$

$$\Leftarrow \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1C_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_2C_2}}$$

$$\Leftrightarrow (B_1C_1A_1H)\frac{\overline{HC_1}}{\overline{HB_1}} = (B_2C_2A_2H)\frac{\overline{HC_2}}{\overline{HB_2}}$$

$$\Leftrightarrow A(B_1C_1A_1H)\frac{\overline{HC_1}}{\overline{HB_1}} = A(B_2C_2A_2H)\frac{\overline{HC_2}}{\overline{HB_2}}$$

$$\Leftrightarrow A(CBA_1G)\frac{\overline{HC_1}}{\overline{HB_1}} = A(CBA_2G)\frac{\overline{HC_2}}{\overline{HB_2}}$$

$\Leftrightarrow (CBA_1G)\dfrac{\overline{A_2C}}{\overline{A_2B}} = (CBA_2G)\dfrac{\overline{A_1C}}{\overline{A_1B}}$ (theo 2.16)

$\Leftrightarrow (CBA_1G)\dfrac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = (CBA_2G)\dfrac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\overline{CG}}{\overline{BG}} = \dfrac{\overline{CG}}{\overline{BG}}$ (luôn đúng)

Vậy $\overline{A_3, B_3, C_3}$

Nhận xét: Từ bổ đề 2.17.1 ta có thể mở rộng bài toán

Cho tam giác ABC, trực tâm H. Hai đường thẳng $(d_1) \perp (d_2)$ đi qua H. $(d_1) \cap BC, CA, AB = A_1, B_1, C_1$ và $(d_2) \cap BC, CA, AB = A_2, B_2, C_2$. A_3, B_3, C_3 lần lượt thuộc các đường thẳng B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 thỏa mãn $\dfrac{\overline{A_3A_1}}{\overline{A_3A_2}} = \dfrac{\overline{B_3B_1}}{\overline{B_3B_2}} = \dfrac{\overline{C_3C_1}}{\overline{C_3C_2}}$. Chứng minh rằng $\overline{A_3, B_3, C_3}$

3. Bài tập

3.1.

Cho tam giác ABC nội tiếp (O). E là một điểm trên đường tròn. FA cắt các tiếp tuyến tại B và C của (O) tại M, N, $CM \cap BN = F$. Chứng minh rằng EF luôn đi qua một điểm cố định

3.2.

Cho lục giác ABCDEFF nội tiếp. $M = BF \cap CA, N = CA \cap BD, P = BD \cap CE$, $Q = CE \cap DF, R = DF \cap EA, S = EA \cap BF$. Chứng minh rằng MQ, NR, PS đồng quy

3.3.

Cho tam giác ABC. Một đường tròn (O) cắt BC, CA, AB tại M, N, P, Q, R, S. $X = MQ \cap RN, Y = RN \cap SP, Z = SP \cap MQ$. Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng quy

3.4.

Cho tam giác ABC. D, E, F là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với các cạnh BC, CA và AB. X nằm trong tam giác ABC thỏa mãn đường tròn nội tiếp tam giác XBC tiếp xúc XB, XC, BC tại Z, Y, D thứ tự. Chứng minh rằng tứ giác EFZY là tứ giác nội tiếp

3.5. (China TST 2002).

Cho tứ giác lồi ABCD. Cho $E = AB \cap CD, F = AD \cap BC, P = AC \cap BD$. O là chân đường vuông góc hạ từ P xuống EF. Chứng minh rằng: $\widehat{BOC} = \widehat{AOD}$

3.6.(Romani Junior Balkan MO 2007)

Cho tam giác ABC vuông tại A. D là một điểm trên cạnh AC. E đối xứng A qua BD và F là giao điểm của CE với đường vuông góc với BC tại D. Chứng minh rằng AF, DE, BC đồng quy

3.7.(Romani TST 2007)
Cho tam giác ABC. E. F là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp $\Gamma(I)$ với các cạnh AC, AB. M là trung điểm BC. $N = AM \cap EF$ và $\gamma(M)$ là đường tròn đường kính BC. BI và CI cắt $\gamma(M)$ tại X và Y khác B, C. Chứng minh rằng:
$\frac{NX}{NY} = \frac{AC}{AB}$

3.8. (Mathlinks Forum)
Cho tam giác ABC ngoại tiếp $\rho(I)$. D, E, F là tiếp điểm của $\rho(I)$ với BC, CA, AB. Xác định $M = \rho(I) \cap AD$, N là giao điểm của (CDM) với DF và $G = CN \cap AB$. Chứng minh rằng $CD = 3FG$

3.9.
Cho tam giác ABC cân tại A. M là trung điểm BC. Tìm quỹ tích các điểm P nằm trong tam giác thỏa mãn $\widehat{BPM} + \widehat{CPA} = 180^0$

3.10.(Senior BMO 2007)
Cho đường tròn $\rho(O)$ và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với $\rho(O)$. D thuộc $\rho(O)$ thỏa mãn $O \in AD$. H hình chiếu của B trên CD. Y là trung điểm của BX. Z là giao điểm của DY với $\rho(O)$. Chứng minh rằng $ZA \perp ZC$.

3.11. (Virgil Nicula)
Cho đường thẳng (d) và bốn điểm A, B, C, D nằm trên (d) sao cho $(ABCD) = -1$. M là trung điểm CD. Cho (ω) là đường tròn đi qua A và M.
NP là đường kính của (ω) vuông góc AM. Các đường thẳng NC, ND, PC, PD cắt (ω) tại S_1, T_1, S_2, T_2 theo thứ tự. Chứng minh rằng $S = S_1T_1 \cap S_2T_2$

3.12.
Cho tứ giác ABCD, $O = AC \cap BC$. M, N, P, Q là hình chiếu của O trên AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng:
$\begin{cases} OM = OP \\ ON = OQ \end{cases} \Leftrightarrow$ ABCD là hình bình hành

3.13.
Cho tam giác ABC ngoại tiếp (I). (I) tiếp xúc BC tại D. $AD \cap (I) = X$ và $\widehat{BXC} = 90^0$. Chứng minh rằng $AX + AE = XD$