

1. MỞ ĐẦU.

1.1 Lý do chọn đề tài.

Trong cấu trúc đề thi đại học môn toán những năm gần đây câu hình phẳng tọa độ *Oxy* đã trở thành một câu khó với đa số học sinh. Để vượt qua được câu này học sinh không chỉ nắm vững các kiến thức hình học tọa độ ở lớp 10, kiến thức về giải tích lớp 12 mà cần phải nhớ và vận dụng linh hoạt các định lý, tính chất hình học ở cấp THCS. Từ năm học 2014 - 2015 Bộ giáo dục và Đào tạo chỉ tổ chức kỳ thi THPT Quốc gia để xét tốt nghiệp và xét tuyển vào đại học thì điều đó càng thể hiện hiện rõ hơn. Mặc dù là câu ở mức độ điểm 8, điểm 9 nhưng sách chuyên khảo về phần này chưa nhiều. Qua quá trình tìm tòi nghiên cứu tôi nhận thấy rằng rất nhiều bài toán hình học trong mặt phẳng tọa độ *Oxy* nếu như ta nhớ và vận dụng một công thức hay kết quả của một bài toán đã giải quyết được trước đó thì việc giải bài toán hiện tại sẽ trở nên dễ dàng hơn rất nhiều. Đặc biệt qua theo dõi, nghiên cứu câu hình phẳng trong đề thi mẫu của Bộ giáo dục năm 2015 và đề thi khảo sát chất lượng học sinh lớp 12 THPT trong 2 năm liên tiếp 2015; 2016 của Sở Giáo dục và Đào tạo tỉnh Thanh Hóa tôi thấy rằng ngoài cách giải trong đáp án của Bộ và Sở giáo dục còn có thể sử dụng kết quả của một bài toán khác để giải quyết các câu hình phẳng trên. Với mong muốn đưa ra một kết quả tổng quát để từ đó các em học sinh có thể áp dụng nó vào nhiều bài toán khác nhau tôi xin trình bày sáng kiến kinh nghiệm “ *Hướng dẫn học sinh sử dụng kết quả hai bài toán để giải một số bài toán hình học phẳng trong toạ độ Oxy* ”.

1.2 Mục đích nghiên cứu.

Mục đích nghiên cứu của đề tài là hướng dẫn học sinh cách chứng minh hai công thức gắn với hai bài toán tương ứng, đồng thời hướng dẫn học sinh cách phân tích và vận dụng hai công thức đó vào từng thí dụ cụ thể.

1.3 Đối tượng nghiên cứu.

Trong đề tài này chúng ta sẽ tập trung giải quyết các bài toán hình học phẳng trong hệ tọa độ *Oxy* liên quan tới tiếp tuyến kẻ từ một điểm tới đường tròn và đường thẳng đi qua một điểm đồng thời tạo với một đường thẳng cho trước một góc φ cho trước.

1.4 Phương pháp nghiên cứu.

Đề tài chủ yếu sử dụng phương pháp nghiên cứu xây dựng cơ sở lý thuyết, từ đó áp dụng vào làm bài tập, ngoài ra còn sử dụng phương pháp thống kê; xử lý số liệu.

2. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM.

2.1. Cơ sở lý luận của sáng kiến kinh nghiệm.

Các căn cứ lý thuyết để đưa ra đề tài là:

+ Phương trình tổng quát và phương trình tham số của đường thẳng trang 76, 81 SGK Hình học 10 chương trình nâng cao của nhà xuất bản Giáo Dục Việt Nam (Tác giả: Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên) - Văn Như Cương (Chủ biên) - Phạm Vũ Khê - Bùi Văn Nghi).

“ Trong mặt phẳng toạ độ Oxy phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và có véc tơ pháp tuyến $n(a; b)$ có dạng $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ ”.

+ Công thức tính góc tạo bởi hai đường thẳng trang 89 SGK Hình học 10 chương trình nâng cao của nhà xuất bản Giáo Dục Việt Nam (Tác giả: Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên) - Văn Như Cương (Chủ biên) - Phạm Vũ Khê - Bùi Văn Nghi).

“ Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai đường thẳng $\Delta_1; \Delta_2$ lần lượt có phương trình $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Khi đó ta có kết quả sau:

$$\cos(\Delta_1; \Delta_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \text{ ,}$$

+ Phương trình đường tròn trang 91 SGK Hình học 10 chương trình nâng cao của nhà xuất bản Giáo Dục Việt Nam (Tác giả: Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên) - Văn Như Cương (Chủ biên) - Phạm Vũ Khê - Bùi Văn Nghi).

“ Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm $I(a; b)$, $R > 0$, khi đó đường tròn (C) tâm I bán kính R có phương trình

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \text{ .”}$$

2.2. Thực trạng vấn đề đang nghiên cứu.

Được học tập tại các trường đại học uy tín hàng đầu trong nước là ước mơ cháy bỏng của hầu hết các học sinh lớp 12 bậc THPT. Đối với đề thi môn toán để đạt được điểm 9 trở lên các em bắt buộc phải làm được câu hình phẳng trong mặt phẳng toạ độ Oxy , đây là một thách thức không dễ vượt qua đối với các em.

Hiện nay đối với học sinh khá giỏi, các thầy cô giáo chủ yếu dạy các em 3 câu cuối của đề thi gồm: câu liên quan tới phương trình, bất phương trình, hệ phương trình đại số, câu tìm giá trị lớn nhất của một biểu thức và câu liên quan tới hình phẳng trong hệ toạ độ Oxy . Thông qua việc học tập với thầy cô giáo trong trường, học bạn bè, học trên mạng, học trực tuyến các em được tiếp cận với nhiều dạng bài tập liên quan tới hình phẳng Oxy . Tuy nhiên mỗi bài toán là một cách lập luận, lý giải khác nhau. Mỗi bài toán đều có một “nút thắt” mà người làm toán phải tìm mọi cách để gỡ “nút thắt” đó. Với mong muốn tạo cho các em một phản xạ một cách làm khi gặp bài toán liên quan tới tiếp tuyến và góc tôi đưa ra đề tài này với hy vọng các em sẽ đạt kết quả cao trong kỳ thi THPT Quốc gia sắp tới.

2.3. Các giải pháp đã áp dụng.

Đầu tiên chúng ta hãy cùng nghiên cứu cách chứng minh *Bài toán 1* và áp dụng kết quả của nó trong các bài toán khác.

Bài toán 1.

Cho đường tròn (C) có phương trình $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ và điểm $M(x_0; y_0)$ nằm ngoài đường tròn. Từ điểm M kẻ các tiếp tuyến $MA; MB$ tới (C) (A, B là các tiếp điểm). Khi đó đường thẳng AB có pt:

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) - R^2 = 0$$

Chứng minh.

Đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$, bán kính R . Gọi $A(x_1;y_1); B(x_2;y_2)$. Do A, B thuộc đường tròn (C) nên $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = R^2$; $(x_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2 = R^2$.

