PHÒNG GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO	**ĐỀ KIỂM TRA ĐỘI TUYỂN**
NGHI SƠN	**DỰ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LẦN 1**
	Năm học 2023 - 2024
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	**Môn: Toán - Lớp 9**
(Đề thi gồm có 01 trang)	*Ngày kiểm tra: 20/10/2023*
	Thời gian: **150 phút** *(không kể thời gian giao đề)*

Câu I. (4,0 điểm):

1. Rút gọn biểu thức: $$A=\frac{\sqrt{2+\sqrt{4-x^2}}\left[\sqrt{(2+x)^3}-\sqrt{(2-x)^3}\right]}{4+\sqrt{4-x^2}}$$

2. Tính giá trị của biểu thức $A=x^2y^2z^2$, biết x, y, z là các số thực thỏa mãn:
$$\frac{1}{x^2(y-z)}=\frac{-3}{5};\quad \frac{1}{y^2(z-x)}=\frac{1}{3};\quad \frac{1}{z^2(x-y)}=3.$$

Câu II. (4,0 điểm):

1. Giải phương trình: $$\sqrt[3]{81x-8}=x^3-2x^2+\frac{4}{3}x-2.$$

2. Giải hệ phương trình: $$\begin{cases} x^2(y+1)=6y-2 \\ x^4y^2+2x^2y^2+y(x^2+1)=12y^2-1 \end{cases}$$

Câu III. (4,0 điểm):

1. Tìm các cặp số nguyên dương (x, y) với x, y nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn phương trình: $2(x^3-x)=y^3-y$

2. Cho x, y là các số nguyên thỏa mãn: $x^3+y^3+x^2+y^2+xy-1$ chia hết cho $xy+x+y+1$
Chứng minh rằng x^4+y^9 chia hết cho $y+1$.

Câu IV. (6,0 điểm): Cho tam giác AMN cố định và cân tại A. Gọi I là trung điểm của MN, đường tròn (I) tiếp xúc với AM, AN lần lượt tại D và E. Về phía ngoài tam giác AMN; lấy điểm F thay đổi thuộc đường tròn (I), tiếp tuyến tại F của đường tròn (I) cắt tia AM ở B, cắt tia AN ở C.

1. Chứng minh hai tam giác BMI và INC đồng dạng.

2. Gọi A’ là điểm đối xứng với A qua E, B’ là điểm đối xứng với B qua F. Đường thẳng EF cắt AB’, BA’ lần lượt tại K và H. Chứng minh tam giác DHK là tam giác cân.

3. Tìm vị trí của F trên (I) để diện tích tam giác ABC nhỏ nhất.

Câu V. (2,0 điểm): Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn a + 2b + 3c = 1.

Chứng minh rằng: $$\frac{2ab}{a^2+4b^2}+\frac{6bc}{4b^2+9c^2}+\frac{3ca}{9c^2+a^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c}\right)\geq\frac{15}{4}$$

Họ, tên thí sinh……………………….Chữ ký giám thị 1…………………
Số báo danh………………………….Chữ ký giám thị 1…………………

ĐÁP ÁN VÀ BIỂU CHẤM
ĐỀ KIỂM TRA ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI DỰ THI CẤP TỈNH LẦN 1
Môn: Toán - Lớp 9
Năm học 2023 - 2024
(Đáp án gồm có 08 trang)

