

BÀI 2. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

CHƯƠNG 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1. Công thức cộng

Câu 1. (SGK-KNTT-11-Tập 1) Chứng minh rằng:

a) $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right);$

b) $\tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right).$

Lời giải

a)

$$VP = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \sqrt{2} \sin x \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} \cos x \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin x - \cos x = VT$$

$$VT = \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan x} = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = VP \left(\tan \frac{\pi}{4} = 1 \right)$$

b)

Câu 2. (SGK-KNTT-11-Tập 1) Sử dụng $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$, hãy tính các giá trị lượng giác của góc 15° .

Lời giải

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\cot 15^\circ = \frac{1}{\tan 15^\circ} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$$

Câu 3. (SGK-KNTT-11-Tập 1) Tính:

a) $\cos \left(a + \frac{\pi}{6} \right)$, biết $\sin a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$;

b) $\tan \left(a - \frac{\pi}{4} \right)$, biết $\cos a = -\frac{1}{3}$ và $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$.

Lời giải

a) Vì $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ suy ra $\cos a < 0$

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos a = -\sqrt{1 - \sin^2 a} = -\sqrt{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Ta có:

$$\cos\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \cos a \cos \frac{\pi}{6} - \sin a \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{6}$$

b) Vì $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$ suy ra $\sin a < 0$

Ta có: $\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \sin a = -\sqrt{1 - \cos^2 a} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = 2\sqrt{2}$

$$\tan\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan a - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan a \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3} - 1}{1 + \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)} = -17 + 12\sqrt{2}$$

Câu 4. (SGK-KNTT-11-Tập 1) Một thiết bị trễ kỹ thuật số lặp lại tín hiệu đầu vào bằng cách lặp lại tín hiệu đó trong một khoảng thời gian cố định sau khi nhận được tín hiệu. Nếu một thiết bị như vậy nhận được nốt thuần $f_1(t) = 5\sin t$ và phát lại được nốt thuần $f_2(t) = 5\cos t$ thì âm kết hợp là $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, trong đó t là biến thời gian. Chứng tỏ rằng âm kết hợp viết được dưới dạng $f(t) = k \sin(t + \varphi)$, tức là âm kết hợp là một sóng âm hình sin. Hãy xác định biên độ âm k và pha ban đầu φ ($-\pi \leq \varphi \leq \pi$) của sóng âm.

Lời giải

Ta có: $f(t) = f_1(t) + f_2(t) = 5\sin t + 5\cos t = 5(\sin t + \cos t)$

Theo Ví dụ 2 trang 18 SGK Toán lớp 11 Tập 1, ta chứng minh được

$$\sin t + \cos t = \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(t) = 5\sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Do đó,

Vậy âm kết hợp viết được dưới dạng $f(t) = k \sin(t + \varphi)$, trong đó biên độ âm $k = 5\sqrt{2}$ và pha

ban đầu của sóng âm là $\varphi = \frac{\pi}{4}$

Câu 5. Tính các giá trị lượng giác sau:

a) $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ khi $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

b) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$ khi $\sin \alpha = -\frac{12}{13}, \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

c) $\cos(a + b)\cos(a - b)$ khi $\cos a = \frac{1}{3}, \cos b = \frac{1}{4}$.

d) $\sin(a - b), \cos(a + b), \tan(a + b)$ khi $\sin a = \frac{8}{17}, \tan b = \frac{5}{12}$ và a, b là các góc nhọn.

Lời giải

a) Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha < 0$.

Ta có: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Suy ra: $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{4}{5} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{3}{4}$.

$$\tan\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} + \tan \alpha}{1 - \tan \frac{\pi}{3} \tan \alpha} = \frac{48 - 25\sqrt{3}}{11}$$

Vậy

b) Vì $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên $\cos \alpha > 0$.

Ta có: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Suy ra: $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{5}{13}$

Vậy $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{5 - 12\sqrt{3}}{26}$

c) Ta có:

$$\cos a = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin^2 a = 1 - \cos^2 a = \frac{8}{9};$$

$$\cos b = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 b = 1 - \cos^2 b = \frac{15}{16}$$

Từ đó:

$$\begin{aligned} \cos(a+b)\cos(a-b) &= (\cos a \cos b - \sin a \sin b)(\cos a \cos b + \sin a \sin b) \\ &= \cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b = -\frac{119}{144} \end{aligned}$$

d) Với a, b là các góc nhọn, ta có: $\cos a > 0, \cos b > 0, \sin b > 0$

Khi đó:

$$\cos b = \sqrt{\frac{1}{\tan^2 b + 1}} = \frac{12}{13} \Rightarrow \sin b = \frac{5}{13}$$

$$\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \frac{15}{17}$$

Vậy:

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b = \frac{21}{221}$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b = \frac{140}{221}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{171}{140}$$

Câu 6. Tính giá trị của biểu thức lượng giác, khi biết:

a) $\cos 2\alpha, \sin 2\alpha, \tan 2\alpha$ khi $\cos \alpha = -\frac{5}{13}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

b) $\cos 2\alpha, \sin 2\alpha, \tan 2\alpha$ khi $\tan \alpha = 2$

c) $\sin \alpha, \cos \alpha$ khi $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

d) $\cos 2\alpha, \sin 2\alpha, \tan 2\alpha$ khi $\tan \alpha = \frac{7}{8}$

Lời giải

a) $\cos 2\alpha, \sin 2\alpha, \tan 2\alpha$ khi $\cos \alpha = -\frac{5}{13}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

Ta có $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{12}{13} \\ \sin \alpha = -\frac{12}{13} \end{cases}$

Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên ta chọn $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$.

Khi đó

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right)^2 - 1 = \frac{-119}{169} \\ \sin 2\alpha &= 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{-12}{13} \cdot \frac{-5}{13} = \frac{120}{169} \\ \tan 2\alpha &= \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{120}{119} \end{aligned}$$

b) Tính $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\tan 2\alpha$ khi $\tan \alpha = 2$.

Đặt $t = \tan \alpha = 2$.

Ta có $\sin 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2 \cdot 2}{1+2^2} = \frac{4}{5}$.

$$\cos 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-2^2}{1+2^2} = \frac{-3}{5},$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2t}{1-t^2} = \frac{4}{-3}.$$

c) $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ khi $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Ta có $\cos^2 2\alpha = 1 - \sin^2 2\alpha = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2\alpha = \frac{3}{5} \\ \cos 2\alpha = -\frac{3}{5} \end{cases}$

TH1: Với $\cos 2\alpha = \frac{3}{5} \Leftrightarrow 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên ta chọn $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$.

TH2: Với $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow 2\cos^2 \alpha - 1 = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên ta chọn $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

d) $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\tan 2\alpha$ khi $\tan \alpha = \frac{7}{8}$.

Đặt $t = \tan \alpha = \frac{7}{8}$.

$$\sin 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2 \cdot \frac{7}{8}}{1+\left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{112}{113}$$

Ta có

$$\cos 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2}{1+\left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{15}{113}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{112}{15}$$

Câu 7. Tính giá trị của biểu thức

a. $A = \sin^2 20^\circ + \sin^2 100^\circ + \sin^2 140^\circ$

b. $B = \cos^2 10^\circ + \cos^2 110^\circ + \cos^2 130^\circ$

c. $C = \tan 20^\circ \cdot \tan 80^\circ + \tan 80^\circ \cdot \tan 140^\circ + \tan 140^\circ \cdot \tan 20^\circ$

d. $D = \tan 10^\circ \cdot \tan 70^\circ + \tan 70^\circ \cdot \tan 130^\circ + \tan 130^\circ \cdot \tan 190^\circ$

e. $E = \frac{\cot 225^\circ - \cot 79^\circ \cdot \cot 71^\circ}{\cot 259^\circ + \cot 151^\circ}$

f. $F = \cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ$

g. $G = \frac{1 - \tan 15^\circ}{1 + \tan 15^\circ}$

h. $H = \tan 15^\circ + \cot 15^\circ$

Lời giải

a. Tính $A = \sin^2 20^\circ + \sin^2 100^\circ + \sin^2 140^\circ$

$$\begin{aligned} A &= \sin^2 20^\circ + \sin^2 100^\circ + \sin^2 140^\circ \\ &= \sin^2 20^\circ + \sin^2 80^\circ + \sin^2 40^\circ \\ &= \frac{1 - \cos 40^\circ}{2} + \frac{1 - \cos 160^\circ}{2} + \frac{1 - \cos 80^\circ}{2} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{\cos 40^\circ + \cos 160^\circ + \cos 80^\circ}{2} \end{aligned}$$

Mà ta có:

$$\begin{aligned} \cos 40^\circ + \cos 160^\circ + \cos 80^\circ &= (\cos 40^\circ + \cos 80^\circ) + \cos 160^\circ \\ &= 2 \cos 60^\circ \cos 20^\circ - \cos 20^\circ \\ &= \cos 20^\circ (2 \cos 60^\circ - 1) = 0 \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{3}{2}$

b. Tính $B = \cos^2 10^\circ + \cos^2 110^\circ + \cos^2 130^\circ$

$$\begin{aligned} B &= \cos^2 10^\circ + \cos^2 110^\circ + \cos^2 130^\circ = \cos^2 10^\circ + \cos^2 70^\circ + \cos^2 50^\circ \\ &= \frac{1 + \cos 20^\circ}{2} + \frac{1 + \cos 140^\circ}{2} + \frac{1 + \cos 100^\circ}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2} + \frac{(\cos 20^\circ + \cos 100^\circ) + \cos 140^\circ}{2} \\
&= \frac{3}{2} + \frac{2 \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ - \cos 40^\circ}{2} \\
&= \frac{3}{2} + \frac{\cos 40^\circ (2 \cos 60^\circ - 1)}{2} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

c. Tính $C = \tan 20^\circ \cdot \tan 80^\circ + \tan 80^\circ \cdot \tan 140^\circ + \tan 140^\circ \cdot \tan 20^\circ$

Ta chứng minh công thức sau

$$\tan x \cdot \tan \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + \tan \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cdot \tan \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) + \tan x \cdot \tan \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) = -3$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b} \Rightarrow \tan a \cdot \tan b = \frac{\tan a - \tan b}{\tan(a-b)} - 1$$

Nhận Xét:

Do vậy:

$$\tan x \cdot \tan \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\tan \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - \tan x}{\tan \frac{\pi}{3}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\tan \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - \tan x \right] - 1 \quad (*)$$

⊗

$$\tan \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cdot \tan \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{\tan \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) - \tan \left(x + \frac{\pi}{3} \right)}{\tan \frac{\pi}{3}} - 1$$

⊗

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\tan \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) - \tan \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right] - 1 \quad (**)$$

$$\tan \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) \cdot \tan(x) = \frac{\tan \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) - \tan x}{\tan \frac{2\pi}{3}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\tan \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) - \tan x \right] - 1 \quad (***)$$

⊗

Cộng theo vế $(*) (**) (***)$ ta được:

$$\tan x \cdot \tan \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + \tan \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cdot \tan \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) + \tan x \cdot \tan \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) = -3$$

Vậy $C = \tan 20^\circ \cdot \tan 80^\circ + \tan 80^\circ \cdot \tan 140^\circ + \tan 140^\circ \cdot \tan 20^\circ = -3$

d. Tương tự câu c

$$e. E = \frac{\cot 225^\circ - \cot 79^\circ \cdot \cot 71^\circ}{\cot 259^\circ + \cot 251^\circ}$$

⊗

$$\otimes \cot 225^\circ = \cot(180^\circ + 45^\circ) = \cot 45^\circ$$

$$\otimes \cot 79^\circ = \tan 11^\circ$$

$$\otimes \cot 71^\circ = \tan 19^\circ$$

$$\otimes \cot 259^\circ = \cot(180^\circ + 79^\circ) = \tan 79^\circ = \cot 11^\circ$$

⊗

$$\cot 251^{\circ} = \cot(180^{\circ} + 71^{\circ}) = \cot(71^{\circ}) = \tan 19^{\circ}$$

$$E = \frac{\cot 225^{\circ} - \cot 79^{\circ} \cdot \cot 71^{\circ}}{\cot 259^{\circ} + \cot 251^{\circ}} = \frac{1 - \tan 11^{\circ} \cdot \tan 19^{\circ}}{\tan 11^{\circ} + \tan 19^{\circ}} = \tan(11^{\circ} + 19^{\circ}) = \tan 30^{\circ} = \sqrt{3}$$

Vậy

$$F = \cos^2 75^{\circ} - \sin^2 75^{\circ} = \cos 150^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

f.

$$G = \frac{1 - \tan 15^{\circ}}{1 + \tan 15^{\circ}} = \frac{\tan 45^{\circ} - \tan 15^{\circ}}{\tan 45^{\circ} + \tan 15^{\circ}} = \tan(45^{\circ} - 15^{\circ}) = \tan 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

g.

$$H = \tan 15^{\circ} + \cot 15^{\circ} = \frac{\sin 15^{\circ}}{\cos 15^{\circ}} + \frac{\cos 15^{\circ}}{\sin 15^{\circ}} = \frac{\sin^2 15^{\circ} + \cos^2 15^{\circ}}{\sin 15^{\circ} \cdot \cos 15^{\circ}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2 \cdot 15^{\circ}} = \frac{2}{\sin 30^{\circ}} = 4$$

h.