Tiếp tuyến tại điểm A đi qua A và vuông góc với IA nên nhận véc tơ

$\underline{IA}(x_1 - a; y_1 - b)$ làm véc tơ pháp tuyến, do đó có phương trình

$$(x_1 - a)(x - x_1) + (y_1 - b)(y - y_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - a)(x - a + a - x_1) + (y_1 - b)(y - b + b - y_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = R^2.$$

Tương tự phương trình tiếp tuyến tại điểm B là

$$(x_2 - a)(x - a) + (y_2 - b)(y - b) = R^2$$

Để hai tiếp tuyến trở thành hai tiếp tuyến kẻ từ M thì 2 tiếp tuyến phải đi qua M .

$$\text{Suy ra } (x_1 - a)(x_0 - a) + (y_1 - b)(y_0 - b) = R^2$$

$$(x_2 - a)(x_0 - a) + (y_2 - b)(y_0 - b) = R^2$$

Suy ra phương trình đường thẳng AB là:

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) - R^2 = 0.$$

Chúng ta hãy xem xét việc áp dụng phương trình (*) qua các thí dụ sau:

Thí dụ 1. (Câu 7 trong đề thi KSCL lớp 12 THPT của Sở GD&ĐT tỉnh Thanh Hoá năm học 2014 - 2015).

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0 \text{ và đường thẳng } (d): x + y - 1 = 0, \text{ điểm } E(3;4). \text{ Gọi}$$

M là điểm thuộc d nằm ngoài (C) . Từ M kẻ các tiếp tuyến $MA; MB$ tới (C) (A, B là các tiếp điểm). Gọi (E) là tâm đường tròn tâm E tiếp xúc với đường thẳng AB . Tìm tọa độ điểm M sao cho đường tròn (E) có chu vi lớn nhất?

Phân tích:

Chu vi lớn nhất khi bán kính đường tròn lớn nhất, tương đương với khoảng cách từ điểm E tới đường thẳng AB lớn nhất. Do đó ta cần thực hiện các bước sau:

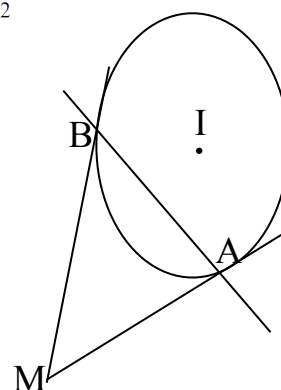
Viết phương trình đường thẳng Δ dưới dạng tham số (tham số t) và gọi tọa độ điểm $M \in \Delta$ theo t .

Viết phương trình đường thẳng AB theo phương trình (*).

Tính khoảng cách từ điểm E đến đường thẳng AB theo t .

Tìm t để khoảng cách đó lớn nhất từ đó suy ra tọa độ điểm M và kết luận.

Lời giải:



Đường tròn (C) có tâm $I(-2;1)$, bán kính $R=3$. Gọi $M(t;1-t)$ thuộc (d) áp dụng công thức (*) suy ra phương trình đường thẳng AB là $(t+2)x - ty + 3t - 5 = 0$.

Khoảng cách từ điểm E đến đường thẳng AB

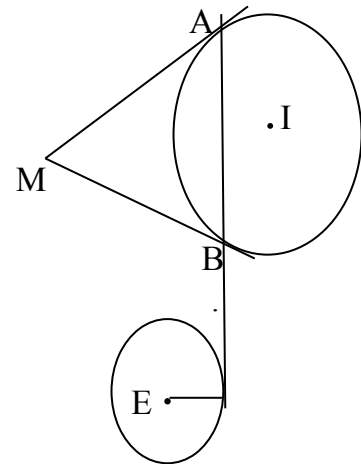
$$d(E; AB) = \frac{|2t+1|}{\sqrt{2t^2+4t+4}} \Rightarrow d^2(E; AB) = \frac{4t^2+4t+1}{2t^2+4t+4}$$

Bài toán quy về tìm t để $f(t) = \frac{4t^2+4t+1}{2t^2+4t+4}, t \in \mathbb{R}$

đạt giá trị lớn nhất.

$$\text{Đạo hàm } f'(t) = \frac{8t^2+32t+12}{(2t^2+4t+4)^2},$$

$$f'(t)=0 \Leftrightarrow t=-3 \text{ hoặc } t=-\frac{1}{2}$$



Lập bảng biến thiên suy ra $\text{Max} f(t) = \frac{5}{2}$ khi $t=-3$. Suy ra $M(-3;4)$

Đs: $M(-3;4)$.

Lời bình: Sau khi lập được ptdt AB ta có thể tìm điểm M bằng cách: Tìm điểm cố định mà đường thẳng AB luôn đi qua.

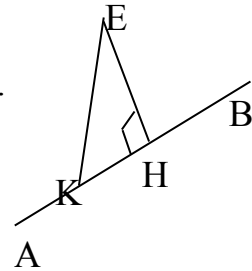
Dễ thấy đường thẳng AB luôn đi qua điểm $K(\frac{5}{2}; \frac{11}{2})$ cố định.

Gọi H là hình chiếu của E xuống đường thẳng AB suy ra

$$d(E, AB) = EH \leq EK = \frac{\sqrt{10}}{2}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } H \equiv K.$$

Khi đó $AB \perp EK \Leftrightarrow u_{AB}.AB = 0$. Lại có

$$\square\square\square EK = (-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}); u(t; t+2) \Rightarrow -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}(t+2) = 0 \Leftrightarrow t = -3 \Rightarrow M(-3;4).$$



Thí dụ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$, đường thẳng (d) $3x - 22y - 6 = 0$, điểm $E(0;1)$. Tìm tọa độ điểm M trên (d) sao cho từ M kẻ các tiếp tuyến MA; MB tới (C) (A, B là các tiếp điểm) mà đường thẳng AB đi qua E.

Phân tích:

Gọi điểm $M(x_0; y_0)$ ta thiết lập hệ gồm hai phương trình với 2 ẩn là x_0 và y_0 .

Phương trình thứ nhất là phương trình biểu diễn điểm M thuộc đường thẳng d.

Phương trình thứ hai là phương trình biểu diễn điểm E thuộc đường thẳng AB.

Giải hệ suy ra x_0, y_0 từ đó suy ra tọa độ điểm M.

Lời giải.

Đường tròn (C) được viết lại là: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$. Gọi $M(x_0; y_0)$, do $M \in d$ nên $3x_0 - 22y_0 - 6 = 0$.

Phương trình đường thẳng AB là: $(x_0 - 3)(x - 3) + (y_0 + 1)(y + 1) - 25 = 0$.

Do đường thẳng AB đi qua E nên ta có:

$$(x_0 - 3)(0 - 3) + (y_0 + 1)(1 + 1) - 25 = 0 \Leftrightarrow -3x_0 + 2y_0 - 14 = 0$$

Toạ độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x_0 - 22y_0 - 6 = 0 \\ -3x_0 + 2y_0 - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{16}{3} \\ y_0 = -1 \end{cases} \Rightarrow M(-\frac{16}{3}; -1)$$

Vậy $M(-\frac{16}{3}; -1)$

Thí dụ 3.