Câu	Đáp án	Biểu điểm
I (4đ)	**1. Rút gọn biểu thức:** $$A=\frac{\sqrt{2+\sqrt{4-x^2}}\left[\sqrt{(2+x)^3}-\sqrt{(2-x)^3}\right]}{4+\sqrt{4-x^2}}$$ ĐKXĐ: $-2\le x\le 2$ Đặt $a=\sqrt{2+x};\ b=\sqrt{2-x}\quad (a,b\ge 0)$	0,5
	$\Rightarrow a^2+b^2=4;\ a^2-b^2=2x$ $\Rightarrow A=\dfrac{\sqrt{2+ab}\left(a^3-b^3\right)}{4+ab}=\dfrac{\sqrt{2+ab}(a-b)\left(a^2+b^2+ab\right)}{4+ab}$ $\Rightarrow A=\dfrac{\sqrt{2+ab}(a-b)(4+ab)}{4+ab}=\sqrt{2+ab}(a-b)$	0,5
	$\Rightarrow A\sqrt{2}=\sqrt{4+2ab}(a-b)$ $\Rightarrow A\sqrt{2}=\sqrt{\left(a^2+b^2+2ab\right)}(a-b)=(a+b)(a-b)$	0,5
	$\Rightarrow A\sqrt{2}=a^2-b^2=2x$ Vay $A=x\sqrt{2}$	0,5
	2. Tính giá trị của biểu thức $A=x^2y^2z^2$, biết x, y, z là các số thực thỏa mãn: $$\frac{1}{x^2(y-z)}=\frac{-3}{5};\quad \frac{1}{y^2(z-x)}=\frac{1}{3};\quad \frac{1}{z^2(x-y)}=3.$$ Từ giả thiết ta có: $x^2(y-z)=\dfrac{-5}{3}$ (1), $y^2(z-x)=3$ (2), $z^2(x-y)=\dfrac{1}{3}$ (3).	0,5
	Nhân theo vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được: $x^2y^2z^2(x-y)(y-z)(z-x)=\dfrac{-5}{3}$ (4)	0,5

	Cộng theo vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được: $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=\frac{5}{3}$ Phân tích đa thức $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$ thành nhân tử được: $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=-(x-y)(y-z)(z-x)$. Do đó $(x-y)(y-z)(z-x)=\frac{-5}{3}$ (5). Từ (4) và (5) suy ra: A = 1.	0,5 0,5
II (4đ)	**1) Tìm các cặp số nguyên dương (x, y) với x, y nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn phương trình** $2\left(x^3-x\right)=y^3-y$ **(1)** Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^3+x^3+(-y)^3=x+x-y=2x-y$. $\Leftrightarrow x^3+x^3+(-y)^3-3xx(-y)+3xx(-y)=2x-y$ Áp dụng hằng đẳng thức $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$ ta có $(x+x-y)\left(x^2+x^2+y^2-xx+xy+xy\right)-3x^2y=2x-y$ $\Leftrightarrow (2x-y)\left(x^2+2xy+y^2\right)-(2x-y)=3x^2y$ $\Leftrightarrow (2x-y)\left[(x+y)^2-1\right]=3x^2y$ (2) $\Rightarrow 3x^2y \vdots 2x-y$ (3) Đặt $UCLN\left(x^2,2x-y\right)=d \ \left(d\in N^*\right)$ $\Rightarrow \begin{cases} x^2 \vdots d \\ 2x-y \vdots d\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 \vdots d \\ (2x-y)(2x+y) \vdots d\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 \vdots d \\ 4x^2-y^2 \vdots d\end{cases}$ $\Rightarrow y^2 \vdots d \Rightarrow \begin{cases} x^2 \vdots d \\ y^2 \vdots d\end{cases}$ mà $(x,y)=1 \Rightarrow d=1$ nên từ (3) $\Rightarrow 3y \vdots 2x-y$ (4). Mặt khác để ý $2x-y \vdots 2x-y \Rightarrow 6x-3y \vdots 2x-y$ (5) . Từ (4) và (5) $\Rightarrow 6x \vdots 2x-y$ Tương tự ta có $(x,y)=1 \Rightarrow (x,2x-y)=1 \Rightarrow 6 \vdots 2x-y$. Từ $(2) \Rightarrow 2x-y\in N^* \Rightarrow 2x-y\in U(6)=\{1;2;3;6\}$	0,5 0,5 0,5

- Xét $2x-y=1\Rightarrow y=2x-1$. Từ (2) ta có $(3x-1)^2-1=3x^2(2x-1)\Leftrightarrow x(x-1)^2=0$

mà $x\in N^*\Rightarrow x=1\Rightarrow y=1$ (thỏa mãn)

