

CHƯƠNG III: GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

BÀI 1: GIỚI HẠN DÃY SỐ

(17 câu)

1. NHẬN BIẾT (5 câu)

Câu 1: Tính các giới hạn sau bằng định nghĩa.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1}$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k}$.

Giải:

a) Với $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a > \frac{1}{a} - 1$ ta có $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n_a+1} < a, \forall n > n_a$ nên có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

b) Với $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a > \sqrt[k]{\frac{1}{a}}$ ta có $\frac{1}{n^k} < \frac{1}{n_a^k} < a, \forall n > n_a$ nên có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$.

Câu 2: Tính giá trị giới hạn sau bằng định nghĩa

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 n}{n+2}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n^2}{n}$

Giải:

a) Với $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a > \frac{1}{a} - 2$ ta có $\frac{\sin^2 n}{n+2} < \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n_a+2} < a, \forall n > n_a$ nên có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 n}{n+2} = 0$$

b) Với mọi số dương M lớn tùy ý ta chọn n_M thỏa $\frac{n_M^2 - 1}{n_M} > M$

$$\Leftrightarrow n_M > \frac{M + \sqrt{M^2 + 4}}{2}.$$

Ta có: $\frac{n^2 - 1}{n} > M, \forall n > n_M \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n} = +\infty$

Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n^2}{n} = -\infty$.

Câu 3: Tính giá trị của giới hạn

a) $A = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2n+1}{1-3n}$

b) $B = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 4n^2+3n+1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 4n^2+3n+1}$

Giải:

a) $A = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2n+1}{1-3n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 2}{\frac{1}{n} - 3} = \frac{2}{-3}$

b) $B = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 4n^2+3n+1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 4n^2+3n+1}$

Câu 4: Tính giá trị của giới hạn

a) $\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} -n^2+2n+1}{\sqrt{3n^4+2}}$

b) $\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3n-n^4}{4n^4-5}$

Giải:

a) $\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} -n^2+2n+1}{\sqrt{3n^4+2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{\sqrt{3 + \frac{2}{n^2}}} = \frac{-1+0+0}{\sqrt{3+0}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3n-n^4}{4n^4-5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n^3}-1}{4-\frac{5}{n^4}} = \frac{-1}{4}$.

Câu 5: Tính giá trị

a) $A = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2n^2+3n+1}{3n^2-n+2}$

$$b) B = \frac{\lim \frac{\sqrt{n^2+2n}}{n-\sqrt{3n^2+1}}}{n-\sqrt{3n^2+1}}$$

Giải:

$$a) \text{ Ta có: } A = \frac{\lim 2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} = \frac{2}{3}.$$

$$b) \text{ Ta có: } B = \frac{\lim \frac{\sqrt{n^2+n}}{n}}{\frac{n-\sqrt{3n^2+1}}{n}} = \frac{\lim \sqrt{1+\frac{1}{n}}}{1-\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{1-\sqrt{3}}$$

2. THÔNG HIỂU (7 câu)

Câu 1: Tính giá trị giới hạn sau bằng định nghĩa

$$a) \frac{\lim 2}{n+1}$$

$$b) \frac{\lim 2-n}{\sqrt{n+1}}$$

Giải:

$$a) \text{ Với mọi } a > 0 \text{ nhỏ tùy ý, ta chọn } n_a = \left\lfloor \frac{2}{a} - 1 \right\rfloor + 1$$

$$\text{Suy ra } \frac{2}{n+1} < a, \forall n > n_a \Rightarrow \lim \frac{2}{n+1} = 0.$$

$$b) \text{ Với mọi } M > 0 \text{ lớn tùy ý, ta chọn } n_M > \left(\frac{1}{a} + 3 \right)^2 - 1$$

$$\text{Ta có: } \frac{n-2}{\sqrt{1+n}} = \sqrt{n+1} - \frac{3}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{1+n} - 3 > M, \forall n > n_M$$

$$\text{Suy ra } \lim \frac{2-n}{\sqrt{n+1}} = -\infty.$$

Câu 2: Tính giá trị giới hạn sau bằng định nghĩa

$$a) A = \frac{\lim 2n+1}{n-2}$$

$$b) B = \frac{\lim 2n+3}{n^2+1}$$

Giải:

a) Với số thực $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a > \frac{5}{a} + 2 > 2$

$$\text{Ta có: } \left| \frac{2n+1}{n-2} - 2 \right| = \frac{5}{n-2} < \frac{5}{n_a-2} < a, \forall n > n_a$$

Vậy $A = 2$.