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình

$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$, đường thẳng $d: x + y + m = 0$. Tìm tham số m để trên d có duy nhất một điểm M mà từ đó kẻ được 2 tiếp tuyến MA; MB tới (C) (A, B là các tiếp điểm) sao cho tam giác MAB vuông.

Phân tích:

Gọi toạ độ điểm M theo tham số t của đường thẳng (d). Do tam giác MAB vuông nên tứ giác MAIB là hình vuông, gọi $K = AB \cap MI$ suy ra

$IK = \frac{\sqrt{2}}{2} IA \Leftrightarrow d(I; AB) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot R$. Từ đẳng thức này cho ta một phương trình bậc hai với ẩn t tham số là m . Bài toán quy về tìm tham số m để phương trình bậc hai ẩn t có một nghiệm.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I = (1; -2)$, bán kính $R = 3$.

Gọi điểm $M = (t; -m - t)$ thuộc d . Áp dụng công thức (*) suy ra phương trình đường thẳng AB là

$$(t - 1)(x - 1) + (-m - t + 2)(y + 2) - 9 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)x + (2 - m - 1)y - 2m - 3t - 4 = 0$$

Do tam giác MAB vuông nên tứ giác MAIB là hình vuông, gọi $K = AB \cap MI$

suy ra $IK = \frac{\sqrt{2}}{2} IA \Leftrightarrow d(I; AB) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot R \Leftrightarrow R = \sqrt{2} \cdot d(I; AB)$. Mà $R = 3$.

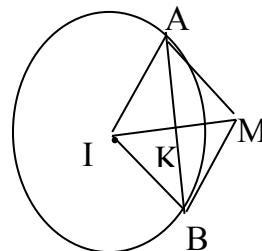
$$d(I; AB) = \frac{|-4t - 4m - 1|}{\sqrt{2t^2 + (2m - 6)t + m^2 - 4m + 5}}$$

Ta có phương trình

$$3 = \sqrt{2} \cdot \frac{|-4t - 4m - 1|}{\sqrt{2t^2 + (2m - 6)t + m^2 - 4m + 5}}$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 + 2(m - 3)t + m^2 - 4m - 13 = 0$$

Để trên d có đúng 1 điểm M thì phương trình trên



có đúng một nghiệm, tương đương với
 $\Delta_t = 0 \Leftrightarrow -m^2 + 2m + 35 = 0 \Leftrightarrow m = -5; m = 7.$

Đáp số: $m = -5; m = 7$

Thí dụ 4.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$, và đường thẳng $\Delta: 2x + y + 10 = 0$. Từ một điểm M bất kỳ trên Δ kẻ các tiếp tuyến MA; MB tới đường tròn (C) (A; B là các tiếp điểm). Xác định tọa độ điểm M sao cho khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng AB đạt giá trị lớn nhất?

Phân tích:

Gọi tọa độ điểm M theo tham số t của đường thẳng Δ .

Viết phương trình đường thẳng AB.

Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O tới đường thẳng AB theo t.

Tìm t để hàm số theo biến t đạt giá trị lớn nhất. Từ đó suy ra tọa độ điểm M.

Lời giải:

Phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = t \\ y = -2t - 10 \end{cases}$.

Điểm $M \in \Delta \Rightarrow M(t; -2t - 10)$.

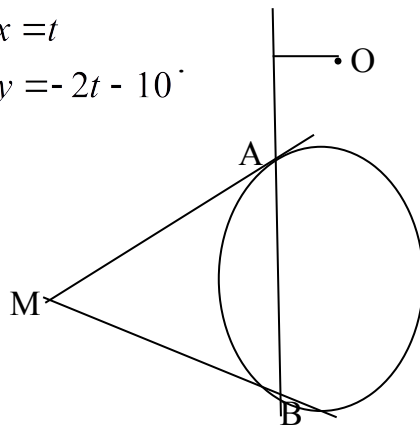
Phương trình đường tròn (C) được

viết lại là $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$.

Suy ra phương trình đường thẳng

AB: $(t - 1)x - (2t + 9)y - 3t - 12 = 0$.

Khoảng cách từ gốc tọa độ O tới đường thẳng AB



$$d(O; AB) = \frac{|-3t - 12|}{\sqrt{(t - 1)^2 + (2t + 9)^2}} \Rightarrow d^2(O; AB) = 9 \cdot \frac{t^2 + 8t + 16}{5t^2 + 34t + 82}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^2 + 8t + 16}{5t^2 + 34t + 82} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Đạo hàm } f'(t) = \frac{-6t^2 + 4t + 112}{(5t^2 + 34t + 82)^2} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{14}{3} \\ t = -4 \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $f(t)$ đạt được tại $t = \frac{14}{3}$.

Khi đó tọa độ điểm $M(\frac{14}{3}; -\frac{58}{3})$.

Thí dụ 5.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình

$(x - 3)^2 + y^2 = 4$. Tìm điểm $M \in Oy$ sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến $MA; MB$ tới đường tròn (C) ($A; B$ là các tiếp điểm) mà góc tạo bởi hai tiếp tuyến bằng 60° .

Phân tích:

Gọi $H = MI \cap AB \Rightarrow \angle IAH = \angle IMA = 30^\circ \Rightarrow IH = IA \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}R \Rightarrow d(I; AB) = 1$

Gọi tọa độ điểm $M(0; t)$ thuộc trục tung Oy .

Viết phương trình đường thẳng AB .

Tính khoảng cách từ điểm tâm I của đường tròn (C) theo tham số t và cho khoảng cách này bằng 1. Từ đó ta tìm được t suy ra tọa độ điểm M .

Lời giải:

Đường tròn (C) có tâm $I(3; 0)$, bán kính $R = 2$.

Gọi $M(0; t)$ thuộc trục tung Oy . Khi đó phương trình đường thẳng

$$AB: (0 - 3)(x - 3) + ty - 4 = 0 \Leftrightarrow 3x - ty - 5 = 0.$$

$$d(I; AB) = \frac{|3 \cdot 3 - t \cdot 0 - 5|}{\sqrt{3^2 + t^2}} = \frac{4}{\sqrt{9 + t^2}}.$$

Ta có MI là phân giác của góc $\angle AMB \Rightarrow \angle IMA = 30^\circ$.

Gọi $H = MI \cap AB \Rightarrow \angle IAH = \angle IMA = 30^\circ \Rightarrow IH = IA \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}R \Rightarrow d(I; AB) = 1$

$$\text{Suy ra } \frac{4}{\sqrt{9 + t^2}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{9 + t^2} = 4 \Leftrightarrow t^2 = 7 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{7}.$$

Vậy $M(0; \sqrt{7}); M(0; -\sqrt{7})$.

Thí dụ 6.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình

$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$, đường thẳng $d: x - y - 1 = 0$. Từ điểm M thuộc d kẻ 2 tiếp tuyến tới (C) (A, B là các tiếp điểm). Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua 1 điểm cố định.