- Xét $2x-y=2$. Thay vào (2) ta có $x^3-4x^2+4x-1=0\Leftrightarrow (x-1)(x^2-3x+1)=0$

Mà $x\in N^*\Rightarrow x=1\Rightarrow y=0$ (loại)

- Xét $2x-y=3\Rightarrow y=2x-3$. Thay vào (2) ta có $x^3-6x^2+9x-4=0$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)^2(x-4)=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\\ x=4\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1\,(loai)\\ y=5\end{array}\right.$$

- Xét $2x-y=6\Rightarrow y=2x-6$. Thay vào (2) ta có $x^3-12x^2+36x-35=0$.

Do $y\in Z^{+}$ nên x là ước của 35 và $x>3\Rightarrow x\in\{5;7;35\}$. Thử lại không có giá trị nào thỏa mãn.

0,5

Vậy phương trình có 2 cặp nghiệm (x;y) = (1;1) và (x;y) = (4;5)

2. Cho x, y là các số nguyên thỏa mãn $x^3+y^3+x^2+y^2+xy-1$ chia hết cho $xy+x+y+1$. Chứng minh rằng x^4+y^9 chia hết cho $y+1$.

Ta có: $xy+x+y+1=(x+1)(y+1)$.

$x^3+y^3+x^2+y^2+xy-1=(x^2-1)(x+1)+(y^2-1)(y+1)+(xy+x+y+1)$

0,5

Do đó, để phép chia có nghĩa thì $x\neq -1, y\neq -1$ và giả thiết bài toán tương đương với $(x^2-1)(x+1)+(y^2-1)(y+1)$ chia hết cho $(x+1)(y+1)$ hay $\dfrac{x^2-1}{y+1}+\dfrac{y^2-1}{x+1}\in Z.$

0,5

Hiển nhiên $\dfrac{x^2-1}{y+1},\dfrac{y^2-1}{x+1}$ là các số hữu tỉ nên ta có thể đặt $\dfrac{x^2-1}{y+1}=\dfrac{a}{b};\ \dfrac{y^2-1}{x+1}=\dfrac{c}{d}$ với a, b, c, d là các số nguyên và $b>0, d>0, (a,b)=1, (c,d)=1.$ Khi đó:

$$\frac{x^2-1}{y+1}+\frac{y^2-1}{x+1}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}\in Z.$$

0,5

$$\Rightarrow ad+bc \vdots bd\Rightarrow ad+bc \vdots b\Rightarrow ad \vdots b\Rightarrow d \vdots b\quad (vi\,(a,b)=1)\quad (1)$$

	Mặt khác $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{x^2-1}{y+1}.\frac{y^2-1}{x+1}=(x-1)(y-1)\in Z \Rightarrow ac \vdots bd \Rightarrow ac \vdots d \Rightarrow a \vdots d$ (vì $(c,d)=1$) (2) Từ (1), (2) suy ra $a \vdots b \Rightarrow b=1$ (vì $b>0, (a,b)=1$) $\Rightarrow \frac{x^2-1}{y+1}=a\in Z \Rightarrow x^2-1 \vdots y+1$ $\Rightarrow x^4+y^9=(x^4-1)+(y^9+1)=(x^2-1)(x^2+1)+(y^3+1)(y^6-y^3+1) \vdots y+1$ Vậy x^4+y^9 chia hết cho $y+1$.	0,5
III (4đ)	**Giải phương trình:** $\sqrt[3]{81x-8}=x^3-2x^2+\frac{4}{3}x-2$. + Điều kiện xác định: $\forall x\in R$. + Đặt: $\sqrt[3]{81x-8}+2=3y \Rightarrow 81x-8=(3y-2)^3$ $\Leftrightarrow 81x=27y^3-54y^2+36y$ $\Leftrightarrow 3x=y^3-2y^2+\frac{4}{3}y$ + Kết hợp đề bài, ta có: $\begin{cases} 3x=y^3-2y^2+\frac{4}{3}y \\ 3y=x^3-2x^2+\frac{4}{3}x \end{cases}$ $\Rightarrow (x-y)\left(x^2+xy+y^2-2x-2y+\frac{13}{3}\right)=0$ + Ta có: $x^2+xy+y^2-2x-2y+\frac{13}{3}$ $=\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{1}{2}(y-2)^2+\frac{1}{3}> \forall x;y.$ $\Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y$. $\Rightarrow 3x=x^3-2x^2+\frac{4}{3}x \Leftrightarrow x\left(x^2-2x-\frac{5}{3}\right)=0$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{3\pm2\sqrt{6}}{3} \end{array}\right.$	0,5 0,5 0,5 0,5