b) Với số thực $a > 0$ nhỏ tùy ý, ta chọn n_a thỏa $\frac{2n_a+3}{n_a^2+1} < a$

$$\Leftrightarrow n_a > \frac{1 + \sqrt{a^2 - 4a + 13}}{a}$$

$$\text{Ta có: } \frac{2n+3}{n^2+1} < a, \forall n > n_a \Rightarrow B = 0.$$

Câu 3: Tính giá trị

$$a) A = \lim (2n^2+1)^4$$

$$b) B = \frac{\lim \sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{3n^3+2}}{\sqrt[4]{2n^4+n+2} - n}$$

$$c) C = \lim (-n^2 + n\sqrt{n+1})$$

Giải:

$$a) \text{ Ta có. } A = \frac{\lim n^8 \left(2 + \frac{1}{n^2}\right)^4 \cdot n^9 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^9}{n^{17} \left(1 + \frac{1}{n^{17}}\right)} = \frac{\lim \left(2 + \frac{1}{n^2}\right)^4 \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)^9}{1 + \frac{1}{n^{17}}} = 16$$

$$b) \text{ Ta có: } B = \frac{\lim n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt[3]{3 + \frac{2}{n^3}} \right)}{n \left(\sqrt[4]{2 + \frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^4}} - 1 \right)} = \frac{1 - \sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{2} - 1}$$

c) Ta có: $C = \lim (i - n^2 + n\sqrt{n+1}) = \lim (i - n^2) \left(1 - \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}\right) = -\infty$

Câu 4: Tính giới hạn

a) $\lim (n-1) \sqrt{\frac{2n+2}{n^4+n^2-1}}$.

b) $\frac{\lim 10}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$

Giải:

a) Ta có $\lim u_n = \lim (n-1) \sqrt{\frac{2n+2}{n^4+n^2-1}}$

$\lim \sqrt{\frac{2n^3-2n^2-2n+2}{n^4+n^2-1}}$

$\lim \sqrt{\frac{2n^3-2n^2-2n+2}{n^4+n^2-1}}$

$\lim \sqrt{\frac{\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{2}{n^3} + \frac{2}{n^4}}{1 + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4}}} = 0.$

b) Ta có: $\frac{\lim 10}{\sqrt{n^4+n^2+1}} = \frac{\lim 10}{n^2 \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}}}$

Mà $\lim \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} = 1$ và $\frac{\lim 10}{n^2} = 0$

Nên $\frac{\lim 10}{\sqrt{n^4+n^2+1}} = 0.$

Câu 5: Tính giới hạn

a) $\frac{\lim 1+3+5+\dots+(2n-1)}{3n^2+4}$

b) $\lim \sqrt{3 + \frac{n^2-1}{3+n^2}} - \frac{1}{2^n}$

Giải:

a) Ta có:
$$\frac{\lim 1+3+5+\dots+(2n-1)}{3n^2+4} = \frac{\lim n^2}{3n^2+4} = \frac{\lim 1}{3+\frac{4}{n^2}} = \frac{1}{3}.$$

(Vì $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$).

b)
$$\lim \sqrt{3 + \frac{n^2-1}{3+n^2} - \frac{1}{2^n}} = \lim \sqrt{3 + \frac{1-\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2}+1} - \frac{1}{2^n}} = \sqrt{3 + \frac{1}{1} - 0} = 2$$

Câu 6: Tính giới hạn

a)
$$\frac{\lim 3^n - 4 \cdot 2^{n-1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n}$$

b)
$$\lim \left(n^2 \sin \frac{n\pi}{5} - 2n^3 \right)$$

c)
$$\lim (\sqrt{n^2+6n} - n)$$

d)
$$\lim (\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1})$$

Giải:

a)

$$\frac{\lim 3^n - 4 \cdot 2^{n-1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n} = \frac{\lim 3^n - 2 \cdot 2^n - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n} = \frac{\lim 3^n \left(1 - 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^n - 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^n \right)}{4^n \left(3 \cdot \left(\frac{2}{4} \right)^n + 1 \right)}$$

$$\stackrel{!}{=} \lim \left(\frac{3}{4} \right)^n \frac{\left(1 - 4 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^n - 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^n \right)}{\left(3 \cdot \left(\frac{2}{4} \right)^n + 1 \right)} = 0.$$

b)

$$\lim \left(n^2 \sin \frac{n\pi}{5} - 2n^3 \right) = \lim n^3 \left(\frac{\sin \frac{n\pi}{5}}{n} - 2 \right) = -\infty$$

$$\text{Vì } \lim n^3 = +\infty; \lim \left(\frac{\sin \frac{n\pi}{5}}{n} - 2 \right) = -2$$

$$\text{Do } \left| \frac{\sin \frac{n\pi}{5}}{n} \right| \leq \frac{1}{n}; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{n\pi}{5}}{n} - 2 \right) = -2.$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 6n} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n}{\sqrt{n^2 + 6n} + n} = 3$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}$$

Câu 7: Tính giới hạn

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 9n^2} - n)$$

$$\text{b) } D = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt[3]{n^3 + 2n^2})$$