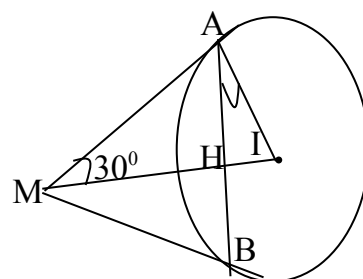
Phân tích:

Gọi tọa độ điểm M theo tham số t của đường thẳng d . Lập phương trình đường thẳng AB có chứa tham số t . Bài toán quy về tìm điểm cố định mà đường thẳng d luôn đi qua với mọi t .

Lời giải.

Phương trình đường tròn (C) có dạng $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$. Gọi $M(t; t - 1)$ phương trình đường thẳng AB là $(t - 1)(x - 1) + (t - 3)(y - 2) - 1 = 0$
 $(t - 1)x + (t - 3)y - 3t + 6 = 0$.

Gọi $N(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà đường thẳng AB luôn đi qua suy ra
 $(t - 1)x_0 + (t - 3)y_0 - 3t + 6 = 0 \forall t \Leftrightarrow (x_0 + y_0 - 3)t + 6 - x_0 - 3y_0 = 0 \forall t$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + y_0 - 3 = 0 \\ 6 - x_0 - 3y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{15}{4} \\ y_0 = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Vậy điểm cố định mà đường thẳng AB luôn đi qua là $M(\frac{15}{4}; -\frac{3}{4})$.

Thí dụ 7.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 2 đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 = 4$;

$(C_2): x^2 + y^2 = 16$; Từ điểm $M \in (C_2)$ kẻ 2 tiếp tuyến tới (C) (A, B là các tiếp điểm). Chứng minh đường thẳng AB luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Phân tích:

Để chứng minh đường thẳng AB luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định ta cần chứng minh đường thẳng AB luôn cách một điểm O cố định một khoảng không đổi R.

Lời giải:

Gọi điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đường tròn (C_2) .

Suy ra $x_0^2 + y_0^2 = 16$.

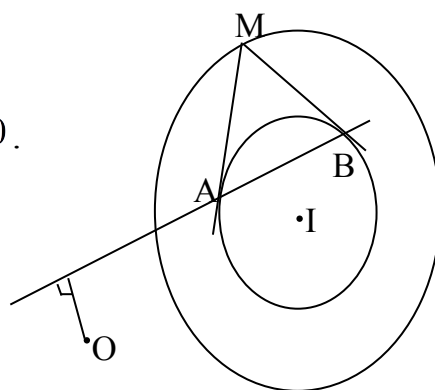
Phương trình đường thẳng AB: $x_0x + y_0y - 4 = 0$.

Xét đường tròn (C') tâm là gốc tọa độ $O(0;0)$,

bán kính $R = 1$.

$$\text{Ta có } d(O; AB) = \frac{|x_0 \cdot 0 + y_0 \cdot 0 - 4|}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{4}{4} = 1.$$

Vậy đường tròn đường thẳng AB luôn tiếp xúc với đường tròn (C') tâm $O(0;0)$ bán kính $R = 1$ cố định.



Bài toán 2.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 2 đường thẳng $d_1; d_2$ không vuông góc với nhau có phương trình lần lượt là: $(d_1): a_1x + b_1y + c_1 = 0; (d_2): a_2x + b_2y + c_2 = 0$,

Gọi φ là góc tạo bởi 2 đường thẳng d_1 và d_2 . Khi đó ta có $\tan \varphi = \left| \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1a_2 + b_1b_2} \right|$.

Đặc biệt khi $b_1 \cdot b_2 \neq 0$ tức là 2 đường thẳng có hệ số góc $k_1 = -\frac{a_1}{b_1}; k_2 = -\frac{a_2}{b_2}$ thì

$$\tan \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \right|.$$

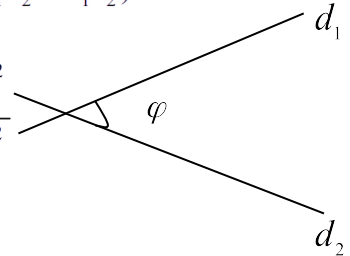
Chứng minh:

Ta đã có công thức $\cos \varphi = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$. Lại có $\frac{1}{\cos^2 \varphi} = 1 + \tan^2 \varphi$, suy ra

$$\tan^2 \varphi = 1 - \frac{1}{\cos^2 \varphi} = 1 - \frac{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}{(a_1 a_2 + b_1 b_2)^2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2)^2 - (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}{(a_1 a_2 + b_1 b_2)^2}$$

$$\Rightarrow \tan^2 \varphi = \frac{((a_1 b_2)^2 - 2a_1 b_2 a_2 b_1 + (a_2 b_1)^2)}{(a_1 a_2 + b_1 b_2)^2} = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{(a_1 a_2 + b_1 b_2)^2}$$

$$= \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{(a_1 a_2 + b_1 b_2)^2} \Rightarrow \tan \varphi = \left| \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2} \right|,$$



Khi $b_1 \cdot b_2 \neq 0$ tức là 2 đường thẳng có hệ số góc $k_1 = -\frac{a_1}{b_1}; k_2 = -\frac{a_2}{b_2}$ thì từ

$$\tan \varphi = \left| \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2} \right| \text{ ta chia cả tử và mẫu cho } |b_1 \cdot b_2| \text{ suy ra}$$

$$\tan \varphi = \left| \frac{\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2}}{\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} + 1} \right| = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

suy ra điều phải chứng minh.

Thí dụ 1. (Câu 8 trong đề thi KSCL lớp 12 THPT của Sở GD&ĐT tỉnh Thanh Hoá năm học 2015 - 2016).

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình bình hành ABCD có tâm

$I(2\sqrt{3} - 2; 5); BC = 2AB; \angle BAD = 60^\circ$. Điểm đối xứng với A qua B là điểm $E(-2; 9)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình bình hành biết A có hoành độ âm.

Phân tích:

Chứng minh được $AE \perp BD$. Lập phương trình đường thẳng EI.

Lập ptđt BD đi qua I và tạo với đường thẳng EI một góc cho trước. Lập được ptđt EB từ đó suy ra tọa độ điểm B, suy ra tọa độ điểm D.

Do B là trung điểm của AE từ đó suy ra tọa độ điểm A, suy ra tọa độ điểm C.

Lời giải:

Ta sẽ chứng minh $AB \perp BD$. Thật vậy:

Gọi M là trung điểm của AD suy ra tam giác ABM đều (tam giác cân có một góc bằng 60°) suy ra $BM = AM = MD$

suy ra tam giác ABD vuông tại B tức là $AB \perp BD$.

Đường thẳng EI đi qua 2 điểm E, I nên có phương trình

$$\frac{x + 2}{2\sqrt{3} - 2 + 2} = \frac{y - 9}{5 - 9} \Leftrightarrow 2x + \sqrt{3}y - 9\sqrt{3} + 4 = 0.$$

Đường thẳng EI có véc tơ pháp tuyến
 $\vec{n}_1(2; \sqrt{3})$. Đường thẳng BD tạo với đường

thẳng EI một góc $\varphi = \angle BIE$ thoả mãn $\tan \varphi = \frac{BE}{BI} = \frac{AB}{\frac{1}{2}BD} = \frac{2AB}{BD} = \frac{2AB}{\sqrt{3}AB} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Gọi

$\vec{n}_2(a; b)$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng BD suy ra

$$\tan \varphi = \left| \frac{2b - \sqrt{3}a}{2a + \sqrt{3}b} \right| = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -4\sqrt{3}b \end{cases}$$

TH1: Với $a = 0$ chọn $b = 1$ suy ra phương trình đường thẳng BD là
 $y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = 5$.