* Vậy phương trình có tập nghiệm $\left\{0;\dfrac{3\pm 2\sqrt{6}}{3}\right\}$

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2(y+1)=6y-2 \\ x^4y^2+2x^2y^2+y(x^2+1)=12y^2-1 \end{cases}$.

+ Xét xới y=0, hệ phương trình không có nghiệm.

+ Ta có:

$$HPT \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\dfrac{x^2}{y}=6-\dfrac{2}{y} \\ x^4+2x^2+\dfrac{x^2+1}{y}=12-\dfrac{1}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\dfrac{x^2}{y}=6-\dfrac{2}{y} \\ (x^2+1)^2+\dfrac{x^2+1}{y}+\dfrac{1}{y^2}=13 \end{cases}$$

0,5

+ Đặt: $u=x^2+1; v=\dfrac{1}{y}$.

0,5

Ta có: $\begin{cases} u-1+(u-1)v=6-2v \\ u^2+uv+v^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v+uv=7 \\ u^2+uv+v^2=13 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ uv=3 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u=1; v=3 \\ u=3; v=1 \end{array}\right.$ hoặc $\begin{cases} u+v=-5 \\ uv=12 \end{cases}$ (vô nghiệm)

0,5

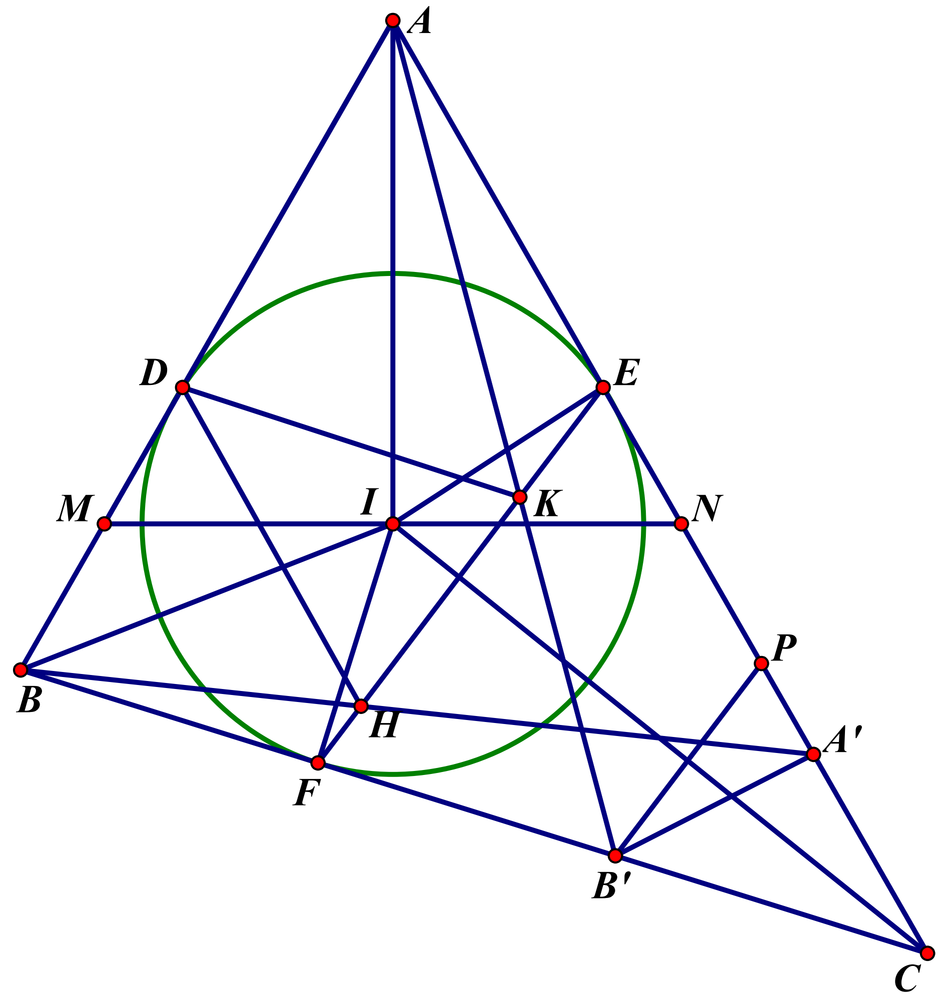
+ TH1: $\begin{cases} x^2+1=1 \\ \dfrac{1}{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