Câu 8. Chứng minh rằng:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right);$$

a)

$$\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a;$$

b)

$$4 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 4 \sin^2 x - 3$$

c)

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos x$$

d)

Lời giải

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right)$$

a)

$$= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cos x \right) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin(a+b)\sin(a-b) = (\sin a \cos b + \cos a \sin b)(\sin a \cos b - \cos a \sin b)$$

b)

$$= \sin^2 a \cos^2 b - \cos^2 a \sin^2 b = \sin^2 a (1 - \sin^2 b) - (1 - \sin^2 a) \sin^2 b$$

$$= \sin^2 a - \sin^2 a \sin^2 b - \sin^2 b + \sin^2 a \sin^2 b$$

$$= \sin^2 a - \sin^2 b = 1 - \cos^2 a - (1 - \cos^2 b)$$

$$= \cos^2 b - \cos^2 a$$

Cách 2

$$\sin(a+b)\sin(a-b) = -\frac{1}{2} [\cos 2a - \cos 2b]$$

$$= -\frac{1}{2} [(2 \cos^2 a - 1) - (2 \cos^2 b - 1)] = \cos^2 b - \cos^2 a$$

$$= -\frac{1}{2} [(1 - 2 \sin^2 a) - (1 - 2 \sin^2 b)] = \sin^2 a - \sin^2 b$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c) Áp dụng ý b) ở trên và

$$4 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 4 \left(\sin^2 x - \sin^2 \frac{\pi}{3} \right) = 4 \left(\sin^2 x - \frac{3}{4} \right)$$

$$= 4 \sin^2 x - 3.$$

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} - \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4}\right) \\ d) \quad &= 2 \cos x \sin \frac{\pi}{4} = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \sqrt{2} \cos x \end{aligned}$$

Câu 9. Chứng minh các đẳng thức sau

$$a) \sin(x+y) \cdot \sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y;$$

$$b) \frac{\tan x + \tan y}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} = \frac{2 \sin(x+y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)};$$

$$c) \tan x \cdot \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \tan\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \tan\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \tan x = -3;$$

$$d) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{3});$$

$$e) (\cos 70^\circ + \cos 50^\circ)(\cos 230^\circ + \cos 290^\circ) - (\cos 40^\circ + \cos 160^\circ)(\cos 320^\circ + \cos 380^\circ) = 0;$$

$$f) \tan x \cdot \tan 3x = \frac{\tan^2 2x - \tan^2 x}{1 - \tan^2 x \cdot \tan^2 2x}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} a) \quad VT &= \sin(x+y) \cdot \sin(x-y) = (\sin x \cos y + \sin y \cos x) \cdot (\sin x \cos y - \sin y \cos x) \\ &= \sin^2 x \cos^2 y - \sin^2 y \cos^2 x = \sin^2 x (1 - \sin^2 y) - \sin^2 y (1 - \sin^2 x) \\ &= \sin^2 x - \sin^2 y = VP \end{aligned}$$

Điều phải chứng minh.

$$\begin{aligned} b) \quad VP &= \frac{2 \sin(x+y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} = \frac{2(\sin x \cos y + \sin y \cos x)}{\cos x \cos y - \sin x \sin y + \cos x \cos y + \sin x \sin y} \\ &= \frac{2(\sin x \cos y + \sin y \cos x)}{2 \cos x \cos y} = \tan x \cdot \tan y = VP \end{aligned}$$

Điều phải chứng minh.

$$c) \quad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b} \Leftrightarrow \tan a \cdot \tan b = \frac{\tan a - \tan b}{\tan(a-b)} - 1$$

Xét đẳng thức:

Áp dụng:

$$\tan x \cdot \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan x - \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)} - 1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \left[\tan x - \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \right] - 1$$

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \tan\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \left[\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \tan\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \right] - 1$$

$$\tan\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \left[\tan\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - \tan x \right] - 1$$

$$\tan x \cdot \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \tan\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \tan\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \tan x = -3$$

Cộng theo vế ta được:

Điều phải chứng minh.

d)

$$\begin{aligned}
 VT &= \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \\
 &= \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4} - x\right) \\
 &= \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \cos\left[\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{3}).
 \end{aligned}$$

Điều phải chứng minh.

Cách 2.

$$\begin{aligned}
 VT &= \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \\
 &= \left(\cos x \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \sin x \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right) \cdot \left(\cos x \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right) \\
 &\quad + \left(\cos x \cdot \cos\frac{\pi}{6} - \sin x \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right) \cdot \left(\cos x \cdot \cos\frac{3\pi}{4} - \sin x \cdot \sin\frac{3\pi}{4}\right) \\
 &= \left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{4}(\cos x + \sqrt{3}\sin x) \cdot (\cos x - \sin x) - \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}\cos x - \sin x) \cdot (\cos x + \sin x) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos x - \sqrt{3}\sin^2 x) - \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x \cdot \cos x - \sin^2 x - \sin x \cdot \cos x) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{4}(\sin^2 x + \cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x - \sqrt{3}\cos^2 x) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{3}).
 \end{aligned}$$

Điều phải chứng minh.

e)

Ta có

$$\begin{aligned}
 &+ \cos 230^\circ = \cos(180^\circ + 50^\circ) = -\cos 50^\circ \\
 &+ \cos 290^\circ = \cos(360^\circ - 70^\circ) = \cos 70^\circ \\
 &+ \cos 160^\circ = \cos(90^\circ + 70^\circ) = -\sin 70^\circ \\
 &+ \cos 320^\circ = \cos(360^\circ - 40^\circ) = \cos 40^\circ = \sin 50^\circ \\
 &+ \cos 380^\circ = \cos 20^\circ = \sin 70^\circ
 \end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
 VT &= (\cos 70^\circ + \cos 50^\circ) \cdot (\cos 230^\circ + \cos 290^\circ) - (\cos 40^\circ + \cos 160^\circ) \cdot (\cos 320^\circ + \cos 380^\circ) \\
 &= (\cos 70^\circ + \cos 50^\circ) \cdot (-\cos 50^\circ + \cos 70^\circ) - (\sin 50^\circ - \sin 70^\circ) \cdot (\sin 50^\circ + \sin 70^\circ) \\
 &= \cos^2 70^\circ - \cos^2 50^\circ - \sin^2 50^\circ + \sin^2 70^\circ \\
 &= -(\cos^2 50^\circ + \sin^2 50^\circ) + (\cos^2 70^\circ + \sin^2 70^\circ) = -1 + 1 = 0.
 \end{aligned}$$

phải chứng minh.

Điều

$$f) \quad VP = \frac{\tan^2 2x - \tan^2 x}{1 - \tan^2 x \cdot \tan^2 2x} = \frac{\tan 2x - \tan x}{1 + \tan 2x \cdot \tan x} \cdot \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \cdot \tan x} = \tan x \cdot \tan 3x = VT$$

Điều phải chứng minh.

Câu 10. Chứng minh các hệ thức sau với điều kiện cho trước

a.) $2 \tan a = \tan(a+b)$ khi $\sin b = \sin a \cdot \cos(a+b)$

b.) $2 \tan a = \tan(a+b)$ khi $3 \sin b = \sin(2a+b)$

c.) $\tan a \cdot \tan b = -\frac{1}{3}$ khi $\cos(a+b) = 2 \cos(a-b)$

d.) $\tan(a+b) \cdot \tan b = \frac{1-k}{1+k}$ khi $\cos(a+2b) = k \cdot \cos a$

Lời giải

a. Ta có

$$2 \tan a = \tan(a+b) \Leftrightarrow \frac{2 \sin a}{\cos a} = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \sin a}{\cos a} = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \sin a \cos(a+b) - \cos a \cdot \sin(a+b)}{\cos a \cos(a+b)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin a \cos(a+b) + \sin a \cos(a+b) - \cos a \cdot \sin(a+b)}{\cos a \cos(a+b)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin a \cos(a+b) + \sin(a-b)}{\cos a \cos(a+b)} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin b - \sin b}{\cos a \cos(a+b)} = 0$$

Vậy ta có điều phải chứng minh

b. b. Ta có:

$$2 \tan a - \tan(a+b) = \frac{2 \sin a}{\cos a} - \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}$$

$$= \frac{2 \sin a}{\cos a} - \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

$$= \frac{2 \sin a \cos a \cos b - 2 \sin^2 a \sin b - \sin a \cos a \cos b - \sin b \cos^2 a}{\cos a \cdot (\cos a \cos b - \sin a \sin b)}$$

$$= \frac{\sin a \cos a \cos b - \sin b - \sin^2 a \sin b}{\cos a \cdot (\cos a \cos b - \sin a \sin b)}$$

$$= \frac{-\sin b + \sin a \cos a \cos b - \sin^2 a \sin b}{\cos a \cdot (\cos a \cos b - \sin a \sin b)}$$

$$= \frac{-2 \sin b + 2 \sin a \cos a \cos b - 2 \sin^2 a \sin b}{2 \cos a \cdot (\cos a \cos b - \sin a \sin b)}$$

$$= \frac{-3 \sin b + 2 \sin a \cos a \cos b + \sin b - 2 \sin^2 a \sin b}{2 \cos a \cdot (\cos a \cos b - \sin a \sin b)} = \frac{-3 \sin b + \sin 2a \cos b + \sin b(1 - 2 \sin^2 a)}{2 \cos a \cdot (\cos a \cos b - \sin a \sin b)}$$

$$= \frac{-3 \sin b + \sin 2a \cos b + \sin b \cos 2a}{2 \cos a \cdot (\cos a \cos b - \sin a \sin b)} = \frac{-3 \sin b + \sin(2a+b)}{2 \cos a \cdot (\cos a \cos b - \sin a \sin b)} = 0$$

Vậy đẳng thức được chứng minh.

$$\tan a \tan b = \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b} = \frac{\cos(a-b) - 2 \cos(a-b)}{\cos(a-b) + 2 \cos(a-b)} = \frac{-\cos(a-b)}{3 \cos(a-b)} = -\frac{1}{3}$$

c. Ta có:

$$\tan(a+b)\tan b = \frac{\sin(a+b)\sin b}{\cos(a+b)\cos b}$$

d. Ta có:

$$= \frac{\cos a - \cos(a+2b)}{\cos a + \cos(a+2b)} = \frac{\cos a - k \cos a}{\cos a + k \cos a} = \frac{(1-k)\cos a}{(1+k)\cos a} = \frac{1-k}{1+k}$$

Dạng 2. Công thức nhân đôi

Câu 11. (SGK-KNTT-11-Tập 1) Không dùng máy tính, tính $\cos \frac{\pi}{8}$.

Lời giải

Ta có: $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ suy ra $\cos a = \sqrt{\frac{1+\cos 2a}{2}}$

Do đó: $\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Câu 12. (SGK-KNTT-11-Tập 1) Tính $\sin 2a$, $\cos 2a$, $\tan 2a$, biết:

a) $\sin a = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$;

b) $\sin a + \cos a = \frac{1}{2}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{4}$.

Lời giải

a) Vì $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ suy ra $\cos a < 0$

Ta có: $\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos a = -\sqrt{1 - \sin^2 a} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\Rightarrow \tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = 2\sqrt{2}$

$\sin 2a = 2\sin a \cos a = 2 \times \frac{1}{3} \times \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$

$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} = \frac{2 \times 2\sqrt{2}}{1 - (2\sqrt{2})^2} = \frac{-4\sqrt{2}}{7}$

b) $\sin a + \cos a = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sin a + \cos a)^2 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \sin^2 a + \cos^2 a + 2\sin a \cos a = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2a = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$

Vì $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \pi < 2a < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos 2a < 0$

$\cos 2a = -\sqrt{1 - \sin^2 2a} = -\sqrt{1 - \frac{9}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$

Câu 13. Tính giá trị biểu thức:

$$a. A = \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8}$$

$$B = \frac{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}}{\tan \frac{\pi}{8}}$$

b.

$$c. C = \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$$

$$d. D = \sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ$$

$$e. E = 16 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ$$

Lời giải

Áp dụng công thức: $\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$ ta có:

$$A = \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} = \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}$$

$$a. \text{Áp dụng công thức: } \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \Rightarrow \frac{1 - \tan^2 a}{2 \tan a} = \frac{1}{\tan 2a} = \cot 2a$$

$$B = \frac{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}}{\tan \frac{\pi}{8}} = 2 \cdot \frac{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}}{2 \tan \frac{\pi}{8}} = 2 \cot(2 \cdot \frac{\pi}{8}) = 2 \cot \frac{\pi}{4} = 2$$

ta có:

$$c. \text{Áp dụng công thức: } \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a \text{ và } \sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a \text{ ta có:}$$

$$C = \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \sin 10^\circ \cdot \cos 40^\circ \cos 20^\circ = \frac{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cos 40^\circ}{2 \cos 10^\circ}$$

$$= \frac{\sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ \cos 40^\circ}{2 \cos 10^\circ} = \frac{\sin 40^\circ \cos 40^\circ}{4 \cos 10^\circ} = \frac{\sin 80^\circ}{8 \cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ}{8 \cos 10^\circ} = \frac{1}{8}$$

d. Tương tự câu c ta có:

$$D = \sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ = \sin 6^\circ \cos 48^\circ \cos 24^\circ \cos 12^\circ$$

$$= \frac{2 \sin 6^\circ \cos 6^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ}{2 \cos 6^\circ}$$

$$= \frac{\sin 12^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ}{2 \cos 6^\circ}$$

$$= \frac{\sin 24^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ}{4 \cos 6^\circ} = \frac{\sin 48^\circ \cos 48^\circ}{8 \cos 6^\circ} = \frac{\sin 96^\circ}{16 \cos 6^\circ}$$

$$\text{Do: } \sin 96^\circ = \sin(90^\circ - (-6^\circ)) = \cos(-6^\circ) = \cos 6^\circ \text{ nên } D = \frac{1}{16}$$

$$E = 16 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{8 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{4 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = 1$$

e. Ta có:

Câu 14. Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a. \text{Cho } \tan \frac{x}{2} = -2. \text{ Tính } A = \frac{3 \sin x + 4 \cos x}{4 \cot x + 3 \tan x}$$

$$b. \text{Cho } \sin x = -\frac{4}{5} \text{ và } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi. \text{ Tính } \cos \frac{x}{2} \text{ và } \sin \frac{x}{2}$$

c. Cho $\tan x = \frac{1}{15}$. Tính $B = \frac{\sin 2x}{1 + \tan 2x}$

d. Cho $\tan \frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$. Tính $C = \frac{2\sin 2x - \cos 2x}{\tan 2x + \cos 2x}$

Lời giải

$$A = \frac{3 \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \left(\tan \frac{x}{2}\right)^2} + 4 \frac{1 - \left(\tan \frac{x}{2}\right)^2}{1 + \left(\tan \frac{x}{2}\right)^2}}{4 \frac{1 - \left(\tan \frac{x}{2}\right)^2}{2 \tan \frac{x}{2}} + 3 \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \left(\tan \frac{x}{2}\right)^2}} = \frac{-24}{35}.$$

a. $\sin x = -\frac{4}{5} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{9}{25}$

b. $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ nên $\cos x = \frac{3}{5}$
Do

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} = \frac{1}{5}, \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2} = \frac{4}{5}$$

Do $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} < \frac{x}{2} < \pi$ nên $\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \frac{x}{2} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

$$B = \frac{\sin 2x}{1 + \tan 2x} = \frac{\frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}}{1 + \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}} = \frac{1680}{14351}.$$

c. $\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \left(\tan \frac{x}{2}\right)^2} = -\frac{4}{5}, \cos x = \frac{1 - \left(\tan \frac{x}{2}\right)^2}{1 + \left(\tan \frac{x}{2}\right)^2} = \frac{3}{5}$

d. $C = \frac{2\sin 2x - \cos 2x}{\tan 2x + \cos 2x} = \frac{4 \sin x \cos x - (2 \cos^2 x - 1)}{\frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x - 1} + (2 \cos^2 x - 1)} = \frac{-287}{551}.$

