

Câu 1. (5,0 điểm)

Cho biểu thức
$$P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x} \right)$$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn P

b) Tìm x để $P = \frac{-1}{2}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x > 1$

Câu 2. (6 điểm)

a) Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng: $f(x)$ chia cho $x+2$ dư 10, $f(x)$ chia cho $x-2$ dư 22, $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư

b) Chứng minh rằng với mọi số nguyên a thì $a^3 + 5a$ chia hết cho 6

c) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + xy - 2012x - 2013y - 2014 = 0$

Câu 3. (3,0 điểm)

a) Cho $a + b + c = 0$ và $abc \neq 0$, tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}$$

b) Cho 2 số a và b thỏa mãn $a \geq 1; b \geq 1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$$

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ có AC cắt BD tại O. M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC ($M \neq B, C$). Tia AM cắt đường thẳng CD tại N. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $BE = CM$.

a) Chứng minh : $\triangle OEM$ vuông cân

b) Chứng minh: $ME \parallel BN$

c) Từ C kẻ $CH \perp BN (H \in BN)$. Chứng minh rằng ba điểm O, M, H thẳng hàng.

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) ĐKXĐ: $x \neq 0; x \neq 1; x \neq -1$

$$\begin{aligned} P &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \left[\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} + \frac{x}{x(x-1)} + \frac{2-x^2}{x(x-1)} \right] \\ &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x^2-1+x+2-x^2}{x(x-1)} = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x+1}{x(x-1)} \\ &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{x+1} = \frac{x^2}{x-1} \end{aligned}$$

b) $P = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{-1}{2}$ với $x \in \text{ĐKXĐ}$
 $\Rightarrow 2x^2 = -x+1 \Leftrightarrow 2x^2+x-1=0$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} (TM) \\ x = -1 (KTM) \end{cases}$$

Vậy $P = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

c)

$$P = \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2-1+1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)+1}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1}$$

$$P = x+1 + \frac{1}{x-1} = x-1 + \frac{1}{x-1} + 2$$

Vì $x > 1$ nên $x-1 > 0$. Áp dụng BĐT Cosi ta có: $x-1 + \frac{1}{x-1} \geq 2\sqrt{(x-1)\frac{1}{x-1}} = 2$

$$\Leftrightarrow x-1 = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 2 (TM)$$

Dấu “=” xảy ra

Vậy GTNN của P là 4 $\Leftrightarrow x = 2$

Câu 2.

a) Giả sử $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư là $ax + b$

Khi đó: $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + ax + b$

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{cases} f(2) = 22 \\ f(-2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 22 \\ -2a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 16 \end{cases}$$

Do đó: $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + 3x + 16$

Vậy đa thức $f(x)$ cần tìm có dạng: $f(x) = -5x^3 + 23x + 16$

b) $a^3 + 5a = a^3 - a + 6a = a(a^2 - 1) + 6a = a(a - 1)(a + 1) + 6a$

Vì $a(a - 1)(a + 1)$ là tích 3 số nguyên liên tiếp nên có 1 số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3 mà $(2, 3) = 1$ nên $a(a - 1)(a + 1)$ chia hết cho 6
 $6a$ chia hết cho 6

Nên $a^3 + 5a$ chia hết cho 6

c) $x^2 + xy - 2012x - 2013y - 2014 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + xy + x - 2013x - 2013y - 2013 = 1$$

$$\Leftrightarrow x(x + y + 1) - 2013(x + y + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow (x - 2013)(x + y + 1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2013 = 1 \\ x + y + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2014 \\ y = -2014 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2013 = -1 \\ x + y + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2012 \\ y = -2014 \end{cases}$$

Câu 3.

a)

$$P = \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}$$

$$= \frac{1}{b^2 + c^2 - (b + c)^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - (a + c)^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - (a + b)^2}$$

$$= \frac{1}{-2ab} + \frac{1}{-2ac} + \frac{1}{-2ab} = \frac{a + b + c}{-2abc} = 0$$