+ TH2: $\begin{cases} x^2+1=3 \\ \dfrac{1}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{2} \\ y=1 \end{cases}$ (vô nghiệm).

0,5

* Vậy hệ phương trình có nghiệm: $\left(0;\dfrac{1}{3}\right);(\sqrt{2};1)(-\sqrt{2};1)$.

IV
(6đ)



1) Chứng minh hai tam giác BMI và INC đồng dạng.

+ Vì AB, AC, BC là các tiếp tuyến của (I)

Áp dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có:

$$B\hat{I}C = \frac{1}{2}\left(F\hat{I}D + F\hat{I}E\right) = \frac{1}{2}\left(360^0 - D\hat{I}E\right)$$

$$= 180^0 - \frac{1}{2}D\hat{I}E = 180^0 - D\hat{I}A$$ 0,5

ΔAMN cân tại A, phân giác AI đồng thời là đường cao.

$\Rightarrow$ ΔAIM vuông tại I, đường cao ID 0,5

$\Rightarrow$ $D\hat{I}A = D\hat{M}I$ (cùng phụ với $D\hat{I}M$)

$\Rightarrow$ $B\hat{I}C = 180^0 - D\hat{M}I = B\hat{M}I$

+ Kết hợp $I\hat{B}C = M\hat{B}I$ $\Rightarrow$ ΔBMI và ΔBIC đồng dạng (g-g) 0,5

	+ Tương tự ΔINC và ΔBIC đồng dạng. $\Rightarrow$ ΔBMI và ΔBIC đồng dạng.	0,5
	2) Chứng minh tam giác DHK là tam giác cân. + Kẻ $B'P//EF$ $(P\in AC)$. Ta có: $\frac{KB'}{KA}=\frac{EP}{EA}$ + Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau $\Rightarrow$ $C\hat{E}F=C\hat{F}E$. $\Rightarrow$ Tứ giác $B'PEF$ là hình thang cân => $EP=FB'$ $\Rightarrow \frac{EP}{EA}=\frac{FB'}{EA}=\frac{FB}{DA}=\frac{DB}{DA}$ *(vì $EA=DA;FB'=FB=DB$)* $\Rightarrow \frac{KB'}{KA}=\frac{DB}{DA}\Rightarrow KD//BC$ $\Rightarrow C\hat{F}E=D\hat{K}H$ (sole trong) + Tương tự, ta có: $HD//AC\Rightarrow C\hat{E}F=D\hat{H}K$. + Mà: $C\hat{E}F=C\hat{F}E\Rightarrow D\hat{H}K=D\hat{K}H$. => Tam giác DHK là tam giác cân tại D.	0,5 0,5 0,5 0,5
	3) Tìm vị trí của F trên (I) để diện tích tam giác ABC nhỏ nhất. + Ta có: $S_{ABC}=S_{AMN}+S_{BMNC}$. + Trong đó: $S_{AMN}=\frac{1}{2}AI.MN$ (không đổi). $S_{BMNC}=S_{BIM}+S_{INC}+S_{BIC}$ $=\frac{1}{2}ID.MB+\frac{1}{2}IE.NC+\frac{1}{2}IF.BC$ Đặt $ID=IE=IF=r$ (không đổi) $S_{BMNC}=\frac{r}{2}(MB+NC+BC)=\frac{r}{2}(MB+NC+BF+CF)$ $=\frac{r}{2}(MB+NC+BD+CE)$ $=\frac{r}{2}(BM+CN+BM+MD+CN+NE)$	0,5