Lập phương trình đường thẳng BE .

Đường thẳng BE đi qua điểm E và vuông góc với BD có phương trình: $x + 2 = 0$

- Vì $B = BD \cap BE$ nên toạ độ điểm B là nghiệm của hệ pt:

$$\begin{cases} x + 2 = 0 \\ y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow B(-2; 5)$$

Do I là trung điểm của BD nên toạ độ điểm D là

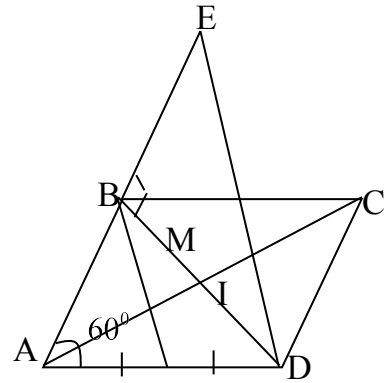
$$\begin{cases} x_D = 2x_I - x_B \\ y_D = 2y_I - y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 4\sqrt{3} - 2 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow D(4\sqrt{3} - 2; 5)$$

Do B là trung điểm của AE nên toạ độ điểm A là

$$\begin{cases} x_A = 2x_B - x_E \\ y_A = 2y_B - y_E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(-2; 1)$$

Do I là trung điểm của AC nên toạ độ điểm C là

$$\begin{cases} x_C = 2x_I - x_A \\ y_C = 2y_I - y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 4\sqrt{3} - 2 \\ y_C = 9 \end{cases} \Rightarrow C(4\sqrt{3} - 2; 9)$$



TH2: Với $a = -4\sqrt{3}b$ chọn $b = -1$; $a = 4\sqrt{3}$ suy ra phương trình đường thẳng BD
 là $4\sqrt{3}(x - 2\sqrt{3} + 2) - (y - 5) = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{3}x - y - 19 + 8\sqrt{3} = 0$

Đường thẳng BE đi qua điểm E và vuông góc với BD có phương trình:

$1(x + 2) + 4\sqrt{3}(y - 9) = 0 \Leftrightarrow x + 4\sqrt{3}y + 2 - 36\sqrt{3} = 0$. Vì $B = BD \cap BE$ nên toạ độ điểm B

là nghiệm của hệ pt:
$$\begin{cases} 4\sqrt{3}x - y + 8\sqrt{3} - 19 = 0 \\ x + 4\sqrt{3}y + 2 - 36\sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{16\sqrt{3} - 14}{7} \\ y = \frac{59}{7} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{16\sqrt{3} - 14}{7}; \frac{59}{7}\right)$$

- Do B là trung điểm của AE nên toạ độ điểm A là

$$\begin{cases} x_A = 2x_B - x_E \\ y_A = 2y_B - y_E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = \frac{32\sqrt{3} - 14}{7} \\ y = \frac{55}{7} \end{cases} \quad (\text{không thoả mãn điều kiện } x_A < 0).$$

Đs: $A(-2; 1); B(-2; 5); C(4\sqrt{3} - 2; 9); D(4\sqrt{3} - 2; 5)$

Lời bình: Đây là cách giải hoàn toàn khác so với đáp án của Sở, qua cách giải này ta thấy rằng. Khi giả thiết của bài toán cho số đo một góc nào đó, để giải quyết bài toán đó có thể sử dụng tới công thức

$$\tan \varphi = \left| \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2} \right| \text{ hoặc } \tan \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$$

Thí dụ 2. (Câu 7 trong đề thi mẫu của Bộ GD&ĐT năm 2015).

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho tam giác OAB có các đỉnh A, B thuộc đường thẳng $\Delta: 4x + 3y - 12 = 0$ và điểm $K(6;6)$ là tâm đường tròn bàng tiếp góc O. Gọi C là điểm trên Δ sao cho $AC = AO$ và các điểm C, B nằm khác phía nhau so với điểm A, biết điểm C có hoành độ bằng $\frac{24}{5}$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B.

B.

Phân tích:

Từ giả thiết ta biết được tọa độ điểm C.

Do $OA = OC$ nên tam giác AOC cân tại A, mà K là tâm đường tròn bàng tiếp góc O nên KA là phân giác ngoài góc $\angle AOC$ suy ra nó là phân giác trong góc $\angle OAC$

Suy ra KA là đường cao của tam giác OAC dẫn tới $KA \perp OC$, từ đó lập được phương trình đường thẳng KA.

Do $A = KA \cap \Delta$ nên tìm được tọa độ điểm A.

Lập phương trình đường thẳng OB đi qua điểm O và tạo với đường thẳng OK một góc φ mà $\varphi = \angle AOK$

Do $B = BO \cap \Delta$ nên từ đó suy ra tọa độ điểm B.

Lời giải:

Vì điểm C thuộc đường thẳng Δ và có hoành độ bằng $\frac{24}{5}$ nên tung độ bằng $-\frac{12}{5}$.

Vì K là tâm đường tròn bàng tiếp góc O của tam giác AOB nên K là giao điểm của đường phân giác trong góc $\angle AOB$ và đường phân giác ngoài góc $\angle AOC$, suy ra

KA là phân giác trong góc $\angle OAC$. Mà tam giác OAC cân tại A nên KA vuông góc với OC.

Suy ra đường thẳng KA nhận véc tơ $\vec{OC} = (\frac{24}{5}; -\frac{12}{5})$ làm véc tơ pháp tuyến suy ra

ptđt KA là: $2x - y - 6 = 0$. Vì $A = KA \cap \Delta$ nên tọa độ điểm A

là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - y - 6 = 0 \\ 4x + 3y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(3;0). \text{ Đường thẳng OK có phương trình } x - y = 0.$$

đường thẳng OA có phương trình $y = 0$.

$$\text{Suy ra } \tan(\angle OK, OA) = \left| \frac{1.1 + 0.1}{1.0 + (-1).1} \right| = 1,$$

dẫn đến góc tạo bởi OA và OK bằng 45° .

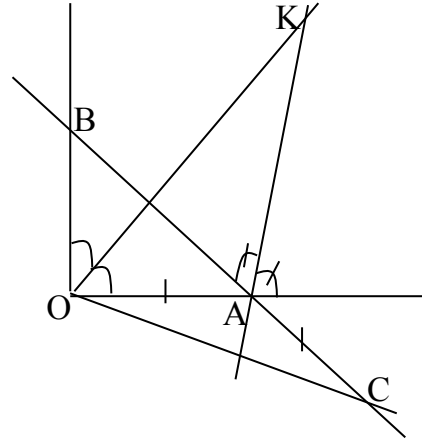
Suy ra góc tạo bởi OB và OK bằng 45° .