Câu 15. Tính giá trị của biểu thức sau:

a) $G = \cos \frac{2\pi}{31} \cdot \cos \frac{4\pi}{31} \cdot \cos \frac{8\pi}{31} \cdot \cos \frac{16\pi}{31} \cdot \cos \frac{32\pi}{31}$

b) $H = \sin 5^\circ \cdot \sin 15^\circ \cdot \sin 25^\circ \dots \sin 75^\circ \cdot \sin 85^\circ$

c) $I = \cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 30^\circ \dots \cos 70^\circ \cdot \cos 80^\circ$

d) $K = 96\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6}$

$$e) L = \cos \frac{\pi}{15} \cdot \cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{3\pi}{15} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} \cdot \cos \frac{5\pi}{15} \cdot \cos \frac{6\pi}{15} \cdot \cos \frac{7\pi}{15}$$

$$f) M = \sin \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{8}$$

Lời giải

a) Ta có

$$\begin{aligned} G &= \cos \frac{2\pi}{31} \cdot \cos \frac{4\pi}{31} \cdot \cos \frac{8\pi}{31} \cdot \cos \frac{16\pi}{31} \cdot \cos \frac{32\pi}{31} \\ \Leftrightarrow G \cdot \sin \frac{2\pi}{31} &= \sin \frac{2\pi}{31} \cdot \cos \frac{2\pi}{31} \cdot \cos \frac{4\pi}{31} \cdot \cos \frac{8\pi}{31} \cdot \cos \frac{16\pi}{31} \cdot \cos \frac{32\pi}{31} \\ \Leftrightarrow G \cdot \sin \frac{2\pi}{31} &= \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi}{31} \cdot \cos \frac{4\pi}{31} \cdot \cos \frac{8\pi}{31} \cdot \cos \frac{16\pi}{31} \cdot \cos \frac{32\pi}{31} \\ \Leftrightarrow G \cdot \sin \frac{2\pi}{31} &= \frac{1}{4} \sin \frac{8\pi}{31} \cdot \cos \frac{8\pi}{31} \cdot \cos \frac{16\pi}{31} \cdot \cos \frac{32\pi}{31} \\ \Leftrightarrow G \cdot \sin \frac{2\pi}{31} &= \frac{1}{8} \sin \frac{16\pi}{31} \cdot \cos \frac{16\pi}{31} \cdot \cos \frac{32\pi}{31} \\ \Leftrightarrow G \cdot \sin \frac{2\pi}{31} &= \frac{1}{16} \sin \frac{32\pi}{31} \cdot \cos \frac{32\pi}{31} \\ \Leftrightarrow G \cdot \sin \frac{2\pi}{31} &= \frac{1}{32} \sin \frac{64\pi}{31} \\ \Leftrightarrow G \cdot \sin \frac{2\pi}{31} &= \frac{1}{32} \sin \left(\frac{2\pi}{31} + 2\pi \right) \\ \Leftrightarrow G &= \frac{1}{32} \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} H &= \sin 5^\circ \cdot \sin 15^\circ \cdot \sin 25^\circ \dots \sin 75^\circ \cdot \sin 85^\circ \\ &= \sin 5^\circ \cdot \cos 5^\circ \cdot \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \sin 25^\circ \cdot \cos 25^\circ \cdot \sin 35^\circ \cdot \cos 35^\circ \cdot \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{32} \sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{32 \cdot \cos 10^\circ} \cdot \cos 10^\circ \cdot \sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \cos 20^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{64 \cdot \cos 10^\circ} \cdot \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 50^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{256 \cdot \cos 10^\circ} \cdot \sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{512 \cdot \cos 10^\circ} \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{2}}{512} \end{aligned}$$

c) Ta có

$$I = \cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 30^\circ \dots \cos 70^\circ \cdot \cos 80^\circ$$

$$\begin{aligned}
&= \cos 10^\circ \cdot \sin 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \sin 20^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \sin 40^\circ \\
&= \frac{1}{16} \cdot \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ \\
&= \frac{\sqrt{3}}{32} \cdot \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{64} \cdot \sin 20^\circ \cdot (\cos 40^\circ - \cos 120^\circ) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{64} \cdot \sin 20^\circ \cdot \left(\cos 40^\circ + \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{64} \cdot \sin 20^\circ \cdot \left(2 \cos^2 20^\circ - \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{128} \cdot \sin 20^\circ \cdot (3 - 4 \sin^2 20^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{128} \cdot \sin 60^\circ = \frac{3}{256}
\end{aligned}$$

d) Ta có

$$\begin{aligned}
K &= 96\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} \\
&= 48\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} \\
&= 24\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} \\
&= 12\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 6\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3} = 9 \\
L &= \cos \frac{\pi}{15} \cdot \cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{3\pi}{15} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} \cdot \cos \frac{5\pi}{15} \cdot \cos \frac{6\pi}{15} \cdot \cos \frac{7\pi}{15}
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
&= \cos \frac{\pi}{15} \cdot \cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{3\pi}{15} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} \cdot \cos \frac{5\pi}{15} \cdot \cos \frac{6\pi}{15} \cdot \cos \frac{7\pi}{15} \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{15} \cdot \cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} \cdot \cos \frac{8\pi}{15} \right) \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{15} \cdot \cos \frac{6\pi}{15} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{15} \cdot \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{15} \right) \cdot \cos \left(2^2 \cdot \frac{\pi}{15} \right) \cdot \cos \left(2^3 \cdot \frac{\pi}{15} \right) \right) \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{15} \cdot \cos \left(2 \cdot \frac{3\pi}{15} \right) \right) \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin \left(2^4 \cdot \frac{\pi}{15} \right)}{16 \cdot \sin \left(\frac{\pi}{15} \right)} \right) \cdot \left(\frac{\sin \left(2^2 \cdot \frac{3\pi}{15} \right)}{4 \cdot \sin \left(\frac{3\pi}{15} \right)} \right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin \left(\frac{16\pi}{15} \right)}{16 \cdot \sin \left(\frac{\pi}{15} \right)} \right) \cdot \left(\frac{\sin \left(\frac{12\pi}{15} \right)}{4 \cdot \sin \left(\frac{3\pi}{15} \right)} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-\sin \left(\frac{\pi}{15} \right)}{16 \cdot \sin \left(\frac{\pi}{15} \right)} \right) \cdot \left(\frac{\sin \left(\frac{3\pi}{15} \right)}{4 \cdot \sin \left(\frac{3\pi}{15} \right)} \right) = \frac{1}{128}
\end{aligned}$$

f) Ta có

$$M = \sin \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

Câu 16. Chứng minh các hệ thức sau:

$$\text{a) } \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x \quad \text{b) } \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x$$

$$\text{c) } \sin x \cdot \cos^3 x - \cos x \cdot \sin^3 x = \frac{1}{4} \sin 4x$$

$$d) \sin^6 \frac{x}{2} - \cos^6 \frac{x}{2} = \frac{1}{4}(4 - \sin^2 x) \quad e) 1 - \sin x = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$$

$$f) \frac{1 - \sin^2 x}{2 \cot \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right)} = \frac{\cos^2 x}{\cos 2x}$$

$$g) \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \cdot \frac{1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right)} = 1 \quad h) \tan \left(\frac{\pi}{4} + x \right) = \frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x}$$

$$i) \frac{\cos x}{1 - \sin x} = \cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \quad k) \tan x \cdot \tan 3x = \frac{\tan^2 2x - \tan^2 x}{1 - \tan^2 x \cdot \tan^2 2x}$$

$$l) \sin^3 x \cdot (1 + \cot x) + \cos^3 x (1 + \tan x) = \sin x + \cos x$$

$$m) \cot x + \tan x = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$n) \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x}}} = \cos \frac{x}{8}, \text{ với } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Lời giải

$$a) \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \cdot \sin^2 2x$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$$

$$b) \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x)$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$$

$$= 1 - \frac{3}{8} (1 - \cos 4x) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x$$

$$c) \sin x \cdot \cos^3 x - \cos x \cdot \sin^3 x = \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x$$

$$d) \sin^6 \frac{x}{2} - \cos^6 \frac{x}{2} = \left(\sin^2 \frac{x}{2} \right)^3 - \left(\cos^2 \frac{x}{2} \right)^3 = \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right) \left(\sin^4 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2} \right)$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 1 - \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$= 1 - \left(\frac{\sin x}{2} \right)^2 = 1 - \frac{\sin^2 x}{4} = \frac{1}{4} (4 - \sin^2 x)$$

$$e) 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) = 2 \cdot \left[\frac{1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}{2} \right] = 1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = 1 - \sin x$$

$$f) \frac{1 - \sin^2 x}{2 \cot \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right)} = \frac{\cos^2 x}{\cot \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \cdot \left[1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) \right]} = \frac{\cos^2 x}{\cot \left(\frac{\pi}{4} + x \right) (1 + \sin 2x)}$$

$$= \tan \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \cdot \frac{\cos^2 x}{1 + \sin 2x} = \frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} \cdot \frac{\cos^2 x}{1 + \sin 2x} = \frac{\cos^2 x}{\cos 2x}$$

$$g) \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \left(\frac{1 + \tan\frac{x}{2}}{1 - \tan\frac{x}{2}}\right) \cdot \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x} \cdot \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1$$

$$h) \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan\frac{\pi}{4} \cdot \tan x} = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{(\cos x + \sin x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x}$$

$$i) \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} = \frac{\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)} = \frac{\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

$$k) \frac{\tan^2 2x - \tan^2 x}{1 - \tan^2 x \cdot \tan^2 2x} = \frac{(\tan 2x - \tan x)(\tan 2x + \tan x)}{(1 - \tan x \tan 2x)(1 + \tan x \tan 2x)} = \tan 3x \cdot \tan x$$

$$l) \sin^3 x \cdot (1 + \cot x) + \cos^3 x (1 + \tan x) = \sin^2 x \cdot (\sin x + \cos x) + \cos^2 x \cdot (\sin x + \cos x) = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin x + \cos x) = \sin x + \cos x$$

$$m) \cot x + \tan x = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$n) \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x}}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\cos^2 \frac{x}{2}}}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos \frac{x}{2}}} \quad \text{Do } \frac{x}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\cos^2 \frac{x}{4}}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos \frac{x}{4}} = \cos \frac{x}{8}$$

Dạng 3. Biến đổi tích thành tổng

Câu 17. (SGK-KNTT-11-Tập 1) Không dùng máy tính, tính giá trị của các biểu thức:

$$A = \cos 75^\circ \cos 15^\circ; \quad B = \sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}$$

Lời giải

$$A = \cos 75^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} [\cos(75^\circ - 15^\circ) + \cos(75^\circ + 15^\circ)]$$

$$= \frac{1}{2} (\cos 60^\circ + \cos 90^\circ) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 0 \right) = \frac{1}{4}$$

$$B = \sin \frac{5\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1}{2} \left[\sin\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{7\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{7\pi}{12}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin \pi \right] = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + 0 \right) = -\frac{1}{4}$$

Câu 18. (SGK-KNTT-11-Tập 1) Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$A = \frac{\sin \frac{\pi}{15} \cos \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{15}}{\cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15} \cdot \sin \frac{\pi}{5}};$$

$$B = \sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{\sin \frac{\pi}{15} \cos \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{15}}{\cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15} \sin \frac{\pi}{5}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{30} + \sin \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{30} + \sin \frac{\pi}{6} \right)}{\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{15} + \cos \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{15} - \cos \frac{\pi}{3} \right)} \\ &= \frac{-\sin \frac{\pi}{30} + \sin \frac{\pi}{30} + 2 \sin \frac{\pi}{6}}{2 \cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{3}} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8} \\ &= \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8} \\ &= \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

Câu 19. (SGK-KNTT-11-Tập 1) Chứng minh đẳng thức sau:

$$\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \sin(a+b)\sin(a-b) &= (\sin a \cos b + \cos a \sin b)(\sin a \cos b - \cos a \sin b) \\ &= (\sin a \cos b)^2 - (\cos a \sin b)^2 = \sin^2 a (1 - \sin^2 b) - (1 - \sin^2 a) \sin^2 b \\ &= \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b (1 - \cos^2 a) - \cos^2 a (1 - \cos^2 b) = \cos^2 b - \cos^2 a \end{aligned}$$

Câu 20. Biến đổi thành tổng

$$\text{a) } 2 \sin(a+b) \cos(a-b) \quad \text{b) } 2 \cos(a+b) \cos(a-b)$$

$$\text{c) } 4 \sin 3x \sin 2x \cos x \quad \text{d) } 4 \sin \frac{13x}{2} \cos x \cos \frac{x}{2}$$

$$\text{e) } \sin(x+30^\circ) \cos(x-30^\circ) \quad \text{f) } \sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5}$$

$$\text{g) } 2 \sin x \sin 2x \sin 3x \quad \text{h) } 8 \cos x \sin 2x \sin 3x$$

$$\text{i) } \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \cos 2x \quad \text{k) } 4 \cos(a-b) \cos(b-c) \cos(c-a)$$

Bài giải:

$$\text{a) } 2 \sin(a+b) \cos(a-b) = \sin 2a + \sin 2b$$

$$\text{b) } 2 \cos(a+b) \cos(a-b) = \cos 2a + \cos 2b$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 4 \sin 3x \sin 2x \cos x &= 2 \sin 3x (\sin 3x + \sin x) = 2 \sin^2 3x + 2 \sin 3x \sin x \\ &= 2 \sin^2 3x - \cos 4x + \cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 4 \sin \frac{13x}{2} \cos x \cos \frac{x}{2} &= 2 \sin \frac{13x}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) = 2 \sin \frac{13x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2 \sin \frac{13x}{2} \cos \frac{x}{2} = \\ &= \sin 8x + \sin 5x + \sin 7x + \sin 6x \end{aligned}$$

$$\text{e) } \sin(x+30^\circ) \cos(x-30^\circ) = \frac{1}{2} (\sin 2x + \sin 60^\circ) = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{f) } \sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} = -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{3\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{5} \right)$$

$$2 \sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 3x (\cos x - \cos 3x) = \frac{1}{2} (2 \sin 3x \cos x - \sin 6x)$$

$$\text{g)} \quad = \frac{1}{2} (\sin 4x + \sin 2x - \sin 6x)$$

$$\text{h)} \quad 8 \cos x \sin 2x \sin 3x = 4 \sin 3x (\sin 3x + \sin x) = 4 \sin^2 3x + \sin 3x \sin x = 4 \sin^2 3x + 2 \cos 2x - 2 \cos 4x$$

$$\text{i)} \quad \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \cos 2x = \cos 2x \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos 2x \right) = \frac{1}{2} \cos 2x - \cos^2 2x$$

$$\text{k)} \quad 4 \cos(a-b) \cos(b-c) \cos(c-a) = 2 \cos(a-b) (\cos(b-a) + \cos(b-2c+a)) \\ = 2 \cos(a-b) \cos(b-a) + 2 \cos(a-b) \cos(b-2c+a) \\ = 1 + \cos(2a-2b) + \cos(2a-2c) + \cos(2c-2b)$$