	$=\frac{r}{2}(2BM+2CN+2MD)$ *(Vì AD=AE$\Rightarrow$ MD=NE)* $=r\left[(BM+CN)+MD\right]\geq r\left(2\sqrt{BM.CN}+MD\right)$	0,5
	+ Vì ΔBMI và ΔBIC đồng dạng $\Rightarrow \frac{BM}{IN}=\frac{MI}{NC}\Rightarrow BM.NC=MI.IN=MI^2=\frac{MN^2}{4}$. $\Rightarrow S_{ABC}\geq r\left(2.\frac{MN}{2}+MD\right)=r(MN+MD)$ không đổi.	0,5
	+ Dấu "=" xảy ra khi $BM=NC\Rightarrow AB=AC$ $\Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A $\Rightarrow AI\perp BC$, mà $IF\perp BC$ $\Rightarrow A,I,F$ thẳng hàng. $\Rightarrow F$ là giao điểm của *AI* với đường tròn *(I)*.	0,5
V (2đ)	**Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn a + 2b + 3c = 1.** **Chứng minh rằng:** $\frac{2ab}{a^2+4b^2}+\frac{6bc}{4b^2+9c^2}+\frac{3ca}{9c^2+a^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c}\right)\geq\frac{15}{4}$ **Đẳng thức xảy ra khi nào?** Vì a + 2b + 3c = 1 nên $\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{3c}=\frac{a+2b+3c}{a}+\frac{a+2b+3c}{2b}+\frac{a+2b+3c}{3c}$ $=3+\left(\frac{a}{2b}+\frac{2b}{a}\right)+\left(\frac{2b}{3c}+\frac{3c}{2b}\right)+\left(\frac{3c}{a}+\frac{a}{3c}\right)$ $= 3+\frac{a^2+4b^2}{2ab}+\frac{4b^2+9c^2}{6bc}+\frac{9c^2+a^2}{3ca}$	0,5
	Do đó bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với: $\left(\frac{2ab}{a^2+4b^2}+\frac{a^2+4b^2}{8ab}\right)+\left(\frac{6bc}{4b^2+9c^2}+\frac{4b^2+9c^2}{24bc}\right)+\left(\frac{3ca}{9c^2+a^2}+\frac{9c^2+a^2}{12ca}\right)\geq 3$ (1)	0,5
	Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho hai số dương, ta có: $\frac{2ab}{a^2+4b^2}+\frac{a^2+4b^2}{8ab}\geq 2\sqrt{\frac{2ab}{a^2+4b^2}.\frac{a^2+4b^2}{8ab}}=1$ (2) Tương tự: $\frac{6bc}{4b^2+9c^2}+\frac{4b^2+9c^2}{24bc}\geq 1$ (3) $\frac{3ca}{9c^2+a^2}+\frac{9c^2+a^2}{12ca}\geq 1$ (4)	0,5
	Cộng theo vế các bất đẳng thức (2), (3), (4) ta suy ra (1). Suy ra đpcm.	0,5

	Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a $= \frac{1}{3}$; b = $\frac{1}{6}$; c = $\frac{1}{9}$	
Chú ý: *Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa. Bài hình không vẽ hình hoặc vẽ hình sai không chấm điểm.*		