Vậy phương trình đường thẳng OB là $x=0$.

Vì $B = OB \cap \Delta$ nên tọa độ điểm B

là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x=0 \\ 4x+3y-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow B(0;4).$$



Thí dụ 3. (Câu IV.1 đề thi tuyển sinh đại học khối B năm 2002).

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có tâm

$I(\frac{1}{2}; 0)$. Phương trình đường thẳng AB: $x - 2y + 2 = 0$; $AB = 2AD$. Tìm tọa độ đỉnh

A biết A có hoành độ âm.

Phân tích:

Theo giả thiết $AB = 2AD \Rightarrow \tan \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$, từ đó lập được phương trình đường

thẳng AC đi qua điểm $I(\frac{1}{2}; 0)$ và tạo với đường thẳng AB một góc φ thỏa mãn

$$\tan \varphi = \frac{1}{2}.$$

Vì $A = AB \cap AC$ nên suy ra tọa độ điểm A.

Lời giải: Đường thẳng AB có véc tơ pháp

tuyến $n(1; -2)$.

Vì ABCD là hình chữ nhật và $AB = 2AD$ nên

$$\tan \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}. \text{ Gọi } n(a; b) \ (a^2 + b^2 \neq 0)$$

là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng AC ta có

$$\tan \angle BAC = \left| \frac{1.b + 2.a}{a - 2b} \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 5a = 0 \\ 3a = -4b \end{cases}$$

. Với $a=0$ chọn $b=1$ suy ra phương trình đường thẳng AC: $y=0$.

Vì $A = AB \cap AC$ nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y=0 \\ x-2y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow A(-2; 0)$$

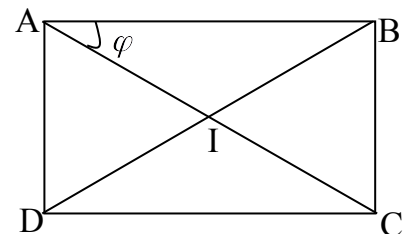
Với $3a = -4b$ chọn $b = -3; a = 4$. Suy ra phương trình đường thẳng AC:

$$4x - 3y - 2 = 0$$

Vì $A = AB \cap AC$ nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x - 3y - 2 = 0 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow A(2; 2) \text{ (Không thỏa mãn vì điểm A có hoành độ âm)}$$

Đs: $A(-2; 0)$



Thí dụ 4 (Đề thi Đại học khối A năm 2012)

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $CN = 2ND$. Giả sử $M(\frac{11}{2}; \frac{1}{2})$ và đường thẳng AN có phương trình $2x - y - 3 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh A.

Phân tích:

Tính $\tan \angle MAN$

Lập phương trình đường thẳng AM đi qua M và tạo với AN một góc φ thỏa mãn $\tan \varphi = \tan \angle MAN$.

Từ đó tìm tọa độ điểm A là nghiệm của hệ pt tạo bởi pt AM và AN.

Hướng dẫn:

Gọi độ dài cạnh của hình vuông là a . Khi đó

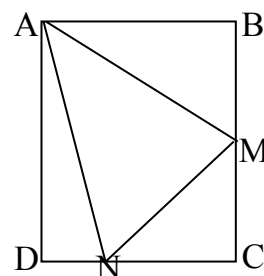
$$\tan(\angle DAN + \angle BAM) = \frac{\tan \angle DAN + \tan \angle BAM}{1 - \tan \angle DAN \tan \angle BAM} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow \angle DAN + \angle BAM = 45^\circ \Rightarrow \angle MAN = 45^\circ.$$

Từ đó lập được phương trình đường thẳng

AM là $3x + y - 17 = 0$ hoặc $x - 3y - 4 = 0$.

Từ đó ta tìm được 2 điểm A.

$A(4; 5)$ hoặc $A(1; -1)$.

**Thí dụ 5** (Đề thi Đại học khối A năm 2014)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình vuông ABCD có điểm M là trung điểm của đoạn AB. N là điểm thuộc cạnh AC sao cho $AN = 3NC$. Viết phương trình đường thẳng CD biết $M(1; 2); N(2; -1)$

Phân tích:

Lập phương trình đường thẳng MN.

Gọi I là giao điểm của MN và DC, tìm được tọa độ điểm I.

Nối M với tâm O của hình vuông và kéo dài cắt DC tại E. Tính được

$$\tan \angle MIE = \frac{ME}{EI}.$$

Lập phương trình đường thẳng DC đi qua điểm I và tạo với đường thẳng MN

một góc φ mà $\tan \varphi = \frac{ME}{EI}$.

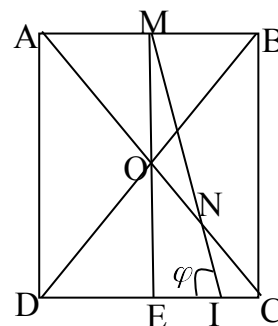
Hướng dẫn:

Gọi I là giao điểm của đường thẳng

MN và DC suy ra $\frac{MN}{NI} = \frac{AN}{NC} = 3 \Rightarrow MN = 3NI$

từ đó suy ra tọa độ điểm $I(\frac{7}{3}; -2)$.

Gọi a là cạnh của hình vuông

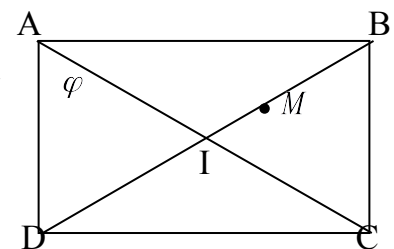


suy ra $ME = a; IC = \frac{a}{6}; EI = \frac{a}{3} \Rightarrow \tan \angle MEI = \frac{ME}{EI} = \frac{a}{\frac{a}{3}} = 3. \Rightarrow \tan \varphi = 3$

Từ đó lập được phương trình đường thẳng DC đi qua $I(\frac{7}{3}; -2)$ và tạo với đường thẳng MN một góc φ thỏa mãn $\tan \varphi = 3$.
Đs: $y = -2$ hoặc $3x - 4y - 15 = 0$.

Thí dụ 6 (Đề thi Đại học khối D năm 2012)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ các đường thẳng AC và AD lần lượt có phương trình $x + 3y = 0$; $x - y + 4 = 0$. Đường thẳng BD đi qua điểm $M(\frac{-1}{3}; 1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.



Phân tích: Từ pt đường thẳng AB và AD ta suy ra tọa độ điểm A và tính được $\tan \varphi = \tan(AC; AD)$.

Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên $(AD; BD) = \varphi$

Lập pt đường thẳng BD đi qua điểm M và tạo với AD một góc φ .

Tìm tọa độ điểm I là giao điểm của AC và BD .

Lập phương trình đường thẳng BC đi qua điểm C và tạo với đường thẳng AC một góc φ .

Lời giải:

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(-3; 1)$.

Gọi $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ lần lượt là véc tơ pháp tuyến của các đường thẳng AC và AD

Từ giả thiết ta có $\vec{n}_1(1; 3)$; $\vec{n}_2(1; -1)$.