Dạng 4. Biến đổi tổng thành tích

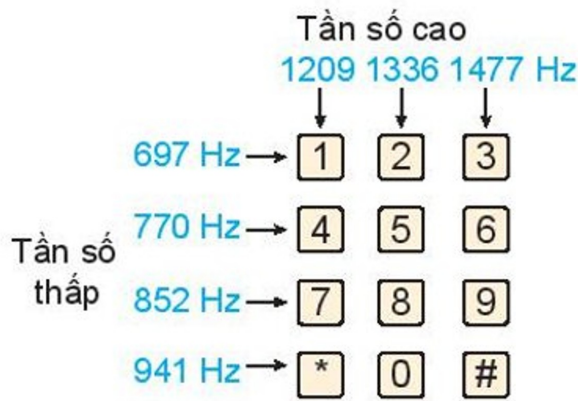
Câu 21. (SGK-KNTT-11-Tập 1) Không dùng máy tính, tính giá trị của biểu thức

$$B = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{11\pi}{9}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} B &= \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{11\pi}{9} \\ &= 2 \cos \left(\frac{\frac{\pi}{9} + \frac{5\pi}{9}}{2} \right) \cos \left(\frac{\frac{\pi}{9} - \frac{5\pi}{9}}{2} \right) + \cos \frac{11\pi}{9} \\ &= 2 \cos \frac{\pi}{3} \cos \left(-\frac{2\pi}{9} \right) + \cos \frac{11\pi}{9} \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \cos \left(-\frac{2\pi}{9} \right) + \cos \frac{11\pi}{9} \\ &= \cos \left(-\frac{2\pi}{9} \right) + \cos \frac{11\pi}{9} \\ &= 2 \cos \left(\frac{-\frac{2\pi}{9} + \frac{11\pi}{9}}{2} \right) \cos \left(\frac{-\frac{2\pi}{9} - \frac{11\pi}{9}}{2} \right) \\ &= 2 \cos \frac{\pi}{2} \cos \left(-\frac{13\pi}{18} \right) \\ &= 2 \times 0 \times \cos \left(-\frac{13\pi}{18} \right) = 0 \end{aligned}$$

Câu 22. (SGK-KNTT-11-Tập 1) Khi nhấn một phím trên điện thoại cảm ứng, bàn phím sẽ tạo ra hai âm thuần, kết hợp với nhau để tạo ra âm thanh nhận dạng duy nhất phím. Hình cho thấy tần số thấp f_1 và tần số cao f_2 liên quan đến mỗi phím. Nhấn một phím sẽ tạo ra sóng âm $y = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$, ở đó t là biến thời gian (tính bằng giây).



- a) Tìm hàm số mô hình hoá âm thanh được tạo ra khi nhấn phím 4.
b) Biến đổi công thức vừa tìm được ở câu a về dạng tích của một hàm số sin và một hàm số cosin.

Lời giải

a) $y = \sin(2\pi 770t) + \sin(2\pi 1209t) = \sin(1540\pi t) + \sin(2418\pi t)$

b)

$$\sin(1540\pi t) + \sin(2418\pi t) = 2 \sin \frac{1540\pi t + 2418\pi t}{2} \cos \frac{1540\pi t - 2418\pi t}{2} = 2 \sin(1979\pi t) \cos(-878\pi t)$$

Câu 23. (SGK-KNTT-11-Tập 1) Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động.

Xét hai dao động điều hoà có phương trình:

$$x_1(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) (cm),$$

$$x_2(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) (cm).$$

Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

Lời giải

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2 \left[2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{12}\right) \cos \frac{\pi}{4} \right] = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{12}\right)$$

Biên độ là $A = 2\sqrt{2}$, pha ban đầu là $\varphi = -\frac{\pi}{12}$

Câu 24. Biến đổi thành tích

a, $A = 2 \sin 4x + \sqrt{2}$

b, $B = 3 - 4 \cos^2 x$

c, $D = \sin 2x + \sin 4x + \sin 6x$

d, $E = 3 + 4 \cos 4x + \cos 8x$

e, $F = \sin 5x + \sin 6x + \sin 7x + \sin 8x$

f, $G = 1 + \sin 2x - \cos 2x - \tan 2x$

g, $H = \sin^2(x + 90^\circ) - 3 \cos^2(x - 90^\circ)$

h, $L = 1 + \sin x + \cos x$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 & A = 2 \left(\sin 4x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \left(\sin 4x + \sin \frac{\pi}{4} \right) = 4 \sin \left(2x + \frac{\pi}{8} \right) \cos \left(2x - \frac{\pi}{8} \right) \\
 \text{a,} & \\
 & B = 1 - 2 \cos 2x = 2 \left(\frac{1}{2} - \cos 2x \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos 2x \right) = 4 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \\
 \text{b,} & \\
 & D = \sin 2x + \sin 6x + \sin 4x = 2 \sin 4x \cos 2x + \sin 4x = \sin 4x (2 \cos 2x + 1) \\
 \text{c,} & \\
 & = 2 \sin 4x \left(\cos 2x + \cos \frac{\pi}{3} \right) = 4 \sin 4x \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \\
 \text{d,} & \\
 & E = 3 + 4 \cos 4x + 2 \cos^2 4x - 1 = 2(\cos 4x + 1)^2 = 8 \cos^4 2x \\
 & F = \sin 5x + \sin 8x + \sin 6x + \sin 7x = 2 \sin \frac{13x}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) = 4 \sin \frac{13x}{2} \cos x \cos \frac{x}{2} \\
 \text{e,} & \\
 & G = 1 - \cos 2x + \sin 2x - \tan 2x = (1 - \cos 2x)(1 - \tan 2x) = 2 \sin^2 x \left(\tan \frac{\pi}{4} - \tan 2x \right) \\
 \text{f,} & \\
 & = \frac{2 \sin^2 x \sin \left(-2x + \frac{\pi}{4} \right)}{\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos 2x} = \frac{2\sqrt{2} \sin^2 x \sin \left(-2x + \frac{\pi}{4} \right)}{\cos 2x} \\
 & H = \cos^2 x - 3 \sin^2 x = (\cos x - \sqrt{3} \sin x)(\cos x + \sqrt{3} \sin x) \\
 \text{g,} & \\
 & = 4 \left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right) \left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right) = 4 \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \\
 \text{h,} & \\
 & L = \sin x + (\cos x + 1) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right) = 2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)
 \end{aligned}$$

Câu 25. Tính giá trị các biểu thức sau:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} & A = \sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{7\pi}{30} \sin \frac{13\pi}{30} \sin \frac{19\pi}{30} \sin \frac{25\pi}{30} \\
 \text{b)} & B = 16 \cdot \sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ \cdot \sin 90^\circ \\
 \text{c)} & C = \cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ \\
 \text{d)} & D = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \\
 \text{e)} & E = \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \\
 \text{f)} & F = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} \\
 \text{g)} & G = \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} \\
 \text{h)} & H = \cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11}
 \end{aligned}$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{a) Ta có:} & A = \sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{7\pi}{30} \sin \frac{13\pi}{30} \sin \frac{19\pi}{30} \sin \frac{25\pi}{30} = \sin \frac{\pi}{30} \cos \frac{8\pi}{30} \cos \frac{2\pi}{30} \cos \frac{4\pi}{30} \sin \frac{5\pi}{6} \\
 & \Leftrightarrow 16 \cdot \cos \frac{\pi}{30} \cdot A = 16 \cos \frac{\pi}{30} \sin \frac{\pi}{30} \cos \frac{8\pi}{30} \cos \frac{2\pi}{30} \cos \frac{4\pi}{30} \sin \frac{5\pi}{6}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 16 \cdot \cos \frac{\pi}{30} \cdot A = 8 \cdot \sin \frac{2\pi}{30} \cos \frac{2\pi}{30} \cos \frac{4\pi}{30} \cos \frac{8\pi}{30} \cdot \frac{1}{2} = 4 \sin \frac{4\pi}{30} \cos \frac{4\pi}{30} \cos \frac{8\pi}{30} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 16 \cdot \cos \frac{\pi}{30} \cdot A = 2 \sin \frac{8\pi}{30} \cos \frac{8\pi}{30} \cdot \frac{1}{2} = \sin \frac{16\pi}{30} \cdot \frac{1}{2} = \sin \left(\frac{15\pi}{30} + \frac{\pi}{30} \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{30} \Rightarrow A = \frac{1}{32}$$

b) Ta có: $B = 16 \cdot \sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ \cdot \sin 90^\circ = 16 \cdot \sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 20^\circ$

$$\Leftrightarrow B \cdot \cos 10^\circ = 16 \cdot \sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow B \cdot \cos 10^\circ = 4 \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ$$

$$\Leftrightarrow B \cdot \cos 10^\circ = 2 \sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ = \cos 80^\circ = \sin 10^\circ \rightarrow B = 1$$

c) $C = (\cos 24^\circ + \cos 48^\circ) - (\cos 84^\circ + \cos 12^\circ) = 2 \cos 36^\circ \cdot \cos 12^\circ - 2 \cos 48^\circ \cdot \cos 36^\circ$

$$= 2 \cos 36^\circ (\cos 12^\circ - \cos 48^\circ) = 4 \cos 36^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 18^\circ$$

$$= 2(1 - 2 \sin^2 18^\circ) \cdot \sin 18^\circ = -4 \sin^3 18^\circ + 2 \sin 18^\circ$$

Ta

có:

$$\cos 36^\circ = \sin 54^\circ \Leftrightarrow 1 - 2 \sin^2 18^\circ = 3 \sin 18^\circ - 4 \sin^3 18^\circ \Leftrightarrow 4 \sin^3 18^\circ - 2 \sin^2 18^\circ - 3 \sin 18^\circ + 1 = 0$$

Đặt $t = \sin 18^\circ, 0 < t < 1$. Ta được phương trình:

$$4t^3 - 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ 4t^2 + 2t - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 (L) \\ t = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} (L) \\ t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \end{cases} \quad \sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{. Suy ra}$$

$$C = -4 \sin^3 18^\circ + 2 \sin 18^\circ = \frac{1}{2}$$

Vậy:

d) $D = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{2\pi}{7} \cdot D = 2 \sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + 2 \sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + 2 \sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{2\pi}{7} \cdot D = \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{6\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} - \sin \frac{4\pi}{7}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{2\pi}{7} \cdot D = \sin \frac{6\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \left(2\pi - \frac{6\pi}{7} \right) = \sin \frac{6\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} - \sin \frac{6\pi}{7} = -\sin \frac{2\pi}{7}$$

Vậy $D = \frac{-1}{2}$

e) $E = \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{\pi}{7} \cdot E = 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} - 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{\pi}{7} \cdot E = \sin \frac{2\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} = \sin \frac{\pi}{7}$$

Vậy $E = \frac{1}{2}$

f) $F = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} = \cos \frac{\pi}{9} + 2 \cos \frac{6\pi}{9} \cos \frac{\pi}{9} = \cos \frac{\pi}{9} - \cos \frac{\pi}{9} = 0$

g) $G = \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 2 \sin \frac{\pi}{5} \cdot G &= 2 \sin \frac{\pi}{5} \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} \right) \\ \Leftrightarrow 2 \sin \frac{\pi}{5} \cdot G &= \sin \frac{3\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{5\pi}{5} - \sin \frac{3\pi}{5} + \sin \frac{7\pi}{5} - \sin \frac{5\pi}{5} + \sin \frac{9\pi}{5} - \sin \frac{7\pi}{5} \\ \Leftrightarrow 2 \sin \frac{\pi}{5} \cdot G &= -\sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{9\pi}{5} = -\sin \frac{\pi}{5} + \sin \pi = -2 \sin \frac{\pi}{5} \end{aligned}$$

Vậy $G = -1$.

$$h) \quad H = \cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 2 \sin \frac{\pi}{11} \cdot H &= 2 \sin \frac{\pi}{11} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} \right) \\ \Leftrightarrow 2 \sin \frac{\pi}{11} \cdot H &= \sin \frac{2\pi}{11} + \sin \frac{4\pi}{11} - \sin \frac{2\pi}{11} + \sin \frac{6\pi}{11} - \sin \frac{4\pi}{11} + \sin \frac{8\pi}{11} - \sin \frac{6\pi}{11} + \sin \frac{10\pi}{11} - \sin \frac{8\pi}{11} \\ \Leftrightarrow 2 \sin \frac{\pi}{11} \cdot H &= \sin \frac{10\pi}{11} = \sin \frac{\pi}{11} \rightarrow H = \frac{1}{2}. \quad \text{Vậy } H = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Câu 26. Tính các tổng sau

$$a. \quad S_1 = \cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \dots + \cos (2n-1)\alpha \quad (\alpha \neq k\pi)$$

$$b. \quad S_2 = \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n}$$

$$c. \quad S_3 = \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{3\pi}{n} + \cos \frac{5\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(2n-1)\pi}{n}$$

$$d. \quad S_4 = \frac{1}{\cos a \cdot \cos 2a} + \frac{1}{\cos 2a \cdot \cos 3a} + \dots + \frac{1}{\cos 4a \cdot \cos 5a}, \text{ với } a = \frac{\pi}{5}.$$

$$e. \quad S_5 = \left(1 + \frac{1}{\cos x} \right) \left(1 + \frac{1}{\cos 2x} \right) \left(1 + \frac{1}{\cos 4x} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{\cos 2^{n-1}x} \right)$$

Lời giải

$$a. \quad S_1 = \cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \dots + \cos (2n-1)\alpha \quad (\alpha \neq k\pi)$$

Nhân cả hai vế với $2 \sin \alpha$ ta có:

$$\begin{aligned} 2 \sin \alpha \cdot S_1 &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos 3\alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos 5\alpha + \dots + 2 \sin \alpha \cdot \cos (2n-1)\alpha \\ \Rightarrow 2 \sin \alpha \cdot S_1 &= \sin 2\alpha + (\sin 4\alpha - \sin 2\alpha) + (\sin 6\alpha - \sin 4\alpha) + \dots + [\sin 2n\alpha - \sin (2n-2)\alpha] \\ \Rightarrow 2 \sin \alpha \cdot S_1 &= \sin 2n\alpha \\ \Rightarrow S_1 &= \frac{\sin 2n\alpha}{2 \sin \alpha} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S_1 = \frac{\sin 2n\alpha}{2 \sin \alpha}.$$

$$b. \quad \text{Xét bài toán tổng quát. Tính tổng } S_2 = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin (n-1)x.$$

Nhân cả hai vế với $2 \sin \frac{x}{2}$ ta có:

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{x}{2} \cdot S_2 &= 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \sin x + 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \sin 2x + 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \sin 3x + \dots + 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \sin (n-1)x \\ \Rightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \cdot S_2 &= \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right) + \left(\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} \right) + \left(\cos \frac{5x}{2} - \cos \frac{7x}{2} \right) + \dots + \left[\cos \left(\frac{2n-3}{2}x \right) - \cos \left(\frac{2n-1}{2}x \right) \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \cdot S_2 = \cos \frac{x}{2} - \cos \left(\frac{2n-1}{2} x \right)$$

$$\Rightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \cdot S_2 = 2 \sin \frac{(n-1)x}{2} \cdot \sin \frac{nx}{2}$$

$$\Rightarrow S_2 = \frac{\sin \frac{(n-1)x}{2} \cdot \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$S_2 = \frac{\sin \frac{(n-1)\pi}{2n} \cdot \sin \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2n}} = \frac{\sin \frac{(n-1)\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}}$$

Áp dụng với $x = \frac{\pi}{n}$ ta được:

$$S_3 = \frac{\sin(2n\pi)}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = 0$$

c. Áp dụng câu a với $\alpha = \frac{\pi}{n}$ ta được:

$$S = \frac{1}{\sin a} \left[\frac{\sin(2a-a)}{\cos 2a \cdot \cos a} + \frac{\sin(3a-2a)}{\cos 3a \cdot \cos 2a} + \dots + \frac{\sin(5a-4a)}{\cos 5a \cdot \cos 4a} \right]$$

d. Ta có:

$$= \frac{1}{\sin a} \left(\frac{\sin 2a \cdot \cos a - \sin a \cdot \cos 2a}{\cos 2a \cdot \cos a} + \frac{\sin 3a \cdot \cos 2a - \sin 2a \cdot \cos 3a}{\cos 3a \cdot \cos 2a} + \dots + \frac{\sin 5a \cdot \cos 4a - \sin 4a \cdot \cos 5a}{\cos 5a \cdot \cos 4a} \right)$$

$$= \frac{1}{\sin a} (\tan 2a - \tan a + \tan 3a - \tan 2a + \dots + \tan 5a - \tan 4a)$$

$$= \frac{1}{\sin a} (\tan 5a - \tan a)$$

$$S = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{5}} \left(\tan \pi - \tan \frac{\pi}{5} \right) = - \frac{1}{\cos \frac{\pi}{5}}$$

Với $a = \frac{\pi}{5}$ ta được

$$e. \text{ Ta có: } S_5 = \left(1 + \frac{1}{\cos x} \right) \left(1 + \frac{1}{\cos 2x} \right) \left(1 + \frac{1}{\cos 4x} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{\cos 2^{n-1}x} \right)$$

$$= \left(\frac{1 + \cos x}{\cos x} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{\cos 2x} \right) \left(\frac{1 + \cos 4x}{\cos 4x} \right) \dots \left(\frac{1 + \cos 2^{n-1}x}{\cos 2^{n-1}x} \right)$$

$$= \frac{2 \cos^2 \frac{x}{2} \cdot 2 \cos^2 x \cdot 2 \cos^2 2x \dots 2 \cos^2 2^{n-2}x}{\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \dots \cos 2^{n-1}x}$$

$$= \frac{\cos \frac{x}{2} \cdot 2 \cos \frac{x}{2} \cdot 2 \cos x \cdot 2 \cos 2x \cdot 2 \cos 4x \dots 2 \cos 2^{n-2}x}{\cos 2^{n-1}x}$$

Nhân hai vế với $\sin \frac{x}{2}$ và áp dụng công thức nhân đôi $2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha$ ta được

$$\sin \frac{x}{2} \cdot S_5 = \frac{\cos \frac{x}{2} \cdot \sin 2^{n-1}x}{\cos 2^{n-1}x} \Rightarrow \sin \frac{x}{2} \cdot S_5 = \cos \frac{x}{2} \cdot \tan 2^{n-1}x$$

$$\Rightarrow S_5 = \tan 2^{n-1}x \cdot \cot \frac{x}{2}$$

Vậy $S_5 = \tan 2^{n-1}x \cdot \cot \frac{x}{2}$

Câu 27. Tính $\sin^2 2x$, biết: $\frac{1}{\tan^2 x} + \frac{1}{\cot^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 7$

Lời giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq 0 \\ \cot x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan^2 x} + \frac{1}{\cot^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} &= 7 \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 7 \\ \Leftrightarrow \frac{\cos^4 x + \sin^4 x + \cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} &= 7 \Leftrightarrow \cos^4 x + \sin^4 x + 1 = 7 \sin^2 x \cdot \cos^2 x \\ \Leftrightarrow \cos^4 x + \sin^4 x + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x + 1 &= 9 \sin^2 x \cdot \cos^2 x \\ \Leftrightarrow (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 + 1 &= \frac{9}{4} (2 \sin x \cdot \cos x)^2 \Leftrightarrow 1 + 1 = \frac{9}{4} \sin^2 2x \\ \Leftrightarrow \sin^2 2x &= \frac{8}{9} \end{aligned}$$

Giá trị tính được thỏa mãn điều kiện $\sin 2x \neq 0$

$$\sin^2 2x = \frac{8}{9}$$

Vậy

Câu 28. Rút gọn các biểu thức sau:

$$A = \frac{\cos 7x - \cos 8x - \cos 9x + \cos 10x}{\sin 7x - \sin 8x - \sin 9x + \sin 10x}$$

a/

$$b / B = \frac{\sin 2x + 2 \sin 3x + \sin 4x}{\sin 3x + 2 \sin 4x + \sin 5x}$$

$$c / C = \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{\cos x + 2 \cos^2 x - 1}$$

$$d / D = \frac{\sin 4x + \sin 5x + \sin 6x}{\cos 4x + \cos 5x + \cos 6x}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} a/ \quad A &= \frac{(\cos 10x + \cos 7x) - (\cos 9x + \cos 8x)}{(\sin 10x + \sin 7x) - (\sin 9x + \sin 8x)} = \frac{2 \cos \frac{17x}{2} \cos \frac{3x}{2} - 2 \cos \frac{17x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{17x}{2} \cos \frac{3x}{2} - 2 \sin \frac{17x}{2} \cos \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2 \cos \frac{17x}{2} (\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{x}{2})}{2 \sin \frac{17x}{2} (\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{x}{2})} = \cot \frac{17x}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b / B &= \frac{(\sin 4x + \sin 2x) + 2 \sin 3x}{(\sin 5x + \sin 3x) + 2 \sin 4x} = \frac{2 \sin 3x \cdot \cos x + 2 \sin 3x}{2 \sin 4x \cdot \cos x + 2 \sin 4x} \\ &= \frac{2 \sin 3x (\cos x + 1)}{2 \sin 4x (\cos x + 1)} = \frac{\sin 3x}{\sin 4x} \end{aligned}$$

$$c/C = \frac{(\cos 3x + \cos x) + 1 + 2\cos^2 x - 1}{\cos x + (2\cos^2 x - 1)} = \frac{2\cos 2x \cdot \cos x + 2\cos^2 x}{\cos x + (2\cos^2 x - 1)}$$

$$= \frac{2\cos x(\cos 2x + \cos x)}{\cos x + \cos 2x} = 2\cos x$$

$$d/D = \frac{(\sin 6x + \sin 4x) + \sin 5x}{(\cos 6x + \cos 4x) + \cos 5x} = \frac{2\sin 5x \cdot \cos x + \sin 5x}{2\cos 5x \cdot \cos x + \cos 5x} = \frac{\sin 5x(2\cos x + 1)}{\cos 5x(2\cos x + 1)} = \tan 5x$$

Câu 29. Chứng minh các đẳng thức lượng giác:

a. $\tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ = 4$

b. $\tan 20^\circ - \tan 40^\circ + \tan 80^\circ = 3\sqrt{3}$

c. $\tan 10^\circ - \tan 50^\circ + \tan 60^\circ + \tan 70^\circ = 2\sqrt{3}$

d. $\tan 30^\circ + \tan 40^\circ + \tan 50^\circ + \tan 60^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \cos 20^\circ$

e. $\tan^6 20^\circ - 33\tan^4 20^\circ + 27\tan^2 20^\circ - 3 = 0$

Lời giải

a.
$$VT = \frac{\sin 9^\circ}{\cos 9^\circ} + \frac{\sin 81^\circ}{\cos 81^\circ} - \left(\frac{\sin 27^\circ}{\cos 27^\circ} + \frac{\sin 63^\circ}{\cos 63^\circ} \right)$$

$$= \frac{\sin 9^\circ \cos 81^\circ + \cos 9^\circ \sin 81^\circ}{\cos 9^\circ \cos 81^\circ} - \frac{\sin 27^\circ \cos 63^\circ + \cos 27^\circ \sin 63^\circ}{\cos 27^\circ \cos 63^\circ}$$

$$= \frac{\sin(9^\circ + 81^\circ)}{\cos 9^\circ \sin 9^\circ} - \frac{\sin(27^\circ + 63^\circ)}{\cos 27^\circ \sin 27^\circ} = \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = \frac{2(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = \frac{2 \cdot 2 \cos 36^\circ \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = 4$$

b.
$$VT = \tan 20^\circ - \tan(60^\circ - 20^\circ) + \tan(60^\circ + 20^\circ)$$

$$= \tan 20^\circ - \frac{\tan 60^\circ - \tan 20^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 20^\circ} + \frac{\tan 60^\circ + \tan 20^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 20^\circ}$$

$$= \tan 20^\circ - \frac{\sqrt{3} - \tan 20^\circ}{\sqrt{3} - \tan 20^\circ} + \frac{\sqrt{3} + \tan 20^\circ}{\sqrt{3} + \tan 20^\circ}$$

$$= \tan 20^\circ + \frac{(1 + \sqrt{3} \tan 20^\circ)(1 - \sqrt{3} \tan 20^\circ) - (\sqrt{3} - \tan 20^\circ)(1 - \sqrt{3} \tan 20^\circ)}{1 - 3 \tan^2 20^\circ}$$

$$= \tan 20^\circ + \frac{8 \tan 20^\circ}{1 - 3 \tan^2 20^\circ} = \frac{9 \tan 20^\circ - 3 \tan^3 20^\circ}{1 - 3 \tan^2 20^\circ} = \frac{3 \tan 20^\circ (3 - \tan^2 20^\circ)}{1 - 3 \tan^2 20^\circ}$$

$$= 3 \tan 60^\circ = 3\sqrt{3} \text{ (công thức nhân ba)}$$

* Từ câu này ta chứng minh được công thức tổng quát:

$$\tan a - \tan(60^\circ - a) + \tan(60^\circ + a) = 3 \tan 3a$$

c. Chứng minh tương tự câu b ta có

$$\tan 10^\circ - \tan 50^\circ + \tan 70^\circ = \tan 10^\circ - \tan(60^\circ - 10^\circ) + \tan(60^\circ + 10^\circ) = 3 \tan 30^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan 10^\circ - \tan 50^\circ + \tan 60^\circ + \tan 70^\circ = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

d.
$$VT = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} + \frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} + \frac{\sin 50^\circ}{\cos 50^\circ} + \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}$$

$$= \frac{\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ}{\cos 30^\circ \cos 60^\circ} + \frac{\sin 40^\circ \cos 50^\circ + \cos 40^\circ \sin 50^\circ}{\cos 40^\circ \cos 50^\circ}$$

$$= \frac{\sin(30^\circ + 60^\circ)}{\cos 30^\circ \sin 30^\circ} + \frac{\sin(40^\circ + 50^\circ)}{\cos 40^\circ \sin 40^\circ} = \frac{2}{\sin 60^\circ} + \frac{2}{\sin 80^\circ} = \frac{2(\sin 80^\circ + \sin 60^\circ)}{\sin 60^\circ \sin 80^\circ}$$

$$= \frac{2 \cdot 2 \sin 70^\circ \cos 10^\circ}{\sqrt{3}/2 \cos 10^\circ} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \sin 70^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cos 20^\circ$$

$$\begin{aligned}
& e. \tan^6 20^\circ - 33 \tan^4 20^\circ + 27 \tan^2 20^\circ - 3 = 0 \\
& \Leftrightarrow \tan^6 20^\circ - 33 \tan^4 20^\circ + 27 \tan^2 20^\circ = 3 \\
& \Leftrightarrow \tan^6 20^\circ - 6 \tan^4 20^\circ + 9 \tan^2 20^\circ = 27 \tan^4 20^\circ - 18 \tan^2 20^\circ + 3 \\
& \Leftrightarrow (\tan^3 20^\circ - 3 \tan 20^\circ)^2 = 3(1 - 3 \tan^2 20^\circ)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\tan^3 20^\circ - 3 \tan 20^\circ}{1 - 3 \tan^2 20^\circ} \right)^2 = 3 \\
& \Leftrightarrow (\tan(20^\circ \cdot 3))^2 = 3 \Leftrightarrow (\tan 60^\circ)^2 = 3 \Leftrightarrow (\sqrt{3})^2 = 3 \quad (\text{luôn đúng})
\end{aligned}$$

Câu 30. Chứng minh các đẳng thức sau:

$$a) \cot x - \tan x - 2 \tan 2x = 4 \cot 4x \quad b) \frac{1 - 2 \sin^2 2x}{1 - \sin 4x} = \frac{1 + \tan 2x}{1 - \tan 2x}$$

$$c) \frac{1}{\cos^6 x} - \tan^6 x = \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x} + 1 \quad d) \tan 4x - \frac{1}{\cos 4x} = \frac{\sin 2x - \cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x}$$

$$e) \tan 6x - \tan 4x - \tan 2x = \tan 2x \cdot \tan 4x \cdot \tan 6x$$

$$f) \frac{\sin 7x}{\sin x} = 1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 2 \cos 6x$$

$$g) \cos 5x \cdot \cos 3x + \sin 7x \cdot \sin x = \cos 2x \cdot \cos 4x$$

Lời giải

$$a) \cot x - \tan x - 2 \tan 2x = 4 \cot 4x$$

$$\begin{aligned}
VT &= \cot x - \tan x - 2 \tan 2x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{2 \sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cdot \cos x} - \frac{2 \sin 2x}{\cos 2x} \\
&= \frac{2 \cos 2x}{\sin 2x} - \frac{2 \sin 2x}{\cos 2x} = \frac{4(\cos^2 2x - \sin^2 2x)}{\sin 4x} = \frac{4 \cos 4x}{\sin 4x} = 4 \cot 4x = VP
\end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

$$b) \frac{1 - 2 \sin^2 2x}{1 - \sin 4x} = \frac{1 + \tan 2x}{1 - \tan 2x}$$

$$VT = \frac{1 - 2 \sin^2 2x}{1 - \sin 4x} = \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{(\cos 2x - \sin 2x)^2} = \frac{\cos 2x + \sin 2x}{\cos 2x - \sin 2x} = \frac{1 + \tan 2x}{1 - \tan 2x} = VP \Rightarrow$$