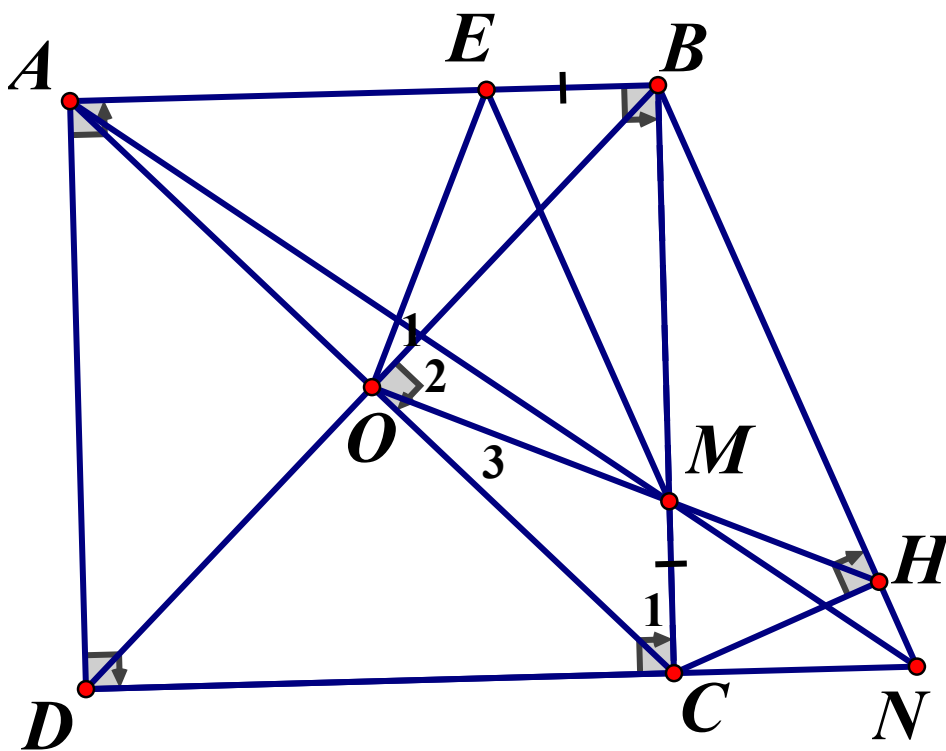
b) $\frac{1}{1 + a^2} + \frac{1}{1 + b^2} - \frac{2}{1 + ab} = \left(\frac{1}{1 + a^2} - \frac{1}{1 + ab} \right) + \left(\frac{1}{1 + b^2} - \frac{1}{1 + ab} \right)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{ab - a^2}{(1 + a^2)(1 + ab)} + \frac{ab - b^2}{(1 + b^2)(1 + ab)} \\
&= \frac{a(b - a)(1 + b^2) + b(a - b)(1 + a^2)}{(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + ab)} = \frac{(b - a)(a + ab^2 - b - a^2b)}{(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + ab)} = \frac{(b - a)^2(ab - 1)}{(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + ab)} \\
&\quad \frac{(b - a)^2(ab - 1)}{(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + ab)} \geq 0
\end{aligned}$$

Do $a \geq 1; b \geq 1$ nên

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + a^2} + \frac{1}{1 + b^2} - \frac{2}{1 + ab} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1 + a^2} + \frac{1}{1 + b^2} \geq \frac{2}{1 + ab}$$

Câu 4.



a) Xét $\triangle OEB$ và $\triangle OMC$

Vì $ABCD$ là hình vuông nên ta có: $OB = OC$

Và $\angle B_1 = \angle C_1 = 45^\circ, BE = CM (gt) \Rightarrow \triangle OEB = \triangle OMC (c.g.c)$

$\Rightarrow OE = OM$ và $\angle 1 = \angle 3$

Lại có: $\angle 2 + \angle 3 = \angle BOC = 90^\circ$ vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông

$\Rightarrow \angle_2 + \angle_1 = \angle EOM = 90^\circ$ kết hợp với $OE = OM \Rightarrow \triangle OEM$ vuông cân tại O

b) Từ giả thiết tứ giác $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AB \parallel CD$ và $AB = CD$

$AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel CN \Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{BM}{MC}$ (định lý Ta let) (*)

Mà $BE = CM(gt)$ và $AB = CD \Rightarrow AE = BM$ thay vào (*)

Ta có: $\frac{AM}{MN} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow ME \parallel BN$ (Ta let đảo)

c) Gọi H' là giao điểm của OM và BN

Từ $ME \parallel BN \Rightarrow \angle ME = \angle H'E$ (cặp góc so le trong)

Mà $\angle ME = 45^\circ$ vì $\triangle OEM$ vuông cân tại O

$\Rightarrow \angle H'B = 45^\circ = \angle_1 \Rightarrow \triangle OMC \sim \triangle BMH' (g.g)$

$\Rightarrow \frac{OM}{OB} = \frac{MH'}{MC}$, kết hợp $\angle OMB = \angle MH'C$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \triangle OMB \sim \triangle CMH' (c.g.c) \Rightarrow \angle BM = \angle MH'C = 45^\circ$

Vậy $\angle H'C = \angle H'M + \angle MH'C = 90^\circ \Rightarrow CH' \perp BN$

Mà $CH \perp BN (H \in BN) \Rightarrow H \equiv H'$ hay 3 điểm O, M, H thẳng hàng (đpcm)