Gọi góc tạo bởi hai đường thẳng AD và AC là φ khi đó $\tan \varphi = \left| \frac{1 \cdot (-1) - 1 \cdot 3}{1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1)} \right| = 2$.

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $(AD; BD) = \varphi$. Gọi $\vec{n}(a; b)$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) là véc tơ

pháp tuyến của đường thẳng BD khi đó $\tan(AD; BD) = \tan \varphi = \left| \frac{b + a}{a - b} \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b \\ b = 3a \end{cases}$

. Với $a = 3b$, chọn $b = 1; a = 3$ khi đó phương trình đường thẳng BD là

$$3(x + \frac{1}{3}) + 1 \cdot (y - 1) = 0 \Leftrightarrow 3x + y = 0$$

. Với $b = 3a$, chọn $a = 1; b = 3$ khi đó phương trình đường thẳng BD là

$$1 \cdot (x + \frac{1}{3}) + 3 \cdot (y - 1) = 0 \Leftrightarrow 3x + 9y - 8 = 0 \text{ (trường hợp này loại vì } BD \parallel AC \text{)}. \text{ Vậy}$$

$3x + y = 0$ là phương trình đường thẳng BD).

Khi đó tọa độ giao điểm I là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow I(0; 0)$$

Do I là trung điểm của AC nên tọa độ điểm $C(3; -1)$.

Đường thẳng BC đi qua điểm C và song song với AD có phương trình $x - y - 4 = 0$

. Vì $B = BD \cap BC$ nên tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow B(1; -3)$$

Vì I là trung điểm của BD nên tọa độ điểm $D(-1; 3)$
 Đs: $A(-3; 1); C(3; -1); B(1; -3); D(-1; 3)$

Thí dụ 8 (ĐH khối D năm 2014)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có chân đường phân giác trong góc A là điểm $D(1; -1)$. Đường thẳng AB có pt: $3x + 2y - 9 = 0$, tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $x + 2y - 7 = 0$. Viết phương trình đường thẳng BC .

Phân tích:

- Từ phương trình đường thẳng AB và phương trình tiếp tuyến tại A

Ta tìm được tọa độ điểm A và $\tan \varphi$ với φ là góc tạo bởi hai đường thẳng AB và tiếp tuyến tại A .

Lập phương trình đường thẳng AD đi qua 2 điểm $A; D$ đã biết được tọa độ từ đó tính được $\tan(AB; AD)$.

Lập phương trình đường thẳng AC đi qua điểm A và tạo với đường thẳng AD một góc bằng góc tạo bởi 2 đường thẳng $AB; AD$.

Lập phương trình đường thẳng BC đi qua điểm D và tạo với đường thẳng AC một góc bằng góc tạo bởi hai đường thẳng AB và tiếp tuyến tại A

Lời giải:

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x + 2y - 9 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(1; 3)$$

Gọi φ là góc tạo bởi đường thẳng AB và tiếp tuyến tại A

của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC khi đó $\tan \varphi = \left| \frac{3 \cdot 2 - 1 \cdot 2}{3 \cdot 1 + 2 \cdot 2} \right| = \frac{1}{7}$.

Phương trình đường thẳng AD : $x = 1$. Suy ra $\vec{n}_{AB}(3; 2); \vec{n}_{AD}(1; 0)$. Vậy

$$\tan(AB; AD) = \left| \frac{3 \cdot 0 - 2 \cdot 1}{3 \cdot 1 + 2 \cdot 0} \right| = \frac{2}{3}$$

Do AD là phân giác trong của góc A của tam giác ABC nên góc tạo bởi đường thẳng AC và AD bằng góc tạo bởi hai đường thẳng AB và AD .

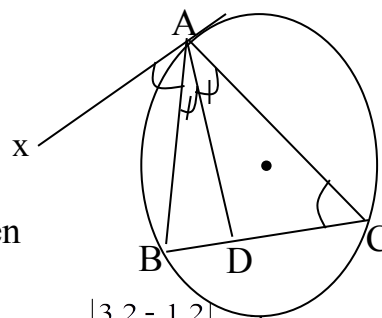
Theo tính chất góc nội tiếp đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung thì $\angle ACB = \angle CAB = \varphi$ suy ra góc tạo bởi hai đường thẳng $AC; BC$ bằng φ .

Gọi $\vec{n}(a; b) (a^2 + b^2 \neq 0)$ là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng AC ta có

$$\tan(AC; AD) = \left| \frac{a \cdot 0 - b \cdot 1}{a \cdot 1 - b \cdot 0} \right| = \tan(AB; AD) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left| \frac{b}{a} \right| = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2a = 3b \text{ hoặc } 2a = -3b.$$

Với $2a = 3b$ chọn $a = 3; b = 2$ khi đó véc tơ pháp tuyến của đường thẳng AC là $\vec{n}(3; 2)$ trường hợp này bị loại vì khi đó đường thẳng AC song song với đường thẳng AB . Với $2a = -3b$ chọn $a = 3; b = -2$ khi đó véc tơ pháp tuyến của đường thẳng AC là $\vec{n}(3; -2)$ và phương trình AC là $3(x - 1) - 2(y - 3) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y + 3 = 0$

Gọi $\vec{n}_1(a_1; b_1) (a_1^2 + b_1^2 \neq 0)$ là véc tơ pháp tuyến của đường thẳng BC ta có



$$\tan(\widehat{AC}; \widehat{BC}) = \left| \frac{-2a_1 - 3b_1}{3a_1 - 2b_1} \right| = \frac{4}{7} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = -2a_1 \\ a_1 = -\frac{29}{2}b_1 \end{cases}$$

Với $b_1 = -2a_1$ chọn $a_1 = 1; b_1 = -2$ khi đó phương trình đường thẳng BC là $1(x - 1) - 2(y + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 3 = 0$

Với $a_1 = -\frac{29}{2}b_1$ chọn $b_1 = -2; a_1 = 29$ khi đó phương trình đường thẳng BC là $29(x - 1) - 2(y + 1) = 0 \Leftrightarrow 29x - 2y - 31 = 0$.

Thử lại: Khi đường thẳng BC có phương trình $29x - 2y - 31 = 0$ tọa độ điểm $B(\frac{5}{4}; \frac{21}{8}); C(\frac{17}{13}; \frac{45}{13})$. Khi đó $\overline{DB} = (\frac{1}{4}; \frac{29}{8}); \overline{DC} = (\frac{4}{13}; \frac{58}{13}) \Rightarrow \overline{DB} = \frac{13}{16}\overline{DC}$ suy ra điểm D nằm ngoài đoạn BC đây là điều vô lý vì D là chân đường phân giác trong góc $\widehat{A}$ của tam giác ABC .

Khi đường thẳng BC có phương trình $x - 2y - 3 = 0$ tọa độ các điểm B, C là $B(3; 0); C(-3; -3)$. Khi đó $\overline{DB} = (2; 1); \overline{DC} = (-4; -2) \Rightarrow \overline{DC} = -2\overline{DB}$ (thỏa mãn)

Đs: Phương trình đường thẳng BC : $x - 2y - 3 = 0$.