đpcm.

$$c) \frac{1}{\cos^6 x} - \tan^6 x = \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x} + 1$$

$$\begin{aligned}
VT &= \frac{1}{\cos^6 x} - \tan^6 x = \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)^3 - \tan^6 x = (1 + \tan^2 x)^3 - \tan^6 x \\
&= 1 + 3 \tan^2 x + 3 \tan^4 x + \tan^6 x - \tan^6 x = 1 + 3 \tan^2 x (1 + \tan^2 x) \\
&= 1 + \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x} = VP
\end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

$$d) \tan 4x - \frac{1}{\cos 4x} = \frac{\sin 2x - \cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x}$$

$$VT = \tan 4x - \frac{1}{\cos 4x} = \frac{\sin 4x}{\cos 4x} - \frac{1}{\cos 4x} = \frac{\sin 4x - 1}{\cos 4x} = \frac{-(\cos 2x - \sin 2x)^2}{(\cos^2 2x - \sin^2 2x)} = \frac{\sin 2x - \cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x}$$

$$= VP$$

Suy ra điều phải chứng minh.

e) $\tan 6x - \tan 4x - \tan 2x = \tan 2x \cdot \tan 4x \cdot \tan 6x$

$$\tan 6x = \frac{\tan 4x + \tan 2x}{1 - \tan 2x \cdot \tan 4x} \Leftrightarrow \tan 6x(1 - \tan 2x \cdot \tan 4x) = \tan 4x + \tan 2x$$

Ta có

$$\Leftrightarrow \tan 6x - \tan 6x \cdot \tan 2x \cdot \tan 4x = \tan 4x + \tan 2x$$

$$\Leftrightarrow \tan 6x - \tan 4x - \tan 2x = \tan 2x \cdot \tan 4x \cdot \tan 6x$$

Suy ra điều phải chứng minh.

f) $\frac{\sin 7x}{\sin x} = 1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x + 2\cos 6x$

$$\Leftrightarrow \sin 7x = \sin x + 2\cos 2x \cdot \sin x + 2\cos 4x \cdot \sin x + 2\cos 6x \cdot \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin 7x = \sin x + \sin 3x - \sin x + \sin 5x - \sin 3x + \sin 7x - \sin 5x$$

$$\Leftrightarrow \sin 7x = \sin 7x \text{ (luôn đúng).}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

g) $\cos 5x \cdot \cos 3x + \sin 7x \cdot \sin x = \cos 2x \cdot \cos 4x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x) + \frac{1}{2}(\cos 6x - \cos 8x) = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 6x) = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x)$$

(luôn đúng). Suy ra điều phải chứng minh.

Câu 31. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\cot x - \tan x - 2\tan 2x = 4\cot 4x$. b) $\frac{1 - 2\sin^2 2x}{1 - \sin 4x} = \frac{1 + \tan 2x}{1 - \tan 2x}$.

c) $\frac{1}{\cos^6 x} - \tan^6 x = \frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x} + 1$. d) $\tan 4x - \frac{1}{\cos 4x} = \frac{\sin 2x - \cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x}$.

e) $\tan 6x - \tan 4x - \tan 2x = \tan 2x \cdot \tan 4x \cdot \tan 6x$.

f) $\frac{\sin 7x}{\sin x} = 1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x + 2\cos 6x$

g) $\cos 5x \cdot \cos 3x + \sin 7x \cdot \sin x = \cos 2x \cdot \cos 4x$.

h) Cho $\sin(2a + b) = 5\sin b$. Chứng minh: $\frac{2\tan(a + b)}{\tan a} = 3$.

i) Cho $\tan(a + b) = 3\tan a$. Chứng minh: $\sin(2a + 2b) + \sin 2a = 2\sin 2b$.

Lời giải

a) $\cot x - \tan x - 2\tan 2x = 4\cot 4x$

Ta có: $\cot x - \tan x - 2\tan 2x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} - 2\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2\cos^2 x - 2\sin^2 x}{\sin 2x} - \frac{2\sin 2x}{\cos 2x}$

$$= \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{2\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{4(\cos^2 2x - \sin^2 2x)}{\sin 4x} = \frac{4\cos 4x}{\sin 4x} = 4\cot 4x$$

b) $\frac{1 - 2\sin^2 2x}{1 - \sin 4x} = \frac{1 + \tan 2x}{1 - \tan 2x}$

Ta có:
$$\frac{1 - 2\sin^2 2x}{1 - \sin 4x} = \frac{\cos 4x}{(\cos 2x - \sin 2x)^2} = \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{(\cos 2x - \sin 2x)^2} = \frac{\cos 2x + \sin 2x}{\cos 2x - \sin 2x} = \frac{1 + \tan 2x}{1 - \tan 2x} \text{ (do } \cos 2x \neq 0 \text{)}.$$

c)
$$\frac{1}{\cos^6 x} - \tan^6 x = \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x} + 1$$

Ta có:
$$\frac{1}{\cos^6 x} - \tan^6 x = \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)^3 - \tan^6 x = (1 + \tan^2 x)^3 - \tan^6 x$$

$$= 1 + 3 \tan^2 x + 3 \tan^4 x + \tan^6 x - \tan^6 x = 1 + 3 \tan^2 x (1 + \tan^2 x) = \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x} + 1$$

d)
$$\tan 4x - \frac{1}{\cos 4x} = \frac{\sin 2x - \cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x}$$

Ta có:
$$\tan 4x - \frac{1}{\cos 4x} = \frac{\sin 4x}{\cos 4x} - \frac{1}{\cos 4x} = \frac{\sin 4x - 1}{\cos 4x} = \frac{-(\cos 2x - \sin 2x)^2}{\cos^2 2x - \sin^2 2x} = \frac{\sin 2x - \cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x}$$

e)
$$\tan 6x - \tan 4x - \tan 2x = \tan 2x \cdot \tan 4x \cdot \tan 6x$$

Ta có:
$$\tan(2x + 4x) = \frac{\tan 2x + \tan 4x}{1 - \tan 2x \tan 4x}$$

Suy ra:
$$\tan 6x - \tan 2x \tan 4x \tan 6x = \tan 2x + \tan 4x$$

Do đó:
$$\tan 6x - \tan 4x - \tan 2x = \tan 2x \cdot \tan 4x \cdot \tan 6x$$

f)
$$\frac{\sin 7x}{\sin x} = 1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 2 \cos 6x$$

Ta có:
$$\sin x (1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 2 \cos 6x)$$

$$= \sin x + 2 \cdot \frac{1}{2} (\sin 3x - \sin x) + 2 \cdot \frac{1}{2} (\sin 5x - \sin 3x) + 2 \cdot \frac{1}{2} (\sin 7x - \sin 5x)$$

$$= \sin x + \sin 3x - \sin x + \sin 5x - \sin 3x + \sin 7x - \sin 5x$$

$$= \sin 7x$$

Suy ra:
$$\frac{\sin 7x}{\sin x} = 1 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x + 2 \cos 6x$$

g)
$$\cos 5x \cdot \cos 3x + \sin 7x \cdot \sin x = \cos 2x \cdot \cos 4x$$

Ta có:
$$\cos 5x \cdot \cos 3x + \sin 7x \cdot \sin x = \frac{1}{2} (\cos 8x + \cos 2x) + \frac{1}{2} (\cos 6x - \cos 8x)$$

$$= \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 6x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos 4x \cdot \cos 2x = \cos 2x \cos 4x$$

h) Cho
$$\frac{2 \tan(a+b)}{\tan a} = 3$$
. Chứng minh:
$$\frac{\sin(2a+b)}{\sin a} = 3$$

Ta có:
$$\frac{2 \tan(a+b)}{\tan a} = 2 \cdot \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} \cdot \frac{\cos a}{\sin a} = 2 \cdot \frac{\sin(2a+b) + \sin b}{\sin(2a+b) - \sin b} = 2 \cdot \frac{6 \sin b}{4 \sin b} = 3$$

i) Cho
$$\tan(a+b) = 3 \tan a$$
. Chứng minh:
$$\sin(2a+2b) + \sin 2a = 2 \sin 2b$$

Ta có:
$$\tan(a+b) = 3 \tan a$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = 3 \frac{\sin a}{\cos a}$$

$$\Leftrightarrow \sin(a+b) \cos a = 3 \sin a \cos(a+b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} [\sin(2a+b) + \sin b] = \frac{3}{2} [\sin(2a+b) - \sin b]$$

$$\Leftrightarrow \sin(2a+b) + \sin b = 3\sin(2a+b) - 3\sin b \Leftrightarrow \sin(2a+b) = 2\sin b$$

Khi đó: $\sin(2a+2b) + \sin 2a = 2\sin(2a+b)\cos b = 2.2\sin b.\cos b = 2\sin 2b$

Dạng 5. Bài toán tam giác

Qui ước: Cho tam giác ABC gọi a, b, c là ba cạnh đối diện của ba góc A, B, C ; h_a, h_b, h_c là ba đường cao; m_a, m_b, m_c là ba đường trung tuyến; l_A, l_B, l_C là ba đường phân giác; r là bán kính đường tròn nội tiếp; R là bán kính đường tròn ngoại tiếp và $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi.

Điều kiện A, B, C là ba góc của một tam giác là $\begin{cases} A, B, C \\ A+B+C = \pi \end{cases}$ nên suy ra

$$A+B = \pi - C, \quad \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \dots$$

Định lý hàm số cosin $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

$$\text{Suy ra } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Định lý hàm số sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ suy ra $a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C$

$$\text{Công thức tính diện tích } S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\text{Công thức phân giác } l_A = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}, \dots$$

$$\text{Công thức trung tuyến } m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}, \dots$$

Câu 32. (SGK-KNTT-11-Tập 1) Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 75^\circ$; $\hat{C} = 45^\circ$ và $a = BC = 12 \text{ cm}$.

a) Sử dụng công thức $S = \frac{1}{2} ab \sin C$ và định lý sin, hãy chứng minh diện tích của tam giác

$$ABC \text{ cho bởi công thức } S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

b) Sử dụng kết quả ở câu a và công thức biến đổi tích thành tổng, hãy tính diện tích S của tam giác ABC .

Lời giải

$$\text{a) Định lý } \sin : \sin \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \text{ suy ra } \sin A = \frac{a \sin B}{b}$$

$$\frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \frac{a \sin B}{b}} = \frac{1}{2} \frac{a^2 b \sin B \sin C}{a \sin B} = \frac{1}{2} ab \sin C = S$$

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} = \frac{12^2 \times \frac{1}{2} (\cos 30^\circ - \cos 120^\circ)}{2 \sin (180^\circ - 75^\circ - 45^\circ)} = 36 + 12\sqrt{3} (\text{cm}^2)$$

b)

Câu 33. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \sin C = \sin A \cos B + \sin B \cos A.$$

$$\frac{\sin C}{\cos A \cdot \cos B} = \tan A + \tan B \quad (A, B \neq 90^\circ)$$

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C \quad (A, B, C \neq 90^\circ)$$

$$\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$$

$$\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1$$

$$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}$$

$$\cot B + \frac{\cos C}{\sin B \cdot \cos A} = \cot C + \frac{\cos B}{\sin C \cdot \cos A} \quad (A \neq 90^\circ)$$

$$\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} + \cos \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$$

$$\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

Lời giải

$$j) \sin C = \sin A \cdot \cos B + \sin B \cdot \cos A$$

$$\text{Ta có } A + B + C = \pi \Leftrightarrow A + B = \pi - C$$

$$\Leftrightarrow \sin(A + B) = \sin(\pi - C) \Leftrightarrow \sin A \cdot \cos B + \sin B \cdot \cos A = \sin C \quad (\text{dpcm}).$$

$$k) \frac{\sin C}{\cos A \cdot \cos B} = \tan A + \tan B \quad (A, B \neq 90^\circ)$$

$$\text{Ta có } \tan A + \tan B = \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cdot \cos B} = \frac{\sin(A + B)}{\cos A \cdot \cos B} = \frac{\sin C}{\cos A \cdot \cos B}$$

$$l) \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C \quad (A, B, C \neq 90^\circ)$$

$$\text{Ta có } \tan C = \tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B}$$

$$\text{Nên } -\tan C(1 - \tan A \cdot \tan B) = \tan A + \tan B$$

$$\text{Do đó } \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$$

$$m) \cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$$

$$\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = \cot B(\cot A + \cot C) + \cot C \cdot \cot A$$

$$= \frac{\cos B}{\sin B} \left(\frac{\sin(A + C)}{\sin A \cdot \sin C} \right) + \cot C \cdot \cot A$$

$$= \frac{\cos B}{\sin A \cdot \sin C} + \frac{\cos C \cdot \cos A}{\sin A \cdot \sin C} = \frac{\cos B + \frac{1}{2}(\cos(A + C) + \cos(A - C))}{\sin A \cdot \sin C}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(\cos(A - C) - \cos(A + C))}{\sin A \cdot \sin C} = \frac{\sin A \cdot \sin C}{\sin A \cdot \sin C} = 1$$

$$n) \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1$$

$$\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = \tan \frac{B}{2} \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{C}{2} \right) + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} \left(\frac{\sin \left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2} \right)}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}} \right) + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} \\
&= \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}} + \frac{\sin \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}} \\
&= \frac{\sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}} \\
&= \frac{\sin \frac{B}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{C}{2} - \frac{A}{2} \right) - \cos \left(\frac{C}{2} + \frac{A}{2} \right) \right)}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{C}{2} - \frac{A}{2} \right) + \cos \left(\frac{C}{2} + \frac{A}{2} \right) \right)}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}} = 1
\end{aligned}$$

$$o) \quad \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}$$

$$\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} = \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2} - \cot \frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} = \left(\cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} - 1 \right) \cot \frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} = \left(\frac{\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2}} - 1 \right) \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} = \left(\frac{\cos \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right)}{\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2}} \right) \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} = \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}} = \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2}} \Leftrightarrow \frac{\cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} + \cos \frac{B}{2} \sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} = \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} = \frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} \text{ . Luôn đúng}$$