Giải:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 9n^2} - n) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 9n^2}{\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{(n^3 + 9n^2)^2} + n\sqrt[3]{n^3 + 9n^2} + n^2)}$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 9}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{\left(1 + \frac{9}{n}\right)^2} + \sqrt{1 + \frac{9}{n}} + 1 \right)} = 3$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n) - \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 2n^2} - n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{\sqrt[3]{(n^3 + 2n^2)^2} + n\sqrt[3]{n^3 + 2n^2} + n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{n}} + 1} = \frac{1}{3}.$$

3. VẬN DỤNG (3 câu)

Câu 1: Tính giới hạn của dãy số $u_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{2k-1}{2^k}$

Giải:

Ta có: $u_n - \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}u_n = \frac{3}{2} - \frac{2n+1}{2^{n+1}} \Rightarrow \lim u_n = 3$$

Câu 2: Tính giới hạn của dãy số $D = \lim (\sqrt{n^2+n+1} - 2\sqrt[3]{n^3+n^2-1} + n)$

Giải:

Ta có: $D = \lim (\sqrt{n^2+n+1} - n) - 2 \lim (\sqrt[3]{n^3+n^2-1} - n)$

Mà: $\lim (\sqrt{n^2+n+1} - n) = \frac{\lim n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \frac{\lim 1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+1}} = \frac{1}{2}$

$$\lim (\sqrt[3]{n^3+n^2-1} - n) = \frac{\lim n^2-1}{\sqrt[3]{(n^3+n^2-1)^2} + n \cdot \sqrt[3]{n^3+n^2-1} + n^2}$$

$$\lim 1 - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^6}\right)^2} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} + 1}} = \frac{1}{3}$$

Vậy $D = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{-1}{6}$.

Câu 3: Cho dãy (x_k) được xác định như sau: $x_k = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{k}{(k+1)!}$

Tìm $\lim u_n$ với $u_n = \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2011}^n}$.

Giải:

Ta có: $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$ nên $x_k = 1 - \frac{1}{(k+1)!}$

Suy ra $x_k - x_{k+1} = \frac{1}{(k+2)!} - \frac{1}{(k+1)!} < 0 \Rightarrow x_k < x_{k+1}$

Mà: $x_{2011} < \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2011}^n} < \sqrt[n]{2011} x_{2011}$

Mặt khác: $\lim x_{2011} = \lim \sqrt[n]{2011} x_{2011} = x_{2011} = 1 - \frac{1}{2012!}$

Vậy $\lim u_n = 1 - \frac{1}{2012!}$.

4. VẬN DỤNG CAO (2 câu)

Câu 1: Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = x_n^2 + x_n, \forall n \geq 1$

Đặt $S_n = \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \dots + \frac{1}{x_n+1}$. Tính $\lim S_n$.

Giải:

Từ công thức truy hồi ta có: $x_{n+1} > x_n, \forall n = 1, 2, \dots$

Nên dãy (x_n) là dãy số tăng.

Giả sử dãy (x_n) là dãy bị chặn trên, khi đó sẽ tồn tại $\lim x_n = x$

Với x là nghiệm của phương trình: $x = x^2 + x \Leftrightarrow x = 0 < x_1$ vô lí

Do đó dãy (x_n) không bị chặn, hay $\lim x_n = +\infty$.

Mặt khác: $\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n(x_n+1)} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n+1}$

Suy ra: $\frac{1}{x_n+1} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}}$

Dẫn tới: $S_n = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{n+1}} = 2 - \frac{1}{x_{n+1}} \Rightarrow \lim S_n = 2 - \lim \frac{1}{x_{n+1}} = 2$

Câu 2: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_0 = 2011 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2} \end{cases}$. Tìm $\lim \frac{u_n^3}{n}$

Giải:

Ta thấy $u_n > 0, \forall n$

Ta có: $u_{n+1}^3 = u_n^3 + 3 + \frac{3}{u_n^3} + \frac{1}{u_n^6} \quad (1)$

Suy ra: $u_n^3 > u_{n-1}^3 + 3 \Rightarrow u_n^3 > u_0^3 + 3n \quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra: $u_{n+1}^3 < u_n^3 + 3 + \frac{1}{u_0^3 + 3n} + \frac{1}{(u_0^3 + 3n)^2} < u_n^3 + 3 + \frac{1}{3n} + \frac{1}{9n^2}$

Do đó: $u_n^3 < u_0^3 + 3n + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{9} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

Lại có: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \frac{1}{n} < 2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}} < \sqrt{2n}$

Nên: $u_0^3 + 3n < u_n^3 < u_0^3 + 3n + \frac{2}{9} + \frac{\sqrt{2n}}{3}$

Hay $3 + \frac{u_0^3}{n} < \frac{u_n^3}{n} < 3 + \frac{u_0^3}{n} + \frac{2}{9n} + \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{n}}$.

Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n^3}{n} = 3$.