Nhận xét. Qua các thí dụ trên ta nhận thấy rằng hai công thức (*) và (**) mà ta đã xây dựng và chứng minh đã giúp ích rất nhiều trong các bài toán hình tọa độ phẳng liên quan tới góc và tiếp tuyến. Áp dụng hai công thức trên ta có thể giải các bài toán sau.

Bài tập luyện thêm.

Bài 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn

$(C) (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 5$ và đường thẳng $\Delta: x + y + 1 = 0$. Từ điểm A thuộc Δ kẻ hai đường thẳng lần lượt tiếp xúc với (C) tại B và C . Tìm tọa độ điểm A biết rằng diện tích tam giác ABC bằng 8.

Bài 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn

$(C) (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ và đường thẳng $d: 3x - 4y + m = 0$

Tìm m để trên d có duy nhất một điểm M mà từ đó kẻ được 2 tiếp tuyến $MA; MB$ tới (C) (A, B là các tiếp điểm) sao cho tam giác MAB đều.

Bài 3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn $(C) x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$ và điểm $E(4; 1)$. Tìm điểm $M \in Oy$ sao cho từ M kẻ được hai tiếp tuyến $MA; MB$ tới (C) (A, B là các tiếp điểm) sao cho E thuộc đường thẳng AB .

Bài 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn

$(C) (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$ và đường thẳng $d: x + y + 5 = 0$. Tìm điểm $M \in d$ sao cho từ M kẻ được 2 tiếp tuyến $MA; MB$ tới (C) (A, B là các tiếp điểm) và đoạn AB có độ dài lớn nhất.

Bài 5. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn $(C) x^2 + (y + 1)^2 = 2$ và đường thẳng $d: x - 2y - 4 = 0$. Tìm điểm M thuộc d sao cho từ M kẻ hai tiếp tuyến $MA; MB$ tới đường tròn (C) mà diện tích tam giác MAB bằng 1.

Bài 6. Tam giác ABC cân tại A có đáy BC nằm trên đường thẳng có phương trình $2x - 5y + 1 = 0$, cạnh bên AB nằm trên đường thẳng $12x - y - 23 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AC biết rằng nó đi qua điểm $M(3; 1)$.

Bài 7. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD, biết phương trình chứa hai đường chéo là $d_1: 7x + y - 4 = 0$ và $d_2: x - y + 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng chứa các cạnh của hình chữ nhật, biết một đường thẳng chứa một cạnh của hình chữ nhật đi qua điểm $M(-3; 5)$.

Bài 8. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng 15. Đường thẳng AB có phương trình $x - 2y = 0$. Trọng tâm tam giác BCD là điểm $G(\frac{16}{3}; \frac{13}{3})$. Tìm toạ độ 4 đỉnh của hình chữ nhật biết điểm B có tung độ lớn hơn 3.

Bài 9. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hình vuông ABCD. Điểm $F(\frac{11}{2}; 3)$ là trung điểm của cạnh AD, điểm E là trung điểm của cạnh AB và điểm K thuộc cạnh DC sao cho $KD = 3KC$. Đường thẳng EK có phương trình $19x - 8y - 18 = 0$. Tìm toạ độ đỉnh C của hình vuông biết rằng điểm E có hoành độ nhỏ hơn 3.

Bài 10. (Đề thi ĐH khối B năm 2013)

Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy cho hình thang cân ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau và $AD = 3BC$, đường thẳng BD có phương trình $x + 2y - 6 = 0$ và tam giác ABD có trực tâm $H(-3; 2)$. Tìm toạ độ các đỉnh B và C.

2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm đối với hoạt động giáo dục, với bản thân, đồng nghiệp và nhà trường.

Có thể nói đề tài đã hình thành cho các em học sinh 2 điều:

Một là: Nếu giả thiết của bài toán có liên quan tới 2 tiếp tuyến kẻ từ một điểm tới một đường tròn thì ta nghĩ tới việc sử dụng công thức (*).

Hai là: Nếu giả thiết của bài toán có liên quan tới góc thì ta nghĩ tới việc sử dụng công thức (**). Góc ở đây có thể cho trực tiếp số đo hoặc cho gián tiếp thông qua $\cos$ hoặc $\tan$ của góc đó.

Sau khi áp dụng sáng kiến ở lớp 12A6 trường THPT Lê Lợi năm học 2015 - 2016 (45 học sinh). Kết quả thu được có sự khả quan. Cụ thể: Tôi ra đề kiểm tra 90 phút gồm 4 câu trong mục 2.3. Kết quả như sau:

Tháng 4 năm 2016 (Chưa áp dụng sáng kiến).

Số hs	Điểm giỏi		Điểm khá		Điểm trung bình		Điểm yếu		Điểm kém	
45	SL	Tỷ lệ	SL	Tỷ lệ	SL	Tỷ lệ	SL	Tỷ lệ	SL	Tỷ lệ
	2	4,4%	6	13,3%	25	55,7%	10	22,2%	2	4,4%

Tháng 5 năm 2016 (Sau khi áp dụng sáng kiến).

Số hs	Điểm giỏi		Điểm khá		Điểm trung bình		Điểm yếu		Điểm kém	
45	SL	Tỷ lệ	SL	Tỷ lệ	SL	Tỷ lệ	SL	Tỷ lệ	SL	Tỷ lệ
	5	11,1%	10	22,2%	20	44,5%	8	17,8%	2	4,4%

3. KẾT LUẬN.

Trong đề thi tốt nghiệp THPT Quốc gia hiện nay, theo cấu trúc của Bộ GD&ĐT, các bài toán về toạ độ trong mặt phẳng thường xuyên xuất hiện, nó được xếp vào câu phân loại học sinh ở mức độ vận dụng, vận dụng cao. Có 3 hướng chính để

giải quyết bài toán này. Một là: sử dụng các tính chất hình học phẳng đã biết ở cấp THCS sau đó áp dụng các công thức, phương trình tọa độ ở cấp THPT vào tính toán. Hai là: Từ các dữ kiện về tọa độ ta biến đổi, tính toán để phát hiện thêm các giả thiết thuần hình học ẩn chứa trong bài toán mà đề bài đã giấu kín. Từ đó kết hợp giả thiết hình học và giả thiết tọa độ giải quyết bài toán. Ba là: chứng minh một kết quả hay một công thức có tính tổng quát sau đó áp dụng nó trong nhiều bài toán khác có ý tưởng liên quan. Đề tài này đã triển khai theo hướng thứ ba. Hy vọng rằng đây sẽ là một tài liệu tham khảo giúp ích cho các đồng nghiệp và các em học sinh trong quá trình ôn thi tốt nghiệp THPT Quốc gia năm nay và những năm sắp tới. Trong quá trình viết không tránh khỏi những thiếu sót, kính mong đồng nghiệp phê bình góp ý. Xin chân thành cảm ơn.

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN
VỊ.

Thanh Hoá ngày 25 tháng 5 năm 2016
Tôi xin cam đoan đây là sáng kiến kinh
nghiệm của mình viết, không sao chép
nội dung của người khác.

Hà Sỹ Tiến