Vậy $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2} \cdot \cot\frac{B}{2} \cdot \cot\frac{C}{2}$

p) $\cot B + \frac{\cos C}{\sin B \cdot \cos A} = \cot C + \frac{\cos B}{\sin C \cdot \cos A} \quad (A \neq 90^\circ)$

$$\cot B + \frac{\cos C}{\sin B \cdot \cos A} = \cot C + \frac{\cos B}{\sin C \cdot \cos A} \Leftrightarrow \cot B - \cot C = \frac{\cos B}{\sin C \cdot \cos A} - \frac{\cos C}{\sin B \cdot \cos A}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos B \sin C - \cos C \sin B}{\sin B \sin C} = \frac{1}{\cos A} \left(\frac{\frac{1}{2}(\sin 2B - \sin 2C)}{\sin B \sin C} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(C - B)}{\sin B \sin C} = \frac{1}{\cos A} \left(\frac{\frac{1}{2}(\sin 2B - \sin 2C)}{\sin B \sin C} \right) \Leftrightarrow \frac{\sin(C - B)}{\sin B \sin C} = \frac{1}{\cos A} \frac{\cos(B + C) \sin(B - C)}{\sin B \sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(C - B)}{\sin B \sin C} = \frac{1}{\cos A} \frac{-\cos A \sin(B - C)}{\sin B \sin C} \Leftrightarrow \frac{\sin(C - B)}{\sin B \sin C} = \frac{\sin(C - B)}{\sin B \sin C}$$

Vậy $\cot B + \frac{\cos C}{\sin B \cdot \cos A} = \cot C + \frac{\cos B}{\sin C \cdot \cos A} \quad (A \neq 90^\circ)$

q) $\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} = \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} + \sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} + \cos\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}$

Đặt $\sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} + \sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} + \cos\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} = T$

$$T = \sin\frac{A}{2} \cdot \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) + \cos\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}$$

$$T = \cos\frac{A}{2} \cdot \left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} \right)$$

$$T = \cos\frac{A}{2} \cdot \left(\cos\frac{B+C}{2} + \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} \right)$$

$$T = \cos\frac{A}{2} \cdot \left(\cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2} \right) = \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}$$

r) $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = 1 - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

Ta có $\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = \frac{1 - \cos A}{2} + \frac{1 - \cos B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}$

$$= 1 - \frac{1}{2}(\cos A + \cos B) + \sin^2\frac{C}{2} = 1 - \frac{1}{2} \left(2\cos\frac{A+B}{2} \cos\frac{A-B}{2} \right) + \sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 1 - \left(\sin\frac{C}{2} \cos\frac{A-B}{2} \right) + \sin^2\frac{C}{2}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \sin \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A+B}{2} - \cos \frac{A-B}{2} \right) \\
&= 1 - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}
\end{aligned}$$

Câu 34. Cho tam giác ABC chứng minh:

- a) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$
b) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$
c) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$
d) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)$
e) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$
f) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned}
\sin A + \sin B + \sin C &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \\
&= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2} \\
&= 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) \\
&= 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}
\end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned}
\cos A + \cos B + \cos C &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} \\
&= 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} \\
&= 2 \sin \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) + 1 \\
&= 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}
\end{aligned}$$

c) Ta có:

$$\begin{aligned}
\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C &= 2 \sin(A+B) \cos(A-B) + 2 \sin C \cos C \\
&= 2 \sin C \cos(A-B) - 2 \sin C \cos(A+B) \\
&= 2 \sin C [\cos(A-B) - \cos(A+B)] \\
&= 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C
\end{aligned}$$

d) Ta có:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + \sin^2 C$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + 1 - \cos^2 C \\
&= 2 - \cos(A+B)\cos(A-B) - \cos^2 C \\
&= 2 + \cos C \cos(A-B) - \cos^2 C \\
&= 2 + \cos C [\cos(A-B) + \cos(A+B)] \\
&= 2 + 2 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \\
&= 2(1 + \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{e) } \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C &= \\
&= 2 \cos(A+B)\cos(A-B) + 2 \cos^2 C - 1 \\
&= -2 \cos C \cos(A-B) + 2 \cos^2 C - 1 \\
&= -2 \cos C [\cos(A-B) - \cos C] - 1 \\
&= -2 \cos C [\cos(A-B) + \cos(A+B)] - 1 \\
&= -1 - 4 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C
\end{aligned}$$

f) **Cách 1:**

$$\begin{aligned}
\tan A + \tan B + \tan C &= \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} + \tan C \\
&= \frac{\sin C}{\cos A \cos B} + \tan C \\
&= \tan C \left(\frac{\cos C}{\cos A \cos B} + 1 \right) \\
&= \tan C \left(\frac{-\cos(A+B) + \cos A \cos B}{\cos A \cos B} \right) \\
&= \tan C \cdot \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B} \\
&= \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C
\end{aligned}$$

Cách 2:

$$\begin{aligned}
\tan(A+B) &= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \\
\Leftrightarrow -\tan C &= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \\
\Leftrightarrow -\tan C + \tan C \tan A \tan B &= \tan A + \tan B \\
\Leftrightarrow \tan C \tan A \tan B &= \tan A + \tan B + \tan C
\end{aligned}$$

Câu 35. Tìm các góc của tam giác ABC , biết:

$$\text{a) } B - C = \frac{\pi}{3}, \sin B \cdot \sin C = \frac{1}{2}.$$

$$\text{b) } B + C = \frac{2\pi}{3}, \sin B \cdot \cos C = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}.$$

Lời giải

a) Ta có $0 < A, B, C < \pi$ và $A + B + C = \pi \Rightarrow B + C = \pi - A$.

$$\sin B \cdot \sin C = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} [\cos(B-C) - \cos(B+C)] = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{3} - \cos(\pi - A) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \cos A = 1 \Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{\pi}{3} \quad (\text{vì } 0 < A, B, C < \pi) \Rightarrow B + C = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} B - C = \frac{\pi}{3} \\ B + C = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{\pi}{2} \\ C = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{\pi}{3}, B = \frac{\pi}{2}, C = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{b) Ta có } 0 < A, B, C < \pi \text{ và } A + B + C = \pi \Rightarrow B + C = \pi - A$$

$$\sin B \cdot \cos C = \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2} [\sin(B - C) + \sin(B + C)] = \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \sin(B - C) + \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(B - C) + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(B - C) = \frac{1}{2} \Rightarrow B - C = \frac{\pi}{6}$$

(vì

$$0 < A, B, C < \pi \Rightarrow 0 < B - C < \pi).$$

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} B - C = \frac{\pi}{6} \\ B + C = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{5\pi}{12} \\ C = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \pi - B - C = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{\pi}{3}, B = \frac{5\pi}{12}, C = \frac{\pi}{4}$$

Câu 36. Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có

$$\text{a) } \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2};$$

$$\text{b) } \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \sin A + \sin B + \sin C = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$\text{Mặt khác trong tam giác } ABC \text{ ta có } A + B + C = \pi \Leftrightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$$

$$\text{Suy ra } \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}, \quad \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2}$$

$$\sin A + \sin B + \sin C = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$$

Vậy

$$= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2} = 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

b) Ta có

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C$$

$$= 2 - \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} - \cos^2 C = 2 - \cos(A+B) \cos(A-B) - \cos^2 C$$

$$\begin{aligned} \text{Vì } A+B+C=\pi \text{ suy ra } \cos(A+B) &= -\cos C \text{ nên } 2 - \cos(A+B)\cos(A-B) - \cos^2 C \\ &= 2 + \cos C \cos(A-B) + \cos C \cos(A+B) = 2 + \cos C [\cos(A-B) + \cos(A+B)] \\ &= 2 + \cos C \cdot 2 \cos A \cos B = 2(1 + \cos A \cos B \cos C) \end{aligned}$$

Câu 37. Chứng minh trong mọi tam giác ABC không vuông ta đều có

- a) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$;
b) $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$.

Lời giải

a) Đẳng thức tương đương với $\tan A + \tan B = \tan A \tan B \tan C - \tan C = \tan C (\tan A \tan B - 1)$ (*)

Do tam giác ABC không vuông nên $A+B \neq \frac{\pi}{2}$ suy ra

$$\tan A \tan B - 1 = \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B} - 1 = \frac{\sin A \sin B - \cos A \cos B}{\cos A \cos B} = \frac{-\cos(A+B)}{\cos A \cos B} \neq 0$$

 Vậy (*) $\Leftrightarrow \frac{\tan A + \tan B}{\tan A \tan B - 1} = \tan C \Leftrightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C \Leftrightarrow \tan(A+B) = -\tan C$. Đẳng thức cuối đúng vì $A+B+C=\pi$.

b) Vì $A+B+C=\pi$ suy ra $\cot(A+B) = -\cot C$

$$\begin{aligned} \cot(A+B) &= \frac{1}{\tan(A+B)} = \frac{1 - \tan A \tan B}{\tan A + \tan B} = \frac{1 - \frac{1}{\cot A \cot B}}{\frac{1}{\cot A} + \frac{1}{\cot B}} \\ &= \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B} \end{aligned}$$

Theo công thức cộng ta có

$$\frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B} = -\cot C \Leftrightarrow \cot A \cot B - 1 = -\cot C (\cot A + \cot B)$$

Suy ra $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$

Hay

Câu 38. Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có

- a) $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$
b) $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$

Lời giải

$$\tan\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \cot\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{C}{2}\right)}$$

a) Ta có

$$\frac{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}} = \frac{1}{\tan\left(\frac{C}{2}\right)} \Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = 1 - \tan \frac{B}{2} \tan \frac{A}{2}$$

$$\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$$

Tức là

b) Từ kết quả câu a) ta có

$$\frac{1}{\cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}} + \frac{1}{\cot \frac{C}{2} \cot \frac{A}{2}} = 1 \Leftrightarrow \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}$$

Câu 39. Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có

- a) $\sin A + \sin B \leq 2 \cos \frac{C}{2}$;
 b) $\cos A + \cos B \leq 2 \sin \frac{C}{2}$.

Lời giải

- a) Ta có $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \leq 2 \sin \frac{A+B}{2} = 2 \cos \frac{C}{2}$.
 b) Ta có $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \leq 2 \cos \frac{A+B}{2} = 2 \sin \frac{C}{2}$.

Câu 40. Chứng minh trong mọi tam giác ABC nhọn ta đều có

- a) $\cot A + \cot B \geq 2 \tan \frac{C}{2}$;
 b) $\sin A \sin B \geq \cos C$.

Lời giải

- a) Ta có $\cot A + \cot B = \frac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B} = \frac{\sin C}{\sin A \sin B} = \frac{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin A \sin B}$.

Do A, B là các góc trong tam giác nên $\sin A > 0, \sin B > 0$. Theo bất đẳng thức CôSi, ta có

$$\sin A \sin B \leq \left(\frac{\sin A + \sin B}{2} \right)^2 \leq \left(\frac{2 \cos \frac{C}{2}}{2} \right)^2 = \cos^2 \frac{C}{2}$$

$$\cot A + \cot B \geq \frac{2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{\cos^2 \frac{C}{2}} = 2 \tan \frac{C}{2}$$

Suy ra

- b) Do tam giác ABC nhọn nên $\cos A > 0, \cos B > 0$ nên ta có

$$\sin A \sin B \geq \sin A \sin B - \cos A \cos B$$

$$\Leftrightarrow \sin A \sin B \geq -\cos(A+B) \Leftrightarrow \sin A \sin B \geq \cos C$$

Câu 41. Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có

- a) $\tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3}$ với ABC là tam giác nhọn;
 b) $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$.

Lời giải

- a) Vì tam giác ABC nhọn nên $\tan A > 0, \tan B > 0, \tan C > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C}$$

Theo bài 2, ta có $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ nên

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C} \Leftrightarrow \tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\tan A \tan B \tan C} \left(\sqrt[3]{(\tan A \tan B \tan C)^2} - 3 \right) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{(\tan A \tan B \tan C)^2} \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3}$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \cos C$$

- b) Ta có

$$\text{Vì } \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \text{ nên } \cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}$$

$$\text{Mặt khác } \cos C = 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} \quad \cos A + \cos B + \cos C = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2}$$

$$= -2 \left(\sin^2 \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= -2 \left(\sin^2 \frac{C}{2} - 2 \sin \frac{C}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \frac{1}{4} \cos^2 \frac{A-B}{2} \right) + 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{A-B}{2}$$

$$= -2 \left(\sin \frac{C}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{A-B}{2} \right)^2 + 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{A-B}{2}$$

$$\text{Vì } \left| \cos \frac{A-B}{2} \right| \leq 1 \text{ suy ra } \cos^2 \frac{A-B}{2} \leq 1 \text{ nên } \cos A + \cos B + \cos C \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Câu 42. Tam giác ABC là tam giác gì nếu

$$\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$$

$$\text{a) } 3(\cos B + \sin A) + 4(\sin B + \cos A) = 10$$

Lời giải

$$\sin A = \frac{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}} = \frac{\sin \frac{B+C}{2}}{\cos \frac{B+C}{2}} \Leftrightarrow 2 \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} \Leftrightarrow \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{2}$$

a) Ta có:

$$\text{Suy ra } \sin \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ nên } A = \frac{\pi}{2}$$

Vậy tam giác ABC là tam giác vuông tại A .

b) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$3(\cos B + \sin A) + 4(\sin B + \cos A) \leq \sqrt{3^2 + 4^2} \sqrt{(\cos B + \sin A)^2 + (\cos A + \sin B)^2}$$

$$\Leftrightarrow 10 \leq 5\sqrt{2 + 2\sin(A+B)} \Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{2 + 2\sin(A+B)} \Leftrightarrow \sin(A+B) \geq 1 \Leftrightarrow \sin(A+B) = 1$$

$$\text{Suy ra } A+B = \frac{\pi}{2}$$

Vậy tam giác ABC là tam giác vuông tại C .

Câu 43. Tam giác ABC là tam giác gì nếu

$$\text{a) } a \sin(B-C) + b \sin(C-A) = 0 \quad \text{b) } \tan A + \cot A = (\sin B + \cos B)^2$$

Lời giải

a) Theo định lý hàm số sin, ta có: $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$. Do đó

$$a \sin(B-C) + b \sin(C-A) = 0 \Leftrightarrow \sin A \sin(B-C) - \sin B \sin(A-C) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(B+C) \sin(B-C) - \sin(A+C) \sin(A-C) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} [(\cos 2C - \cos 2B) - (\cos 2C - \cos 2A)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2A = \cos 2B \Leftrightarrow A = B$$

Vậy tam giác ABC là cân tại C .

$$\text{b) Để biểu thức có nghĩa khi và chỉ khi } A \neq \frac{\pi}{2}$$

Do $\tan A + \cot A = (\sin B + \cos B)^2 \geq 0$. Hơn nữa $\tan A$ và $\cot A$ cùng dấu nên suy ra $\tan A \geq 0$, $\cot A \geq 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có $\tan A + \cot A \geq 2\sqrt{\tan A \cot A} = 2$ (1).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\tan A = \cot A \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{4}$.

$$(\sin B + \cos B)^2 = \left[\sqrt{2} \sin \left(B + \frac{\pi}{4} \right) \right]^2 = 2 \sin^2 \left(B + \frac{\pi}{4} \right) \leq 2 \quad (2)$$

Mặt khác, ta có

$$\sin \left(B + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Leftrightarrow B = \frac{\pi}{4}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

Từ (1) và (2), suy ra $\tan A + \cot A = (\sin B + \cos B)^2 = 2$ khi và chỉ khi $A = B = \frac{\pi}{4}$.

Vậy tam giác ABC là vuông cân tại C .

Câu 44. Tam giác ABC là tam giác gì nếu

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} a = 2b \cos C & (1) \\ \frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 & (2) \end{cases} & \quad \text{b) } \begin{cases} \cos B \cos C = \frac{1}{4} & (1) \\ \frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} = a^2 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Lời giải

a) Ta có: $(1) \Leftrightarrow 2R \sin A = 4R \sin B \cos C \Leftrightarrow \sin A = 2 \sin B \sin C$
 $\Leftrightarrow \sin(B + C) = 2 \sin B \cos C \Leftrightarrow \sin(B - C) = 0 \Leftrightarrow B = C \Leftrightarrow b = c$ (1')

Thay $b = c$ vào (2) ta được $a^2 = \frac{2b^3 - a^3}{2b - a} \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ (2')

Từ (1') và (2') suy ra $a = b = c$.

Vậy tam giác ABC đều.

b) Ta có $(2) \Leftrightarrow a^3 - a^2b - a^2c = a^3 - b^3 - c^3 \Leftrightarrow b^3 + c^3 = a^2(b + c)$
 $\Leftrightarrow (b + c)(b^2 - bc + c^2) = a^2(b + c) \Leftrightarrow b^2 - bc + c^2 = a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = bc \Leftrightarrow 2bc \cos A = bc$
 $\Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{3}$ (1')

Hơn nữa, $(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2} [\cos(B - C) + \cos(B + C)] = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos(B - C) - \cos A = \frac{1}{2}$

Do $\cos A = \frac{1}{2}$ nên $\cos(B - C) = 1$. Suy ra $B = C$ (2').

Từ (1') và (2'), suy ra $A = B = C = \frac{\pi}{3}$.

Vậy tam giác ABC đều.

Câu 45. Tam giác ABC là tam giác gì nếu

$$\text{a) } \frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} = \frac{a}{\sin B \sin C} \quad \text{b) } \frac{\sin A + \cos B}{\sin B + \cos A} = \tan A$$

Lời giải

a) Áp dụng định lý hàm số sin, ta có

$$\begin{aligned}\frac{b}{\cos B} + \frac{c}{\cos C} &= \frac{a}{\sin B \sin C} \Leftrightarrow \frac{2R \sin B}{\cos B} + \frac{2R \sin C}{\cos C} = \frac{2R \sin A}{\sin B \sin C} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin B \cos C + \sin C \cos B}{\cos B \cos C} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C} \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin C}{\cos B \cos C} = \frac{\sin A}{\sin B \sin C} \\ &\Leftrightarrow \cos B \cos C = \sin B \sin C \Leftrightarrow \cos(B+C) = 0.\end{aligned}$$

$$B+C = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{2}$$

Suy ra

Vậy tam giác ABC vuông tại A .

b) Ta có

$$\frac{\sin A + \cos B}{\sin B + \cos A} = \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \Leftrightarrow \cos A \cos B - \sin A \sin B = 0 \Leftrightarrow \cos(A+B) = 0$$

$$A+B = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

Suy ra

Vậy tam giác ABC vuông tại C .

Câu 46. Chứng minh với mọi tam giác ABC , ta có

$$\text{a) } 1 + \frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C \quad ; \text{b) } a \cot A + b \cot B + c \cot C = 2(R+r)$$

Lời giải.

$$\text{a) Ta có } \cos A + \cos B + \cos C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + 1 \quad \text{nêu đề bài tương đương với giả thiết}$$

$$1 + \frac{r}{R} = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \quad \text{hay} \quad r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$VT = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}bc \sin A}{\frac{1}{2}(a+b+c)} = \frac{4R^2 \sin A \sin B \sin C}{2R(\sin A + \sin B + \sin C)}$$

Ta có

$$= 2R \frac{8 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = VP$$

b) Áp dụng kết quả câu a) ta có

$$VT = a \frac{\cos A}{\sin A} + b \frac{\cos B}{\sin B} + c \frac{\cos C}{\sin C} = 2R(\cos A + \cos B + \cos C) = 2R \left(1 + \frac{r}{R} \right) = VP$$

Câu 47. Chứng minh với mọi tam giác ABC , ta có

$$\text{a) } \frac{\cos \frac{A}{2}}{\ell_A} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{\ell_B} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{\ell_C} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c};$$

$$\text{b) } bc \cos^2 \frac{A}{2} + ca \cos^2 \frac{B}{2} + ab \cos^2 \frac{C}{2} = p$$

Lời giải.

$$\text{a) Từ công thức phân giác } \ell_A = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c} \quad \text{suy ra} \quad \frac{\cos \frac{A}{2}}{\ell_A} = \frac{b+c}{2bc} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Tương tự, ta có $\frac{\cos \frac{B}{2}}{\ell_B} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right)$ và $\frac{\cos \frac{C}{2}}{\ell_C} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$.
 Cộng vế theo vế của các đẳng thức thì được điều cần chứng minh.
 b) Ta có

$$\begin{aligned} VT &= \frac{1}{2}bc(1 + \cos A) + \frac{1}{2}ca(1 + \cos B) + \frac{1}{2}ab(1 + \cos C) \\ &= \frac{1}{2}(ab + bc + ca) + \frac{1}{2}bc \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{1}{2}ca \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{1}{2}ab \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{1}{4}(a + b + c)^2 = p^2 = VP. \end{aligned}$$

Dạng 6. Bài toán min-max

- Sử dụng phương pháp chứng minh đại số quen biết.
- Sử dụng các tính chất về dấu của giá trị lượng giác một góc.
- Sử dụng kết quả $|\sin \alpha| \leq 1, |\cos \alpha| \leq 1$ với mọi số thực α

Câu 48. Chứng minh rằng với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ thì
 a) $2 \cot^2 \alpha \geq 1 + \cos 2\alpha$ b) $\cot \alpha \geq 1 + \cot 2\alpha$

Lời giải

a) Bất đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) &\geq 2 \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \geq 1 - \sin^2 \alpha \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \sin^2 \alpha &\geq 2 \Leftrightarrow \sin^4 \alpha - 2 \sin^2 \alpha + 1 \geq 0 \\ \Leftrightarrow (\sin^2 \alpha - 1)^2 &\geq 0 \quad (\text{đúng}) \text{ ĐPCM.} \end{aligned}$$

b) Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \geq \frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \Leftrightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \geq \frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \quad (*)$$

Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{cases}$ nên

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow 2 \cos^2 \alpha \geq \sin 2\alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ &\Leftrightarrow 1 \geq \sin 2\alpha \quad (\text{đúng}) \text{ ĐPCM.} \end{aligned}$$

Câu 49. Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng $\left(\sin \alpha + \frac{1}{2 \cos \alpha} \right) \left(\cos \alpha + \frac{1}{2 \sin \alpha} \right) \geq 2$

Lời giải

Ta có $\left(\sin \alpha + \frac{1}{2 \cos \alpha} \right) \left(\cos \alpha + \frac{1}{2 \sin \alpha} \right) = \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{4 \sin \alpha \cos \alpha} + 1$

Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin \alpha \cos \alpha > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có

$$\sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{4 \sin \alpha \cos \alpha} \geq 2 \sqrt{\sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{1}{4 \sin \alpha \cos \alpha}} = 1$$

$$\text{Suy ra } \left(\sin \alpha + \frac{1}{2 \cos \alpha} \right) \left(\cos \alpha + \frac{1}{2 \sin \alpha} \right) \geq 2 \quad \text{ĐPCM.}$$

Câu 50. Chứng minh rằng với $0 \leq \alpha \leq \pi$ thì

$$(2 \cos 2\alpha - 1)^2 - 4 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) > (\sqrt{2 \sin \alpha} - 2)(3 - 2 \cos 2\alpha)$$

Lời giải

Bất đẳng thức tương đương với

$$\Leftrightarrow (2 \cos 2\alpha - 1)^2 - 2 \left[1 - \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \right] + 2(3 - 2 \cos 2\alpha) > \sqrt{2 \sin \alpha} [3 - 2(1 - 2 \sin^2 \alpha)]$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^2 2\alpha - 8 \cos 2\alpha + 5 + 2 \sin \alpha > \sqrt{2 \sin \alpha} (4 \sin^2 \alpha + 1)$$

$$\Leftrightarrow 4(1 - \cos 2\alpha)^2 + 1 + 2 \sin \alpha > \sqrt{2 \sin \alpha} (4 \sin^2 \alpha + 1)$$

$$\Leftrightarrow 16 \sin^4 \alpha + 2 \sin \alpha + 1 > \sqrt{2 \sin \alpha} (4 \sin^2 \alpha + 1)$$

Đặt $\sqrt{2 \sin \alpha} = t$, vì $0 \leq \alpha \leq \pi \Rightarrow 0 \leq t \leq \sqrt{2}$.

Bất đẳng thức trở thành $t^8 + t^2 + 1 > t(t^4 + 1) \Leftrightarrow t^8 - t^5 + t^2 - t + 1 > 0$ (*)

+ Nếu $0 \leq t < 1$: (*) $\Leftrightarrow t^8 + t^2(1 - t^3) + 1 - t > 0$ đúng vì $1 - t > 0, 1 - t^3 > 0, t^2 \geq 0$ và $t^8 \geq 0$.

+ Nếu $1 \leq t \leq \sqrt{2}$: (*) $\Leftrightarrow t^5(t^3 - 1) + t(t - 1) + 1 > 0$ đúng vì $t^5(t^3 - 1) \geq 0, t(t - 1) \geq 0$.

Vậy bất đẳng thức (*) đúng suy ra ĐPCM.

Câu 51. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức sau:

a) $A = \sin x + \cos x$ b) $B = \sin^4 x + \cos^4 x$

Lời giải

a) Ta có $A^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin 2x$

Vì $\sin 2x \leq 1$ nên $A^2 = 1 + \sin 2x \leq 1 + 1 = 2$ suy ra $-\sqrt{2} \leq A \leq \sqrt{2}$.

Khi $x = \frac{\pi}{4}$ thì $A = \sqrt{2}$, $x = -\frac{3\pi}{4}$ thì $A = -\sqrt{2}$

Do đó $\max A = \sqrt{2}$ và $\min A = -\sqrt{2}$.

$$\text{b) Ta có } B = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x}{4} + \frac{1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x}{4}$$

$$= \frac{2 + 2 \cos^2 2x}{4} = \frac{2 + 1 + \cos 4x}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$$

Vì $-1 \leq \cos 4x \leq 1$ nên $\frac{1}{2} \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x \leq 1$ suy ra $\frac{1}{2} \leq B \leq 1$.

Vậy $\max B = 1$ khi $\cos 4x = 1$ và $\min B = \frac{1}{2}$ khi $\cos 4x = -1$.

Câu 52. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức $A = 2 - 2\sin x - \cos 2x$

Lời giải

Ta có $A = 2 - 2\sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 2\sin^2 x - 2\sin x + 1$

Đặt $t = \sin x, |t| \leq 1$ khi đó biểu thức trở thành $A = 2t^2 - 2t + 1$

Xét hàm số $y = 2t^2 - 2t + 1$ với $|t| \leq 1$.

Bảng biến thiên:

t	$\frac{1}{2}$ - 1 $\frac{1}{2}$ 1
y	5 1 ↘ $\frac{1}{2}$ ↗

Từ bảng biến thiên suy ra $\max A = 5$ khi $t = -1$ hay $\sin x = -1$.

$\min A = \frac{1}{2}$ khi $t = \frac{1}{2}$ hay $\sin x = \frac{1}{2}$.

Câu 53. Cho $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng $\tan x + \cot x \geq 2$

Lời giải

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \tan x > 0 \\ \cot x > 0 \end{cases}$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có $\tan x + \cot x \geq 2\sqrt{\tan x \cdot \cot x} = 2$.

Câu 54. Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức $B = \cos 2x + \sqrt{1 + 2\sin^2 x}$

Lời giải

Ta có $B = \cos 2x + \sqrt{1 + 1 - \cos 2x} = \cos 2x + \sqrt{2 - \cos 2x}$

Đặt $t = \sqrt{2 - \cos 2x} \Rightarrow \cos 2x = 2 - t^2$, vì $-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq t \leq \sqrt{3}$

Biểu thức trở thành $B = 2 - t^2 + t$.

Xét hàm số $y = -t^2 + t + 2$ với $1 \leq t \leq \sqrt{3}$.

Bảng biến thiên

t	1 $\sqrt{3}$
y	2 ↘ $\sqrt{3} - 1$ ↘

Từ bảng biến thiên suy ra $\max B = 2$ khi $t = 1$ hay $\cos 2x = 1$.

$\min A = \sqrt{3} - 1$ khi $t = \sqrt{3}$ hay $\cos 2x = -1$.

Câu 55. Chứng minh rằng $\cos x(\sin x + \sqrt{\sin^2 x + 2}) \leq \sqrt{3}$

Lời giải

Ta có:
$$\sqrt{3}P = \sqrt{3} \sin x \cdot \cos x + \sqrt{3} \cos x \cdot \sqrt{\sin^2 x + 2} \leq \frac{3 \sin^2 x + \cos^2 x}{2} + \frac{3 \cos^2 x + \sin^2 x + 2}{2} = 3$$

Vậy: $P \leq \sqrt{3}$

Câu 56. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2 \sin x + \sin 2x$.

Lời giải

Ta có $P = 2 \sin x + 2 \sin x \cos x = 2 \sin x (1 + \cos x)$

Suy ra $P^2 = 4 \sin^2 x (1 + \cos x)^2 = \sin^2 x (1 + 2 \cos x + \cos^2 x)$

Ta có $\left(\cos x - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0 \Rightarrow \cos^2 x + \frac{1}{4} \geq \cos x$ suy ra

$$P \leq \sin^2 x \left(1 + 2 \cos^2 x + \frac{1}{2} + \cos^2 x \right) = \sin^2 x \left(\frac{3}{2} + 3 \cos^2 x \right)$$

Mặt khác theo bất đẳng thức $xy \leq \left(\frac{x+y}{2} \right)^2, \forall x, y \in \mathbb{R}$ ta có

$$\sin^2 x \left(\frac{5}{4} + 3 \cos^2 x \right) = \frac{1}{3} \cdot 3 \sin^2 x \left(\frac{3}{2} + 3 \cos^2 x \right) \leq \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{3 \sin^2 x + \left(\frac{3}{2} + 3 \cos^2 x \right)}{2} \right]^2 = \frac{27}{16}$$

Suy ra $P \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>